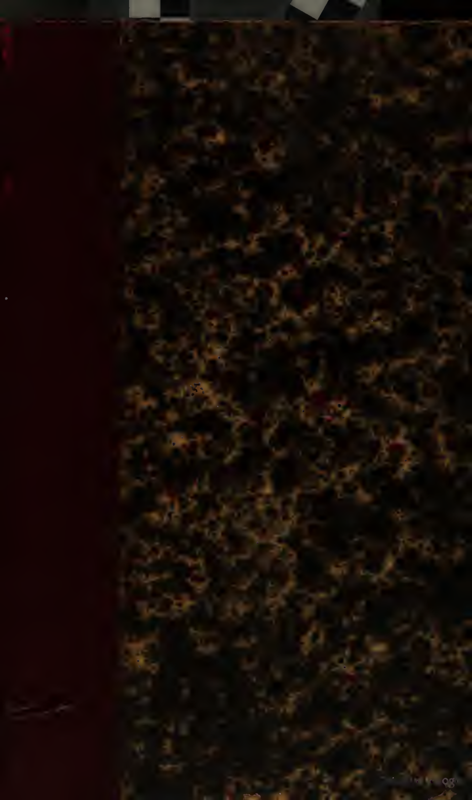
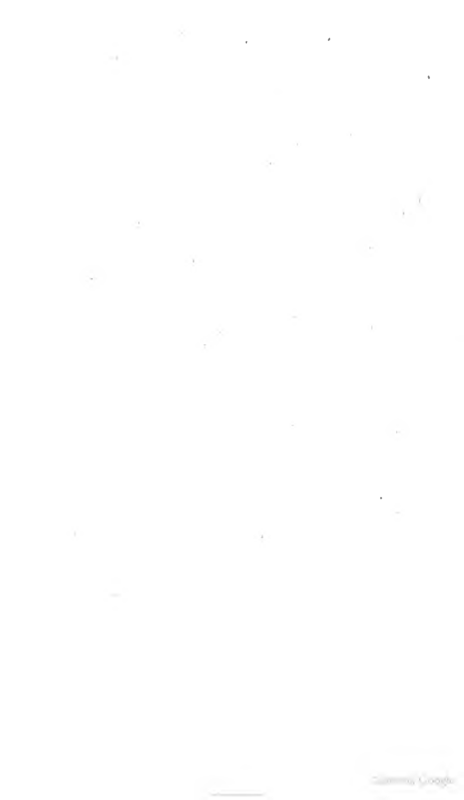




ARCHIV

der

MATHEMATIK UND PHYSIK

mit besonderer Rücksicht

auf die Bedürfnisse der Lehrer an höheren Unterrichtsanstalten.

Gegründet von

J. A. Grunert,

fortgesetzt von

R. Hoppe,

Dr. ph. Prof. an d. Univ. Berlin.

Zweite Reihe.

Zwölfter Teil.

Leipzig.

C. A. Koch's Verlagsbuchhandlung,

J. Sangbusch.

1894.

Inhalts-Verzeichniss

des zwölften Teils.

Mechanik.

Erd- und Himmelskunde.

Physik.

Litterarische Berichte.

Berichtigungen

im 11. Teile:

Seite 117	Zeile 15 v. u.	statt	den den	setze	den		
123	12 v. o.	„	F	„	7		
„	10, 8, 7 v. u.	„	ξ	„	ζ		
124	11 v. o.	„	Punkt	„	Punkt 4		
„	12 „	streiche 4 vor der Klammer					
129	12 „	statt III setze V					
„	11 v. u.	„	von	„	von CB“		
„	10 „	streiche CB“ vor der Klammer					
„	9 „	am Ende der Zeile setze ein Komma.					

1.

Neues Verfahren der Fourierschen Entwickelung der doppelperiodischen Functionen.

Von

Herrn Dr. **G. Mohrmann**

in Friedland.

Mit den Fourierschen Entwicklungen der doppelperiodischen Functionen dritter Art hat Herr Krause und eine Anzahl seiner Schüler sich eingehend beschäftigt. Die Hauptresultate dieser Untersuchungen finden sich in einer Reihe von Abhandlungen in den „Mathem. Annalen" niedergelegt [1]). Wenn der Verfasser dieses, gleichfalls ein Schüler des Herrn Prof. Krause, hier noch einmal auf das Problem zurückkommt, so geschieht es, um zu zeigen, dass die Resultate, welche bereits gefunden sind, auch auf einem anderen Wege gefunden werden können. U. z. dürfte dieser Weg sich besonders deshalb empfehlen, weil die Entwicklung der Reihen so nur die Hälfte der Rechnungen erfordert, welche in den erwähnten Arbeiten nötig sind. Nämlich in den Arbeiten des Herrn Krause wird das ganze Problem zurückgeführt auf die Behandlung zweier Functionen, nämlich der Functionen

(1a) $$\frac{\vartheta_0(mv+ma,\ m\tau)}{\vartheta_0(v)} \quad \text{und}$$

(1b) $$\frac{\vartheta_0(v-a)}{\vartheta_0(v-b)\,\vartheta_0(mv,\ m\tau)}$$

---

1) Vgl. „Mathem. Annalen" Band 30, pag. 425 ff. und pag. 516 ff.; Band 32, pag. 331 ff.; Band 33, pag. 108 ff.; Band 35, pag. 577 ff.

Jede dieser Primfunctionen wird nun für sich, die eine ganz unabhängig von der anderen, in eine trigonometrische Reihe entwickelt. Es soll jetzt im folgenden gezeigt werden, dass bei Zugrundelegung zweier andern Primfunctionen die Doppelarbeit nicht nötig ist, sondern dass die für die eine Function gefundenen Resultate durch ein einfaches Verfahren direct auf die zweite übertragen werden können, dass also „die trigonometrischen Entwickelungen aller doppel-„periodischen Functionen dritter Art auf die Betrachtung einer „einzigen Primfunction zurückgeführt werden können.“ Diese letztere Primfunction in mannigfaltigst möglicher Weise zu entwickeln, wird nicht unwichtig sein mit Rücksicht auf die mannigfachen Formen, in denen die trigonometrischen Reihen unserer Functionen in praxi gebraucht werden, z. B. bei zahlentheoretischen Untersuchungen.

I. Ableitung der Primfunctionen.

Es müssen hier einige Bemerkungen über doppelperiodische Functionen zweiter Art vorausgeschickt werden. Eine jede solche Function kann bekanntlich dargestellt werden in der Form

$$(2) \quad F(z) = \frac{\vartheta_0(z-\alpha_1)\,\vartheta_0(z-\alpha_2)\;.\;.\;.\;\vartheta_0(z-\alpha_m)}{\vartheta_0(z-\beta_1)\,\vartheta_0(z-\beta_2)\;.\;.\;.\;\vartheta_0(z-\beta_m)}$$

Man erweitere jetzt diesen Bruch mit der Grösse

$$\prod_{\sigma=1}^{m} \vartheta_0\left(z-\frac{1}{\lambda}-\beta_\sigma\right).\,\vartheta_0\left(z-\frac{2}{\lambda}-\beta_\sigma\right)\;.\;.\;.\;\vartheta_0\left(z-\frac{\lambda-1}{\lambda}-\beta_\sigma\right)$$

wobei λ eine ganz beliebige ganze Zahl bedeutet.

Dann wird der Nenner von $F(z)$ die Gestalt annehmen:

$$k^m\,.\,\vartheta_0(\lambda z-\lambda\beta_1,\lambda\tau)\,.\,\vartheta_0(\lambda z-\lambda\beta_2,\lambda\tau)\;.\;.\;.\;\vartheta_0(\lambda z-\lambda\beta_m,\lambda\tau)$$

wo k jene Constante bedeutet, die in der Formel

$$\vartheta_0(z-\beta_\sigma)\,.\,\vartheta_0\left(z-\frac{1}{\lambda}-\beta_\sigma\right)\;.\;.\;.\;\vartheta_0\left(z-\frac{\lambda-1}{\lambda}-\beta_\sigma\right) = k\,.\,\vartheta_0(\lambda z-\lambda\beta_{\sigma 2},\lambda\tau)$$

auftritt. Der Zähler von $F(z)$ hat durch die vorgenommene Operation die Gestalt angenommen

$$\prod_{\sigma=1}^{m} \vartheta_0(z-\alpha_\sigma)\,.\,\vartheta_0\left(z-\frac{1}{\lambda}-\beta_\sigma\right)\;.\;.\;.\;\vartheta_0\left(z-\frac{\lambda-1}{\lambda}-\beta_\sigma\right)$$

Aber jedes einzelne Teilproduct, welches unter dem Zeichen Π vorkommt, ist eine ganze Thetafunction vom Grade λ und kann mit leichter Mühe verwandelt werden in

$$\sum_{k=0}^{\lambda-1} c_k^{(\sigma)} \cdot e^{-2\pi i k z} \cdot \vartheta_0(\lambda z + \lambda a_\sigma - k\tau, \lambda\tau)$$

wobei a_σ eine aus den Grössen α_σ und β_σ linear zusammengesetzte Grösse ist und die Bestimmung der $c_k^{(\sigma)}$ sich mit leichtester Mühe bewerkstelligen lässt [1]). Jedenfalls ergiebt sich aus dem bisherigen ohne weiteres, dass die Function $F(z)$, von unwesentlichen Factoren abgesehen gleichwertig ist einer Summe von $m \cdot \lambda$ Functionen $\varphi(z)$ von der Form

$$\varphi(z) = \frac{\vartheta_0(\lambda z + \lambda A_1, \lambda\tau) \cdot \vartheta_0(\lambda z + \lambda A_2, \lambda\tau) \ldots \vartheta_0(\lambda z + \lambda A_m, \lambda\tau)}{k^m \vartheta_0(\lambda z - \lambda\beta_1, \lambda\tau) \cdot \vartheta_0(\lambda z - \lambda\beta_2, \lambda\tau) \ldots \vartheta_0(\lambda z - \lambda\beta_m, \lambda\tau)}$$

wo die A leicht zu bestimmende Constante sind. Andererseits aber kann als bekannt vorausgesetzt werden, dass eine Function $\varphi(z)$, wie schon Hermite gefunden hat, unter der Voraussetzung, dass alle β im Nenner von einander verschieden sind, sich durch eine Summe

$$\sum_{\alpha=1}^{m} \sigma\, C_\alpha \frac{\vartheta_0(\lambda z - \lambda B_\sigma, \lambda\tau)}{\vartheta_0(\lambda z - \lambda\beta_\sigma, \lambda\tau)}$$

darstellen lässt, wobei die C_σ und B_σ in einfachster Weise zu bestimmen sind. Hiermit ergiebt sich folgendes Schlussresultat:

„Die Function $F(z)$ in (2) kann, von unwesentlichen Factoren „wiederum abgesehen, durch eine Summe von Functionen

$$\frac{\vartheta_0(\lambda z - \lambda B_\sigma, \lambda\tau)}{\vartheta_0(\lambda z - \lambda\beta_\sigma, \lambda\tau)} \cdot \;\ldots \tag{3}$$

„dargestellt werden."

Wie die Bestimmung der Factoren, mit denen die einzelnen Summanden (3) behaftet sind, sich am praktischsten ausführen lässt, und wie die Anzahl der Summanden (3) durch Zusammenfassung einzelner sich verringern lässt, sind Fragen, die von Interesse sind, weil sie über die praktische Anwendbarkeit der unten folgenden Methode entscheiden. Aber über den Rahmen dieser Arbeit würde die ausführliche Beantwortung dieser Fragen hinausgehen.

---

1) Vergl. „Math. Annalen" XXX, pag. 518.

Wenden wir uns jetzt den doppelperiodischen Functionen dritter Art zu, so können die sämtlichen Functionen dieser Art bekanntlich als Quotienten zweier Producte von Thetafunctionen dargestellt werden [1]), haben also die Form: (von einem unwesentlichen Factor abgesehen)

$$(4) \quad F(z) = \frac{\vartheta_0(z-\alpha_1)\,\vartheta_0(z-\alpha_2)\;.\;.\;.\;\vartheta_0(z-\alpha_p)}{\vartheta_0(z-\beta_1)\,\vartheta_0(z-\beta_2)\;.\;.\;.\;\vartheta_0(z-\beta_{p+\mu})}$$

wobei $\mu \gtrless 0$ sein kann, d. h., wo die Zahl der Nullstellen in einem Periodenparallelogramm $\gtrless$ die Zahl der Pole sein kann. Es soll ferner, wie in den Krause'schen Arbeiten, noch angenommen werden, dass die β im Nenner von $F(z)$ sämtlich von einander verschieden sind, indem für den entgegengesetzten Fall auf eine Arbeit des Herrn Appell [2]) verwiesen wird.

1) $\mu > 0$, oder $\mu = m$,

wenn m eine ganze positive Zahl bedeutet.

Es werde statt der in Rede stehenden Function $F(z)$ die Function

$$\psi(z) = F(z)\,.\,\vartheta_0(mz - m\beta,\; m\tau)$$

betrachtet, wo β eine ganz beliebig gewählte Constante bedeutet. Die Function $\psi(z)$ ist, wie man ohne weiteres einsieht, eine doppelperiodische Function zweiter Art, kann also nach dem obigen, wenn die beliebige Zahl $\lambda = m$ angenommen wird, ersetzt werden durch eine Reihe von Summanden von der Form

$$C_\sigma \cdot \frac{\vartheta_0(mz - mB_\sigma,\; m\tau)}{\vartheta_0(mz - m\beta_\sigma,\; m\tau)}$$

Hieraus folgt, dass die Function $F(z)$ linear in eine Summe von Primfunctionen zerlegt werden kann von der Form

$$\frac{\vartheta_0(mz - mB_\sigma,\; m\tau)}{\vartheta_0(mz - m\beta_\sigma,\; m\tau)\;.\;\vartheta_0(mz - m\beta,\; m\tau)}$$

oder, was auf dasselbe hinausläuft: In dem Falle $\mu > 0$ kann unser ganzes Problem darauf reducirt werden, die Function

1) Vgl. z. B. Appell „Sur les fonctions doublement périodiques de troisième espèce." Annales de l'Ecole Norm. Supér. IIIème série, tomes I. II, oder die Doctordissertation des Verfassers, Rostock 1889, pag. 10.

2) Vgl. Appell a. a. O.

(5a) $$P_1(z) = \frac{\vartheta_0(z-a)}{\vartheta_0(z-b) \cdot \vartheta_0(z)}$$

in trigonometrische Reihen zu entwickeln. Daher soll die Function $P_1(z)$ die erste Primfunction genannt werden.

2) $\mu < 0$, oder $\mu = -m$.

In diesem Falle möge statt der Function $F(z)$ in (4) die Function

$$F(z) \cdot \frac{1}{\vartheta_0(mz - m\beta, m\tau)}$$

betrachtet werden. Dieselbe ist wieder eine doppelperiodische Function zweiter Art. Ebenso, wie vorhin, ergiebt sich, dass $F(z)$ in eine Summe von Functionen zerlegt werden kann von der Gestalt

$$\frac{\vartheta_0(mz - m B_\sigma, m\tau) \cdot \vartheta_0(mz - m\beta, m\tau)}{\vartheta_0(mz - m\beta_\sigma, m\tau)}$$

Hieraus folgt leicht, dass als zweite Primfunction die Function

(5b) $$P_2(z) = \frac{\vartheta_0(z-a) \cdot \vartheta_0(z-b)}{\vartheta_0(z)}$$

angesehen werden kann. Es soll jetzt von den beiden Primfunctionen in (5a) und (5b), die etwas einfacher sind, als die in (1a) und (1b) angegebenen Krause'schen, zuerst die Function $P_1(z)$ behandelt werden und dann gezeigt werden, dass die Entwickelung von $P_2(z)$ sich auf diejenige von $P_1(z)$ zurückführen lässt.

II. Erste trigonometrische Entwickelung von $P_1(z)$.

Weil die Function $P_1(z)$ nur ein Specialfall der Krause'schen Primfunction (1b) ist, so müssen natürlich alle Resultate, die Herr Krause für seine Primfunction gefunden hat [1]), auf $P_1(z)$ sich durch Specialisirung ohne weiteres übertragen lassen. Es soll hier die trigonometrische Entwickelung von $P_1(z)$ nach einer Methode gegeben werden, die sich in den Krause'schen Arbeiten noch nicht findet. Diese Methode beruht auf den Untersuchungen von Herrn Appell am mehrfach angegebenen Orte, dürfte sich aber vor jenen Untersuchungen durch grössere Allgemeinheit auszeichnen.

In der Ebene einer Variablen z denke man sich ein Paralle-

1) Vgl. „Math. Annalen" XXXV, pag. 577 ff.

logramm construirt auf folgende Weise: Man ziehe die Linie $(0, \tau)$, [wobei τ, wie schon vorhin, nach Jacobischer Bezeichnung den Parameter der Thetafunctionen bedeutet] und zu dieser Linie zwei Parallele durch die Punkte $-\frac{1}{2}$, $+\frac{1}{2}$; ferner ziehe man durch die Punkte $+n\tau$ und $-n\tau$ (n eine ganze Zahl) Parallele zur reellen Axe der x-Ebene. z möge jetzt ein ganz beliebiger, aber fester Punkt im Innern des eben definirten Parallelogramms sein, während x_0 einen beliebigen, aber festen Punkt der Linie $(-\frac{1}{2}, +\frac{1}{2})$ bezeichnen möge. Endlich möge noch angenommen werden, worin eine wesentliche Beschränkung nicht besteht, dass auf den durch $-n\tau$ und $+n\tau$ gezogenen Parallelen ein singulärer Punkt von $P_1(z-x)$ nicht liegt. Nach diesen Festsetzungen bilde man sich jetzt eine Function $R(x)$, die folgende Eigentümlichkeiten besitzt:

1) $R(x+1) = R(x)$.

2) $x = 0$ sei für $R(x)$ eine ausserwesentliche Singularität erster Ordnung, R_0 sei das Residuum von $R(x)$ für $x = 0$.

3) Ausser $x = 0$ habe $R(x)$ im Innern unseres Parallelogrammes keinen weiteren singulären Punkt.

4) $R(x_0 \pm n\tau)$ möge, wenn n über alle Grenzen hinaus wächst dem absoluten Betrage nach immer unterhalb einer endlichen Grenze bleiben, oder es möge doch wenigstens

$$e^{2n\pi i(a-b+z-x_0)} \cdot q^{n^2} \cdot R(x_0 \pm n\tau)$$

mit wachsendem n unendlich klein werden.

Nach erfolgter Auswahl einer solchen Function $R(x)$ bilde man

$$(6) \qquad \int P_1(z-x) \cdot R(x) \cdot dx$$

erstreckt über den Umfang unseres Parallelogramms. Da $P_1(z-x) \cdot R(x)$, wie sofort zu ersehen, die Periode 1 hat, so werden sich die Integrale längs der beiden Seiten $(-\frac{1}{2}-n\tau, -\frac{1}{2}+n\tau)$ und $(+\frac{1}{2}-n\tau, +\frac{1}{2}+n\tau)$ gegenseitig fortheben. Ferner wird die Function $P_1(z-x) \cdot R(x)$ in dem Punkte $x_0 - n\tau$ den Wert annehmen

$$(7) \qquad \frac{\vartheta_0(z-x_0+n\tau-a)}{\vartheta_0(z-x_0+n\tau-b) \cdot \vartheta_0(z-x_0+n\tau)} \cdot R(x_0-n\tau)$$

$$= \frac{(-1)^n}{i} \cdot e^{2n\pi i(a-b+z-x_0)} \cdot q^{n^2} \cdot P_1(z-x_0) \cdot R(x_0-n\tau)$$

Aber dieser Ausdruck wird vermöge der vierten Voraussetzung über $R(x)$ mit wachsendem n dem absoluten Betrage nach kleiner als eine beliebig kleine Grösse gemacht werden können. Da der Ausdruck (7) aber nichts anderes ist, als ein Element des Integrals (6) längs der Seite $(-\frac{1}{2}-n\tau, +\frac{1}{2}-n\tau)$, so folgt, dass mit unendlich grossem n das Integral längs dieser Seite unendlich klein wird. Ganz dasselbe gilt von der Seite $(-\frac{1}{2}+n\tau, +\frac{1}{2}+n\tau)$. Es ergiebt sich, dass das ganze Integral (6) mit unendlich grossem n sich der Null beliebig nähert.

Dasselbe Integral ist aber auch gleich $2\pi i$mal der Summe der Residuen von $P_1(z-x)$. $R(x)$ in Bezug auf alle Pole im Innern des Parallelogramms. Also muss die Summe dieser Residuen auch gleich null sein. Wir haben nun folgende Pole zu betrachten:

1) $x = 0$. Das Residuum von $R(x)$ ist hier R_0, also das gesamte Residuum

$$R_0 \, . \, P_1(z) \tag{8}$$

2) $x = z-(n+\frac{1}{2})\tau \qquad [n = -\infty \, . \, . \, . +\infty]$

Das Residuum von $P_1(z-x)$ in Bezug auf diesen Punkt wird

$$-\frac{\vartheta_0(-a+(n+\frac{1}{2})\tau)}{\vartheta_0(-b+(n+\frac{1}{2})\tau) \, . \, i \, . \, (-1)^n \, . \, q^{-(n+\frac{1}{2})^2} \, . \, \vartheta_1'}$$

$$= i(-1)^n \, . \, e^{(2n+1)\pi i(a-b)} \, . \, q^{(n+\frac{1}{2})^2} \, . \, \frac{\vartheta_1(a)}{\vartheta_1(b) \, . \, \vartheta_1'} \tag{9}$$

Also wird das Residuum von $P_1(z-x) \, . \, R(x)$:

$$\frac{i \, . \, (-1)^n \vartheta_1(a)}{\vartheta_1' \, . \, \vartheta_1(b)} \, . \, e^{(2n+1)\pi i(a-b)} \, . \, q^{(n+\frac{1}{2})^2} \, . \, R(z-(n+\tfrac{1}{2})\tau) \tag{10}$$

3) $x = z-b-(n+\frac{1}{2})\tau \qquad [n = -\infty \, . \, . \, . +\infty]$

In Bezug auf diesen Pol wird das Residuum von $P_1(z-x)$

$$-\frac{\vartheta_0(b-a+(n+\frac{1}{2})\tau)}{i(-1)^n q^{-(n+\frac{1}{2})^2} \vartheta_1' \, . \, \vartheta_0(b+(n+\frac{1}{2})\tau)}$$

$$= \frac{i(-1)^{n-1} \vartheta_1(a-b) \, . \, e^{(2n+1)a\pi i} \, . \, q^{(n+\frac{1}{2})^2}}{\vartheta_1' \, . \, \vartheta_1(b)} \tag{11}$$

Also wird das Residuum von $P_1(z-x) \, . \, R(x)$

$$\frac{i(-1)^{n-1}}{\vartheta_1'} \, . \, \frac{\vartheta_1(a-b)}{\vartheta_1(b)} \, . \, e^{(2n+1)a\pi i} \, . \, q^{(n+\frac{1}{2})^2} \, . \, R(z-b-(n+\tfrac{1}{2})\tau) \tag{12}$$

Indem jetzt die Summe der Ausdrücke (8), (10), (12) gleich 0 gesetzt wird, ergiebt sich das Resultat

$$-R_0 \cdot P_1(s) = \frac{i}{\vartheta_1' \cdot \vartheta_1(b)} \cdot$$

$$\left\{\begin{aligned} &\vartheta_1(a) \sum_{n=-\infty}^{+\infty} (-1)^n e^{(2n-1)\pi i(a-b)} \cdot q^{(n+\frac{1}{2})^2} \cdot R(s-(n+\tfrac{1}{2})\tau) \\ &+\vartheta_1(a-b \sum_{-\infty}^{+\infty} (-1)^{n-1} \cdot e^{(2n+1)\pi i a} \cdot q^{(n+\frac{1}{2})^2} \cdot \\ &\qquad\qquad \cdot R(z-b-(n+\tfrac{1}{2})\tau) \end{aligned}\right\} \qquad (13)$$

Hiermit wäre eine trigonometrische Entwickelung für die Function $P_1(s)$ gefunden, wenn es gelingen sollte, wirklich trigonometrische Functionen $R(x)$ aufzufinden, die den oben angegebenen Bedingungen genügen. Man sieht aber leicht, dass eine ganze Reihe von Functionen den Bedingungen genügt, z. B. die Functionen

$$\frac{1}{1-e^{2\pi i x}},\quad \frac{e^{3\pi i x}}{1-e^{2\pi i x}},\quad \frac{e^{2k\pi i x}}{1-e^{2\pi i x}} \quad \text{u. s. w.}$$

Um z. B. mit den Resultaten des Herrn Krause in Uebereinstimmung zu kommen [1]), wähle man

$$R(x) = \frac{e^{2\pi i x}}{1-e^{2\pi i x}};\quad R_0 = \frac{1}{-2\pi i}$$

Zugleich aber sieht man, dass die eingeführte Function $R(x)$ nichts anders ist, als das Functionselement, aus dem die sogenannten „Restfunctionen“ [2]) des Herrn Krause sich in einfacher Weise herleiten lassen. Endlich lehren die obigen Betrachtungen, dass es auf die mannigfachste Weise möglich ist, eine Function $R(x)$ zu wählen, also auch trigonometrische Entwickelungen von $P_1(s)$ zu geben.

III. Zweite trigonometrische Entwickelung von $P_1(s)$.

Man weiss aus der Theorie der bestimmten Integrale, dass man ansetzen darf:

---

1) Vgl. „Mathem. Annalen“ XXXV, pag. 578 ff.

2) Vgl. „Mathem. Annalen“ XXX, pag. 520, § 2.

$$P_1(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} b_{2n} \cdot e^{2n\pi i z}$$

wo dann

$$b_{2n} = \int_{-\frac{1}{2}}^{+\frac{1}{2}} P_1(z) \cdot e^{-2n\pi i z} \cdot dz$$

ist. Letzteres Integral wird folgendermassen gelöst: Man bilde das Integral

$$\int P_1(z) e^{-2n\pi i z} \cdot dz$$

erstreckt über den Umfang des Parallelogramms

$$(-\tfrac{1}{2},\ +\tfrac{1}{2},\ +\tfrac{1}{2} - r\tau,\ -\tfrac{1}{2} - r\tau)$$

Das Integral längs der Seite $(+\frac{1}{2} - r\tau,\ -\frac{1}{2} - r\tau)$ geht durch die Substitution $z - r\tau$ an Stelle von z über in

$$\int_{+\frac{1}{2}}^{-\frac{1}{2}} q^{2nr} \cdot P_1(z - r\tau) \cdot e^{-2n\pi i z} \cdot dz$$

$$= \int_{+\frac{1}{2}}^{-\frac{1}{2}} \frac{(-1)^r}{i} \cdot e^{-2r\pi i(a+z-b)} \cdot q^{r^2+2nr} \cdot P_1(z) \cdot e^{-2n\pi i z} \cdot dz$$

D. h. die Function unter dem Integralzeichen wird mit wachsendem r dem absoluten Betrage nach beliebig klein gemacht werden können. Es folgt genau, wie oben, dass das ganze Integral

$$\int P_1(z) \cdot e^{-2n\pi i z} \cdot dz$$

für $r = \infty$ den Wert

$$\int_{-\frac{1}{2}}^{+\frac{1}{2}} P_1(z) \cdot e^{-2n\pi i z} \cdot dz$$

annimmt, also gleich b_{2n} wird. Andererseits aber ist dasselbe Integral gleich der Summe der Residuen von $P_1(z) \cdot e^{-2n\pi i z}$, multiplicirt mit $-2\pi i$ (das Minuszeichen wegen der Richtung, in der die

Kreisintegrale um die Pole zu nehmen sind). Nun sind die Residuen von $P_1(z)$ bereits bekannt. Vgl. die Ausdrücke (9) und (11). Folglich wird das geschlossene Integral

$$\int P_1(z) \, . \, e^{-2n\pi i z} \, dz$$

um den Pol

$$z = -(r + \tfrac{1}{2})\tau$$

(14) $$2\pi \frac{\vartheta_1(a)}{\vartheta_1' \vartheta_1(b)} (-1)^r \, . \, e^{-(2r+1)(a-b)\pi i} \, . \, q^{(r+\frac{1}{2})^2} \, . \, q^{(2r+1)n}$$

Für den Pol

$$z = b - (r + \tfrac{1}{2}) \tau$$

wird unser Integral genau so gefunden, und zwar

(15) $$2\pi \frac{\vartheta_1(b-a)}{\vartheta_1' \, . \, \vartheta_1(b)} \, . \, (-1)^r \, . \, e^{-(2r+1)a\pi i} \, . \, q^{(r+\frac{1}{2})^2} \, . \, q^{(2r+1)n} \, . \, e^{-2n\pi i b}$$

Indem man über die Ausdrücke (14) und (15) die Summe nach r von 0 bis $+\infty$ nimmt, erhält man die gesuchte Formel für unsere Coefficienten:

(16) $$b_{2n} = \frac{2\pi}{\vartheta_1' \, . \, \vartheta_1(b)} \, .$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \vartheta_1(a) \sum\limits_{r=0}^{+\infty} (-1)^r e^{-(2r+1)(a-b)\pi i} \, . \, q^{(r+\frac{1}{2})^2 + (2r+1)n} \\ + \vartheta_1(b-a) \sum\limits_{0}^{\infty} (-1)^r \, . \, e^{-(2r+1)a\pi i} \, . \, q^{(r+\frac{1}{2})^2 + (2r+1)n} \, . \, e^{-2n\pi i b} \end{array} \right\}$$

Für $b = \frac{1}{2}$ ergiebt sich hieraus genau dieselbe Formel, die Herr Krause gefunden hat [1]).

Es ist übrigens leicht zu zeigen, dass die so gefundene trigonometrische Entwickelung auf die obige in (13) gefundene ohne Mühe zurückgeführt werden kann.

---

1) Vgl. „Mathem. Annalen" XXXV, pag. 585, Formel (7), worin sich jedoch ein Druckfehler findet, indem rechts vom Gleichheitszeichen $\frac{2i}{m\,\Theta_1'}$ statt $2i$ zu setzen ist.

IV. Trigonometrische Entwickelung von $P_2(z)$.

Indem mau in (13) die Fnnction

$$R(x) = \frac{e^{2\pi i x}}{1 - e^{2\pi i x}}, \quad \text{also} \quad R_0 = -\frac{1}{2\pi i}$$

annimmt, erhält mau folgende Formel, wenn noch heide Seiton der Gleichnng mit $\vartheta_1(b)$ multiplicirt werden:

$$(17) \quad \frac{\vartheta_0(z-a) \,.\, \vartheta_1(b)}{\vartheta_0(z-b) \,.\, \vartheta_0(z)} = -\frac{2\pi}{\vartheta_1{}'} \,.\, \left\{ \begin{array}{l} \vartheta_1(a) \,.\, \sum\limits_{-\infty}^{+\infty}{}_n (-1)^n \,.\, \dfrac{e^{(2n+1)\pi i(a-b)} \,.\, q^{(n+\frac{1}{2})^2} \,.\, e^{2\pi i z}}{q^{2n+1} - e^{2\pi i z}} \\[2ex] + \vartheta_1(b-a) \,.\, \sum\limits_{-\infty}^{+\infty}{}_n (-1)^n \,.\, \dfrac{e^{(2n+1)\pi i a} \,.\, q^{(n+\frac{1}{2})^2} \,.\, e^{2\pi i z}}{e^{2\pi i b} \,.\, q^{2n+1} - e^{2\pi i z}} \end{array} \right\}$$

Wenn in dieser Formel die Constante $b = z - \beta$ angenommen wird, was ohne weitores erlauht ist, nnd wenn ferner der Symmetrie wegen für a noch α geschriehen wird, so erhält mau folgende Formel:

$$(18) \quad \frac{\vartheta_0(z-\alpha) \,.\, \vartheta_1(z-\beta)}{\vartheta_0(\beta) \,.\, \vartheta_0(z)} = -\frac{2\pi}{\vartheta_1{}'} \,.\, \left\{ \begin{array}{l} \vartheta_1(\alpha) \,.\, \sum\limits_{-\infty}^{+\infty}{}_n (-1)^n \,.\, \dfrac{e^{(2n+1)\pi i(\alpha+\beta)} \,.\, q^{(n+\frac{1}{2})^2} \,.\, e^{-(2n-1)\pi i z}}{q^{2n+1} - e^{2\pi i z}} \\[2ex] + \vartheta_1(z-\alpha-\beta) \sum\limits_{-\infty}^{+\infty}{}_n (-1)^n \,.\, \dfrac{e^{(2n+1)\pi i \alpha} \,.\, q^{(n+\frac{1}{2})^2}}{e^{-2\pi i \beta} \,.\, q^{2n+1} - 1} \end{array} \right\}$$

Aber aus dieser Gleichung wird sich nnmittelbar die Eutwicklung von $P_2(z)$ orgeben, wenn man nur $b - \frac{\tau}{2}$ an Stelle von β sotzt. Das Resnltat wirklich hierherzusetzen, ist wenig von Interesso. Hiermit ist denn auch die Entwickeluug von $P_2(z)$ gefnnden, u. zw. ohne dass irgend welche neuen Rechnnngen nötig gewesen wäron. Zugleich aher zeigt die Formel (18), dass die zweite $\sum\limits_{-\infty}^{+\infty} n$ einen von z ganz unabhängigen Wert hat, also eiue Constante ist, wie es nach den Untersuchungen von Horrn Krause auch der Fall sein muss. Nach dieser Methode haben wir aber für diese Constante gleich eine Darstellung und zwar die Form

$$\sum_{-\infty}^{+\infty} n\,(-1)^n \cdot \frac{e^{(2n+1)\pi i\alpha} \cdot q^{(2n+1)^2}}{e^{-2\pi i\beta} \cdot q^{2n+1}-1}$$

gefnnden, während bei Herrn Kranse die Bestimmnng der Constante noch eine nene Rechnnng erfordert.

Es verdient übrigens noch bemerkt zn werden, dass man bei Zngrundelegnng der Formel (16) für die Coefficienten der trigonometrischen Entwicklnng von $P_1(z)$ zn einer andern, wenigstens der Form nach von Gleichnng (18) verschiedenen trigonometrischen Entwicklnng von

$$\frac{\vartheta_0(z-\alpha) \cdot \vartheta_1(z-\beta)}{\vartheta_0(\beta)\,\vartheta_0(z)}$$

gekommen wäre, die sich jedoch sehr leicht auf die Form in (18) zurückführen lässt.

V. Schlussbemerkung, betreffend die doppelperiodischen Functionen zweiter und erster Art.

Es kann nicht verhehlt werden, dass die Zngrundelegung der beiden Primfnnctionen (4a) nnd (1b), möge sie anch im übrigen nicht so praktisch sein, wie die oben entwickelte Methode, doch den einen Vorteil bietet, dass aus der Entwicklnng der Fnnction (1a), wenn $m=1$ gesetzt wird, direct die Entwicklnng der Primfnnction der doppelperiodischen Fnnctionen zweiter Art gewonnen werden kann, was bei Zugrnndelegung der Primfnnctionen $P_1(z)$ nnd $P_2(z)$ dem Verfasser nicht gelnngen ist, anch wol schwerlich angeht. Indessen sind die doppelperiodischen Fnnctionen zweiter Art, oder, woranf es hier nur ankommt, deren Primfunctionen

$$\frac{\vartheta_0(z+\alpha)}{\vartheta_0(z)}$$

anf sehr einfache Weise trigonometrisch zn entwickeln. Es möge hier eine Methode ihrer Entwicklnng gegeben werden, welche sich anch nnmittelbar anf die gemeinen elliptischen Fnnctionen anwenden lässt nnd vor den gewöhnlich in den Lehrbüchern der Theorie der elliptischen Functionen [1]) gegebenen Methoden sich durch grosse Kürze auszeichnet.

---

1) So z. B. in den Lehrbücbern von Königsberger nnd von Briot und Bouqnet, die dem Verfasser momentan allein zur Hand sind.

Man kann ansetzen

$$\frac{\vartheta_0(z+\alpha)}{\vartheta_0(z)} = \sum_{-\infty}^{+\infty} e_m \cdot e^{2m\pi i z}$$

wobei

$$a_m = \int_{-\frac{1}{2}}^{+\frac{1}{2}} \frac{\vartheta_0(z'+\alpha)}{\vartheta_0(z)} \cdot e^{-2miz} \cdot dz$$

ist. Zur Berechnung dieses Integrals bilde man das Integral

(19) $$\int \frac{\vartheta_0(z+\alpha)}{\vartheta_0(z)} \cdot e^{-2m\pi i z} \cdot dz$$

erstreckt über den Umfang des Parallelogramms

$$(-\tfrac{1}{2}, \ +\tfrac{1}{2}, \ +\tfrac{1}{2}+\tau, \ -\tfrac{1}{2}+\tau)$$

„aber **nicht**, wie es gewöhnlich geschieht, über den Umfang eines „unendlich langen Parallelogramms erstreckt". Das Integral (19) zerfällt in 4 Teile, entsprechend den 4 Parallelogrammseiten. Man sieht sofort, dass die den Seiten

$$(+\tfrac{1}{2}, \ +\tfrac{1}{2}+\tau) \quad \text{und} \quad (-\tfrac{1}{2}, \ -\tfrac{1}{2}+\tau)$$

entsprechenden Teilintegrale sich gegenseitig zerstören. Also wird das gesamte Integral gleich

(20) $$\int_{-\frac{1}{2}}^{+\frac{1}{2}} \frac{\vartheta_0(z+\alpha)}{\vartheta_0(z)} \cdot e^{-2m\pi i z} \cdot dz + \int_{+\frac{1}{2}+\tau}^{-\frac{1}{2}+\tau} \frac{\vartheta_0(z+\alpha)}{\vartheta_0(z)} \cdot e^{-2m\pi i z} \cdot dz$$

In dem letzten Integral möge $z = y + \tau$ gesetzt werden; dann geht es über in

$$\int_{\frac{1}{2}}^{-\frac{1}{2}} \frac{\vartheta_0(y+\alpha+\tau)}{\vartheta_0(y+\tau)} \cdot e^{-2m\pi i y} \cdot e^{-2m\pi i \tau} \cdot dy$$

$$= e^{-2\pi i(\alpha+m\tau)} \cdot \int_{\frac{1}{2}}^{-\frac{1}{2}} \frac{\vartheta_0'(y+\alpha)}{\vartheta_0(y)} \cdot e^{-2m\pi i y} \cdot dy$$

$$= -e^{-2\pi i(\alpha+m\tau)} \cdot a_m$$

Der ganze Ausdruck (20) geht also über in

(21) $$\left[1 - e^{-2m\pi i(\alpha+m\tau)}\right] a_m$$

Andererseits ist aber das Integral (19) gleich dem geschlossenen Integrale um den Punkt $\frac{\tau}{2}$, den einzigen Unstetigkeitspunkt von

$$\frac{\vartheta_0(z+\alpha)}{\vartheta_0(z)} \cdot e^{-2m\pi i z}$$

in dem Parallelogramm. Nun ist aber, wie man leicht sieht, das Residuum unserer Function im Punkte $z = \frac{\tau}{2}$ gleich

$$\frac{\vartheta_0\left(a+\frac{\tau}{2}\right) \cdot e^{-m\pi i\tau}}{\vartheta_0'\left(\frac{\tau}{2}\right)} \tag{22}$$

Aber aus der Relation

$$\vartheta_0\left(u+\frac{\tau}{2}\right) = i\,\vartheta_1(u) \cdot e^{-\frac{1}{2}\left(2u+\frac{\tau}{2}\right)\pi i}$$

ergiebt sich zunächst, dass

$$\vartheta_0\left(a+\frac{\tau}{2}\right) = i\,\vartheta_1(a) \cdot e^{-\frac{1}{2}\left(2a+\frac{\tau}{2}\right)\pi i}$$

ist, und dann durch Differentiation

$$\vartheta_0'\left(u+\frac{\tau}{2}\right) = i\,e^{-\frac{1}{2}\left(2u+\frac{\tau}{2}\right)\pi i} \cdot [\vartheta_1'(u) - \pi i\,\vartheta_1(u)]$$

also

$$\vartheta_0'\left(\frac{\tau}{2}\right) = i \cdot e^{-\frac{1}{2}\cdot\frac{\tau}{2}\pi i} \cdot \vartheta_1'$$

Der Ausdruck (22) kann also auch geschrieben werden

$$\frac{i\,\vartheta_1(a) \cdot e^{-\frac{1}{2}\left(2a+\frac{\tau}{2}\right)\pi i} \cdot e^{-m\pi i\tau}}{i\,\vartheta_1' \cdot e^{-\frac{1}{2}\cdot\frac{\tau}{2}\pi i}} = \frac{\vartheta_1(a)}{\vartheta_1'} \cdot e^{-(a+m\tau)\pi i}$$

Folglich wird das gesuchte geschlossene Integral um den Punkt $\frac{\tau}{2}$

$$2\pi i \cdot \frac{\vartheta_1(a)}{\vartheta_1'} \cdot e^{-(a+m\tau)\pi i}$$

Und dieser Ausdruck muss gleich (21) sein, d. h. für a_m selbst findet sich

$$a_m = 2\pi i \frac{\vartheta_1(a)}{\vartheta_1'} \cdot \frac{e^{-(a+m\tau)\pi i}}{1-e^{-2(a+m\tau)\pi i}} = \pi \cdot \frac{\vartheta_1(a)}{\vartheta_1'} \cdot \frac{1}{\sin \pi(a+m\tau)}$$

Es ergiebt sich also

$$\frac{\vartheta_0(z+a)}{\vartheta_0(z)} = \pi \frac{\vartheta_1(a)}{\vartheta_1'} \cdot \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \cdot \frac{e^{2m\pi i z}}{\sin \pi (a+m\tau)}$$

II.

Ueber einige Sätze aus der elementaren Raumgeometrie.

Von

Heinrich Seipp
in Nienburg a. d. Weser.

Da die im folgenden (unter II. und III.) angestellten raumgeometrischen Betrachtungen sich auf gewisse entsprechende planimetrische Sätze stützen, so sind diese den ersteren (unter I.) vorausgeschickt.

Definitionen. Unter einem convexen ebenen Vieleck wird ein solches verstanden, welches nur concave oder ausspringende Winkel hat. — Als convexe Ecke wird eine solche bezeichnet, welche nur concave oder ausspringende Flächenwinkel und ebensolche Kantenwinkel hat, oder welche mit einer jeden, sämtliche Kanten treffenden, Ebene als Schnittfigur ein convexes Vieleck ergibt. — Ein convexes Polyeder heisse ein solches, welches nur convexe Ecken und demgemäss nur convexe Vielecke als Begrenzungsflächen besitzt, oder welches mit irgend einer, nicht bloss einen Eckpunkt enthaltenden, Ebene als Schnittfigur ein convexes Vieleck (unter Umständen auch ein Dreieck) ergibt.

I.

Es seien in der Figur: a, b, c, d, e, f und a', b', c', d', e', f', g', h' die Seiten zweier convexen Vielecke $ABCDEF$ oder i und $A'B'C'D'E'F'G'H'$ oder a, von welchen das letztere das

erstere vollständig umschliesst, so dass also keinerlei Ueberschneidungen von Seiten der beiden Polygone noch auch der fortgesetzt gedachten Seiten eines und desselben Vielecks stattfinden. Man verlängere die Seiten des umschlossenen oder „inneren" Vielecks i einseitig (jede über den mit der folgenden Seite gemeinsamen Eckpunkte hinaus) bis zum Schnitt mit dem Umfang des „äusseren" Polygons a. Die dabei sich ergebenden Verlängerungsstrecken der Seiten a, b, c, d, e, f eisen bezüglich a_1, b_1, c_1, d_1, e_1, f_1. Durch ihre Endpunkte L, M, N, P, Q, R werden die Seiten a', b', c', e', g', h' des äusseren Vielecks a in Teilstrecken zerlegt, welche der Reihe nach mit a_1' und a_2', b_1' und b_2', c_1' und c_2', e_1' und e_2', g_1' und g_2', h_1' und h_2' bezeichnet sein mögen. Der von den beiden Vielecken begrenzte ringartige Teil der Ebene wird durch die beschriebene Construction in ebensoviele convexe Vielecke geteilt, als das innere Polygon Seiten hat (im vorliegenden Beispiel in 6) und es lässt sich auf jedes dieser Teilvielecke der bekannte Satz (1) anwenden: „Eine Seite eines jeden (nicht nur eines convexen Vielecks, auch die grösste Seite, ist stets kleiner als die Summe der übrigen Seiten". Mithin ergeben sich die folgenden Ungleichungen:

$$f_1 + a_2' + b_1' > a + a_1$$
$$a_1 + b_2' + c_1' > b + b_1$$
$$b_1 + c_2' + d' + e_1' > c + c_1$$
$$c_1 + e_2' + f' + g_1' > d + d_1$$
$$d_1 + g_2' + h_1' > e + e_1$$
$$e_1 + h_2' + a_1' > f + f_1$$

Werden dieselben addirt und im Ergebniss die gleichen Grössen (a_1, b_1, c_1 . . . f_1) beiderseits des Zeichens $>$ gestrichen, die zu Seiten (a', b', c' . . . h') des äusseren Vielecks sich ergänzenden Grössen (a_1' und a_2', b_1' und b_2', c_1' und c_2' . . . h_1' und h_2') vereinigt, so folgt

$$a' + b' + c' + d' + e' + f' + g' + h' > a + b + c + d + e + f$$

oder in symbolischer Schreibweise für die Vielecksseitensummen:

1) $$\Sigma l_a > \Sigma l_i$$

Es ist leicht ersichtlich, dass das vorstehende Verfahren zur Vergleichung der Grössen Σl_a und Σl_i unabhängig ist von der sonstigen Beschaffenheit der beiden Vielecke, dass es auch dann ungeändert Anwendung finden kann, wenn die Seitenzahl von i = derjenigen von a ist oder dieselbe übertrifft. Immer lässt sich in ähnlicher

Weise wie oben eine Zerlegung der von den beiden Polygonen eingeschlossenen ringartigen Fläche in Teilvielecke vornehmen, derart, dass bei der Addition der entsprechenden Ungleichungen stets diejenigen Seiten jener Teilpolygone ganz aus der Rechnung verschwinden, welche weder dem einen noch dem andern der gegebenen Vielecksumfänge angehören. Die Formel 1) gilt also — unter den eingangs gemachten Voraussetzungen — ganz allgemein. Da ferner eine in sich zurücklaufende, nach aussen oder convex- und stetig gekrümmte Linie oder eine geschlossene convexe Curve als Grenzfall eines convexen Vielecksumfangs aufgefasst werden kann, so gilt der

Satz 2: „Von zwei einander völlig umschliessenden, convexen Vielecksumfängen (gebrochenen in sich zurücklaufenden Linien) sowie auch von zwei sich umschliessenden, convex- und stetig gekrümmten geschlossenen Curven hat stets der äussere Vielecksumfang oder die umschliessende Curve die grössere Länge."

Der vorstehende Satz bleibt auch dann noch bestehen, wenn eine Ecke oder eine Seite des inneren Vielecks mit einer Ecke oder Seite des äusseren zusammenfällt. Denn der Umstand, dass z. B. die Seiten b und c' sich decken, also in den obigen Ungleichungen $a_1 = 0$, $b_2' = 0$, $b_1' = b'$ und $b_1 = 0$, $c_2' = 0$, $c_1' = c'$ ist, hat auf das Endergebniss keinen Einfluss. Ebenso können auch mehrere Ecken oder Seiten der beiden Vielecke zusammenfallen.

Mithin kann man u. a. auch noch den folgenden Satz aussprechen, von welchen sich ein besonderer, scharfsinniger Beweis bei Legendre (9ter Satz im 4ten Buch der „Elemente der Geometrie") findet.

Satz 3: „Von zwei convexen, gebrochenen oder auch von zwei convexen, stetig gekrümmten Linien, welche dieselbe zweiseitig begrenzte Gerade oder Strecke überspannen, so dass also die eine die andere vollkommen umschliesst, ist die „umschliessende oder äussere Linie die grössere".

Da nun die überspannte Strecke selbst von allen übrigen zwischen ihren Endpunkten möglichen gebrochenen oder stetig gekrümmten Linien umschlossen wird, so ist sie hiernach die kürzeste von allen Verbindungslinien zwischen jenen beiden Punkten und man ist somit wiederum bei dem Ausgangspunkt der obigen Ableitung, nämlich bei dem Satz 1 angelangt, von welchem das soeben erhaltene Ergebniss sich eigentlich nur der Fassung nach unterscheidet.

II.

Projicirt man die der Ableitung der Formel 1) in I. zu Grunde gelegte ebene Figur von irgend einem Punkte p des Raumes aus, so entstehen zwei convexe vielkantige Ecken $p(ABCDEF)$ oder i' und $p(A'B'C'D'E'F'G'H')$ oder a' mit gemeinsamer Spitze (p), von welchen die letztere die erstere vollständig umschliesst, so dass irgend welche Ueberschneidungen von Eckenseiten nicht vorkommen. [Ausserdem erscheint der Raum zwischen den beiden Ecken in den obigen Teilvielecken entsprechende convexe Teilecken $p(ALB'M)$, $p(BMC'N)$, $p(CND'E'P)$ u. s. w. zerlegt]. Da nun zu einem jeden Punkte einer jeden projicirten Vielecksseite ein projicirender Strahl gehört, und die Gesamtheit der projicirenden Strahlen einer jeden Vielecksseite den entsprechenden ebenen Winkel oder die entsprechende Seite der betreffenden Ecke bildet, so muss das über die Mengen der Elemente oder Punkte der Vielecksumfänge a und i, d. h. über die Grösse der letzteren Bewiesene ganz ebenso von den Mengen der die beiden Eckenseitensummen $\Sigma\beta_a$ und $\Sigma\beta_i$ bildenden Strahlen, d. h. von jenen Seitensummen selbst gelten. Folglich besteht die Ungleichung:

$$2)\qquad \Sigma\beta_a > \Sigma\beta_i$$

welche auch noch in dem Falle gilt, dass die Zahl der Eckenseiten eine unbegrenzte ist, also ihre Gesamtheit eine konische Fläche bildet. Der Formel 2) entnimmt man die folgenden Sätze:

Satz 4: „Von den einander völlig umschliessenden, gebrochenen bzhw. stetig gekrümmten Begrenzungsflächen zweier convexen Ecken oder convexen kegelförmigen Halbräumen mit gemeinsamer Spitze hat die umschliessende Fläche die grössere Seitensumme bzhw. ergibt nach der Abwickelung den grösseren ebenen Winkel“.

Satz 5: Haben zwei convexe Ecken eine Seite und folglich auch ihre Spitze gemein, so dass die Umfangsfläche der einen die der andern im übrigen völlig umschliesst, so besitzt die umschliessende Fläche die grössere Seitensumme

oder:

Von irgend zwei convexen, gebrochenen (spitzenförmigen) oder auch convex-konischen Fächen, welche, einander umschliessend, denselben ebenen (concaven) Winkel überspannen, ergibt stets die umschliessende oder äussere den grösseren ebenen Abwickelungswinkel“.

Auch folgt sogleich weiter der

Satz 6: „Der von zwei sich schneidenden Geraden eingeschlosssene ebeno (concave) Winkel ist die kleinste von allen zwischen den beiden Geraden möglichen Verbindnngsflächen

oder:

Eine Seite einer jeden convexen Ecke (auch einer solchen mit zum Teil einspringonden Winkeln), ist stets kleiner als die Snmme der übrigen Eckenseiten".

Für den besonderen Fall, dass der Projectionsmittelpnnkt p ins Unendliche rückt, also an Stelle der Ecke bezhw. des konischen Raumes der prismatische bzhw. cylindrische Raum tritt, ist der Wortlaut der Sätze 4, 5 nnd 6 entsprecbend abzuändern.

Die Sätze 4, 5 nnd 6 entsprecben den Sätzon 2, 3 nnd 1 für die Ebene vollständig. Bei der Ableituug der Sätze 4 und 5 hätte man auch vou Satz 6 ausgehen können (— einen andern, selbständigen Beweis desselben siehe nnter IV —), in ähnlicher Weise wie oben der Beweis von Satz 2 auf Satz 1 gestützt worden war. Denn der Satz 6 lässt sich anf jede einzelne der eingangs dieses Abschnittes (II) erwähnten Teilecken anwenden nnd führt genau zu den unter I aufgestellten Ungleichungen, in welchen jetzt aber die Buchstaben a, b, c . . . f sowio a_1', a_2', b_1', b_2' u. s. w. nicht Vielecksseiten bzhw. Teile derselben, sondern ebene Winkel, nämlich Eckenseiten bzhw. Teile von solchen bezeichnen.

Endlich ist die Herleitnng der Sätze 4, 5, 6 noch auf eine dritte (dem Cavalierischen Verfahren znr Vergleichung von Körpervolnmen nachgebildete) Art möglich, wobei man von den entsprechenden Sätzen 2, 3, 1 ausgeht. Man denke sich nämlich dio beiden convexen Ecken durch eine unbegrenzte Zahl von unendlich benachbarten Parallelebenen in Schichten zerlegt, welche man näherungsweise als Prismen betrachten darf. Dann ist das Verhältniss der Mantelflächen zweier solcben anf derselben Schnittebene ruhenden gleichhohen Teilprismen der beiden Ecken dasselbe wie das Verhältniss der Umfänge der Schnittpolygone jener Ebene mit den Umfangsflächen der beiden Ecken. Aus der vorausgesetzten Beschaffenheit der letzteren folgt nun die Convexität je zweier solchen zu derselben Parallelebene gehörigen Schnittpolygone, sowie das völlige Umschlossensein des einen derselben von dem andern. Mithin gilt für sie nnd folglich anch für die zugehörigen beiden Prismenmäntel dio Formel 1) und da die unendlichen Summen aller der letzteren die Umfangsflächen der beidon Ecken darstellen, so folgt auch für diese die entsprechende Anssage, d. h. also die Formel 2).

III.

Es seien $ABCD\ldots$ oder i'' und $A'B'C'D'\ldots$ oder a'' zwei convexe Polyeder, von welchen das letztere das erstere vollständig umschliesst. Durch das am Schlusse von Abschnitt II. erörterte Verfahren werden die Oberflächen der beiden Vielflache in Zonen zerlegt, von denen — je zwei zu derselben schneidenden Parallelebene gehörige — ihrer verschwindend kleinen Höhe wegen — mit grosser Annäherung dasselbe Grössenverhältniss aufweisen wie die Umfänge der beiden Schnittpolygone der betreffenden Ebene mit den Polyedern. Diese Schnittvielecke sind aber convex und da, der Voraussetzung gemäss, die Oberfläche des Vielflächners i'' an keiner Stelle diejenige des Polyeders a'' durchdringen soll, so muss auch das zu a'' gehörige Schnittpolygon (a) das dem Vielflächner i'' angehörige (i) vollständig umschliessen.

In Bezug auf beide Vielecke a und i und folglich auch in Bezug auf die zugehörigen beiden Polyederzonen gilt also die Formel 1) und da ein Gleiches hinsichtlich aller übrigen Paare von Schnittpolygonen der Parallelebenen mit den Polyedern, sowie hinsichtlich deren zugehörigen Zonen der Fall ist, so trifft es auch für die Summen der letzteren, d. h aber für die beiden Polyederoberflächen Σf_a und Σf_i selbst zu und es ist somit die Formel

3) $$\Sigma f_a > \Sigma f_i$$

bewiesen. Zieht man noch den Sonderfall in Betracht, dass eine der Begrenzungsflächen des einen Vielflächners mit einer solchen des andern zusammenfällt und geht man weiterhin auch zu dem Grenzfall unendlich vieler unendlich kleiner Begrenzungsflächen der Polyeder über, so kann man die folgenden Sätze aussprechen:

Satz 7: „Von zwei convexen, einander völlig umschliessenden polyedrischen oder auch stetig gekrümmten geschlossenen Flächen ist die umschliessende oder äussere die grössere".

Satz 8: „Von irgend zwei convexen gebrochenen (polyedrischen) oder auch convex- und stetig gekrümmten Flächen, welche dasselbe ebene (convexe) Vieleck überspannen, ist die umschliessende oder äussere die grössere".

Satz 9: „Die ebene Fläche eines jeden convexen Vielecks ist die kleinste von allen zwischen seiner Umgrenzung möglichen Flächen".

Die Sätze 7, 8, 9 finden sich, jedoch in anderer Ableitung, bei Legendre im VIII. Buch a. a. O.

Ein sehr einfacher, selbständiger, auf demselben Princip beruhender Beweis der Sätze 3, 6 und 9 ergibt sich, wenn man die convex-gebrochene bzhw. stetig gekrümmte Linie oder Fläche, welche eine Strecke, einen ebenen (concaven) Winkel oder ein ebenes convexes Vieleck überspannt, mit ihrer orthogonalen Projection auf die Gerade jener Strecke bzhw. die Ebene jenes Winkels oder Vielecks vergleicht und noch berücksichtigt, dass jeder der Bestandteile (Strecken, ebenen Winkel, Vielecksflächen) der betreffenden zu projicirenden Raumgrösse im allgemeinen grösser ist als seine Projection, mindestens aber gleich derselben.

Von ganz speciellen, aus dem Vorstehenden sich ergebenden Sätzen sollen noch hervorgehoben werden der bekannte

Satz (10): „Die Summe zweier Seiten einer dreikantigen convexen Ecke ist stets grösser als die dritte Seite" sowie der

Satz 11: „Die Summe dreier Flächen eines Tetraeders ist stets grösser als seine vierte Begrenzungsfläche". Der letztere Satz enthält die Bedingung dafür, dass ein Punkt (der Gegeneckpunkt der vierten Tetraederfläche ausserhalb der Ebene eines gegebenen Dreiecks (der Ebene der vierten Tetraederfläche) sich befindet, ebenso wie ein Punkt auserhalb der Geraden einer gegebenen Strecke gelegen ist, wenn die Summe seiner Entfernungen von den Streckenendpunkten grösser ist als die Strecke selbst (Vgl. Satz I. im § 9 der Planimetrie von Baltzer und die Zeichenregel im § 9, 7 daselbst).

III.

Geometrische Oerter bei Curvensystemen.

Von

H. Ekama.

Wenn man in der Gleichung einer Curve einen der Parameter ändert, so bekommt man ein Curvensystem. Dieses kann man andeuten durch die Formel

$$F(x, y) = a$$

in welcher a der Parameter ist, welcher alle Werte haben kann.

Durch Differentiation finden wir:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial y}} \tag{1}$$

$\frac{\partial F}{\partial x} = 0$ ist der geometrische Ort der Gipfel in Bezug auf die X Achse, (d. h. der Punkte, in welchen y ein Maximum oder ein Minimum erreicht) für Curven, welche zum System gehören, und $\frac{\partial F}{\partial y} = 0$ ist der geometrische Ort der Gipfel in Bezug auf die Y-Achse.

Nehmen wir zum Beispiel ein System von Lemniskaten, deren Brennpunkte zusammenfallen; so ist dieses angedeutet durch die Formel

$$(x^2 + y^2)^2 - 2a^2(x^2 - y^2) + a^4 = p^4$$

in welcher p sich ändert.

Für die Gipfel in Bezug auf die X Achse haben wir also:

$$\frac{\partial F}{\partial x} = 4x(x^2+y^2) - 4a^2x = 0$$

folglich $x = 0$ und $x^2+y^2 = a^2$; die geometrischen Oerter sind also die Y Achse und ein Kreis mit dem Radius a.

Für die Gipfel in Bezug auf die Y Achse ist:

$$\frac{\partial F}{\partial y} = 4y(x^2+y^2) + 4a^2y = 0$$

$y = 0$ ist die X Achse und die Curve $x^2+y^2+a^2 = 0$ ist imaginär.

Ist das System in der Form $f(x, y, a) = 0$ gegeben, so ist

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\frac{\partial f}{\partial x}}{\frac{\partial f}{\partial y}} \tag{2}$$

und für jeden Gipfel in Bezug auf die X Achse muss $\frac{\partial f}{\partial x} = 0$ und für jeden in Bezug auf die Y Achse $\frac{\partial f}{\partial y} = 0$ sein. Eliminirt man mittelst

$$f(x, y, a) = 0$$

den Parameter a aus diesen Formeln, so findet man die gesuchten geometrischen Oerter.

Ein System von Kreisen, welche einander in einem Punkte berühren, wird gegeben durch

$$x^2 - 2xa + y^2 = 0$$

Also ist $\frac{\partial f}{\partial x} = 2(x-a)$ und $\frac{\partial f}{\partial y} = 0$

Die letzte Formel giebt sogleich $y = 0$, das ist die X Achse und die erste nach Elimination

$$x^2 - 2x^2 + y^2 = 0 \quad \text{oder} \quad x = \pm y$$

folglich die geraden Linien, welche die Winkel zwischen den Achsen in zwei Hälften teilen.

Ist das System in Polarcoordinaten

gegeben, so ist

$$F(r\,.\,\varphi) = a$$

$$\frac{dr}{d\varphi} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial \varphi}}{\frac{\partial F}{\partial r}}$$

$\frac{\partial F}{\partial r} = 0$ ist der geometrische Ort aller Punkte, in welchen die Tangente senkrecht zum Radiusvector steht, und $\frac{\partial F}{\partial \varphi} = 0$ ist der geometrische Ort der Punkte, bei welchen die Tangente durch den Coordinatenanfangspunkt geht.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{\partial r}{\partial \varphi}\sin\varphi + r\cos\varphi}{\frac{\partial r}{\partial \varphi}\cos\varphi - r\sin\varphi} = -\frac{-\frac{\partial F}{\partial \varphi}\sin\varphi + r\frac{\partial F}{\partial r}\cos\varphi}{\frac{\partial F}{\partial \varphi}\cos\varphi + r\frac{\partial F}{\partial r}\sin\varphi}$$

Für den geometrischen Ort der Gipfel in Bezug auf die X Achse muss der Zähler $= 0$ sein, für denjenigen in Bezug auf die Y Achse der Nenner $= 0$. Uebereinstimmende Formeln bekommt man, wenn das System in der Form

$$f(r,\ \varphi,\ a) = 0$$

gegeben ist. Man findet dann für die Gipfel in Bezug auf die X Achse

$$-\frac{\partial f}{\partial \varphi}\sin\varphi + r\frac{\partial f}{\partial r}\cos\varphi = 0$$

und in Bezug auf die Y Achse

$$\frac{\partial f}{\partial \varphi}\cos\varphi + r\frac{\partial f}{\partial r}\sin\varphi = 0$$

aus welchen Formeln der Parameter a mittels

$$f(r,\ \varphi,\ a) = 0$$

eliminirt werden muss, um die geometrischen Oerter zu finden.

Mittels (1) haben wir nun den geometrischen Ort der Wendepunkte zu bestimmen:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{1}{\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^2}\left\{\left(\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial x\,\partial y}\right)\frac{\partial F}{\partial y} - \left(\frac{\partial^2 F}{\partial x\,\partial y} + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}\,\frac{dy}{dx}\right)\frac{\partial F}{\partial x}\right\}$$

folglich

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{1}{\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^3}\left\{\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^2 - 2\frac{\partial^2 F}{\partial x\,\partial y}\frac{\partial F}{\partial x}\frac{\partial F}{\partial y} + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^2\right\}$$

Wenn nicht $\frac{\partial F}{\partial y} = 0$ ist, so ist

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^2 - 2\frac{\partial^2 F}{\partial x\,\partial y}\frac{\partial F}{\partial x}\frac{\partial F}{\partial y} + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^2 = 0 \tag{3}$$

der geometrische Ort der Wendepunkte des gegebenen Systems.

Ist das System in der Form

$$f(x, y, a) = 0$$

gegeben, so hat man in gleicher Weise für einen Wendepunkt:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 - 2\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 = 0 \tag{4}$$

und findet durch Elimination des Parameters a mittels

$$f(x, y, a) = 0$$

den gesuchten geometrischen Ort.

Für beide Fälle werden wir ein Beispiel geben. Für ein System von Lemniskaten mit denselben Brennpunkten ist:

$$(x^2+y^2)^2 - 2a^2(x^2-y^2) = p^4 - a^4$$

also

$$\frac{\partial F}{\partial x} = 4x\{x^2+y^2-a^2\} \qquad \frac{\partial F}{\partial y} = 4y(x^2+y^2+a^2)$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = 4(3x^2+y^2-a^2) \qquad \frac{\partial^2 F}{\partial x\,\partial y} = 8xy \qquad \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} = 4(x^2+3y^2+a^2)$$

durch Substitution dieser Werte in die Formel (3):

$$64y^2\{x^2+y^2+a^2\}^2\{3x^2+y^2-a^2\} - 256x^2y^2\{(x^2+y^2)^2-a^4\} + 64x^2(x^2+y^2-a^2)^2(x^2+3y^2+a^2) = 0$$

$$2x^2y^2\{(x^2+y^2+a^2)^2 - 2\{(x^2+y^2)^2-a^4) + (x^2+y^2-a^2)^2\} + \{(x^2+y^2+a^2)(x^2+y^2-a^2)\{(x^2+y^2)^2 - a^2(x^2-y^2)\} = 0$$

$$8a^4x^2y^2 + \{(x^2+y^2)^2-a^4\}\{(x^2+y^2)^2 - a^2(x^2-y^2)\} = 0$$

$$(x^2+y^2)^2\{(x^2+y^2)^2+a^2(x^2-y^2)\}+8a^4x^2y^2-2a^2(x^2+y^2)^2(x^2-y^2)$$
$$-2a^4(x^2+y^2)^2+a^4\{(x^2+y^2)^2+a^2(x^2-y^2)\}=0$$

also

$$\{(x^2+y^2)^2+a^2(x^2-y^2)\}\{(x^2+y^2)^2-2a^2(x^2-y^2)+a^4\}=0$$

$$(x^2+y^2)^2+a^2(x^2-y^2)=0$$

giebt für den geometrischen Ort die Lemniskate von Bernoulli.

$$(x^2+y^2)^2-2a^2(x^2-y^2)+a^4=0$$

können wir in der Form schreiben:

$$(x^2-y^2)^2-2a^2(x^2-y^2)+a^4=-4x^2y^2$$

und folglich ist dieser geometrische Ort imaginär.

Als zweites Beispiel suchen wir den geometrischen Ort der Wendepunkte eines Systems gleichförmiger Lemniskaten; bei diesen ist also $a/p=1/n$ constant. Die Gleichung ist:

$$(x^2+y^2)^2-2a^2(x^2-y^2)=(n^4-1)a^4$$

der Formel (4) zufolge finden wir:

$$8a^4x^2y^2+\{(x^2+y^2)^2-a^4\}\{(x^2+y^2)^2-a^2(x^2-y^2)\}=0$$

und mittels der gegebenen Gleichung

$$8a^4x^2y^2+\{(n^4-1)a^4+2a^2(x^2-y^2)-a^4\}\,.$$
$$.\,\{(n^4-1)a^4+a^2(x^2-y^2)\}=0$$

$$8x^2y^2+(n^4-2)(n^4-1)a^4+(3n^4-4)(x^2-y^2)a^2+2(x^2-y^2)^2=0$$

$$(n^4-2)(x^2+y^2)^2-(n^4-2)\,2a^2(x^2-y^2)+2(x^2+y^2)^2$$
$$+(3n^4-4)(x^2-y^2)a^2=0$$

folglich

$$(x^2+y^2)^2+a^2(x^2-y^2)=0$$

oder

$$a^2=-\frac{(x^2+y^2)^2}{x^2-y^2}$$

also nach Substitution in die gegebene Gleichung

$$(x^2+y^2)^2-2(x^2+y^2)^2=(n^4-1)\frac{(x^2+y^2)^4}{(x^2-y^2)^2}$$

$$3(x^2+y^2)^2=(n^4-1)(x^2+y^2)^2$$

oder

$$\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}=\sqrt{\frac{n^4-1}{3}}$$

und in Polarcoordinaten

$$\cos 2\varphi=\sqrt{\frac{n^4-1}{3}}$$

Der geometrische Ort sind also gerade Linien, welche durch den Coordinatenanfangspunkt gehen. Er wird imaginär für $n^4 < 1$ und $n^4 > 4$ und also reell für $1 < n < \sqrt{2}$, wie zu erwarten war. In diesem Falle wäre es kürzer gewesen erstens mittels (2) $\frac{dy}{dx}$ zu bestimmen, darauf mittels $f(x, y, a) = 0$ a zu eliminiren und endlich $\frac{d^2y}{dx^2}$ zu suchen.

Wir wollen das Curvensystem bestimmen, welches die Curven eines gegebenen Systems immer unter einen gegebenen Winkel α schneiden. Nennen wir den Winkel, welchen die Tangente in einem Punkte der Curve des einen Systemes mit der X Achse macht, τ, und den Winkel, welchen die Tangente in diesem Punkte der Curve des anderen Systemes mit jener Achse macht τ', so muss immer $\tau' = \alpha + \tau$ sein,

$$\operatorname{tg}\tau'=\frac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\tau}{1-\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\tau}$$

oder

$$\frac{dy_2}{dx_2}=\frac{\operatorname{tg}\alpha+\frac{dy_1}{dx_1}}{1-\operatorname{tg}\alpha\frac{dy_1}{dx_1}} \tag{5}$$

In vielen Fällen ist die Form in Polarcoordinaten einfacher in der Anwendung.

$$\cot(\tau-\varphi_1)=1/r_1\frac{dr_1}{\partial\varphi_1} \quad \text{und} \quad \cot(\tau'-\varphi_2)=1/r_2\frac{dr_2}{d\varphi_2}$$

Jetzt muss $\alpha = \tau' - \tau$ sein oder $\alpha = (\tau' - \varphi_1) - (\tau - \varphi_2)$; denn im Schnittpunkte ist $r_1 = r_2$ und $\varphi_1 = \varphi_2$, folglich:

$$\operatorname{tg}\alpha=\frac{1/r_1\frac{dr_1}{d\varphi_1}-1/r_2\frac{dr_2}{d\varphi_2}}{1+\frac{1}{r_1}\frac{1}{r_2}\frac{dr_1}{d\varphi_1}\frac{dr_2}{d\varphi_2}} \quad \text{und}$$

$$\frac{1}{r_2}\frac{dr_2}{d\varphi_2} = \frac{1/r_1 \dfrac{dr_1}{d\varphi_1} - \operatorname{tg}\alpha}{1 - 1/r_1 \dfrac{dr_1}{d\varphi_1} \operatorname{tg}\alpha} \tag{6}$$

Ein System gerader Linien, welche einander in einem Punkte schneiden, ist gegeben durch $\varphi_1 = A$, also

$$d\varphi_1 = 0 \;\therefore\; \frac{r_1\, d\varphi_1}{dr_1} = 0$$

folglich:

$$\frac{1}{r_2}\frac{dr_2}{d\varphi_2} = \operatorname{cotg}\alpha$$

nach Integration

$$r_2 = Ce^{\varphi_2 \operatorname{cotg}\alpha}$$

Für ein System concentrischer Kreise ist $r_1 = a$, also

$$dr_1 = 0 \;\therefore\; 1/r_1 \frac{dr_1}{d\varphi_1} = -\operatorname{tg}\alpha$$

und wir finden

$$r_2 = Ce^{-\varphi_2 \operatorname{tg}\alpha}$$

oder wenn wir φ in entgegengesetzter Richtung zählen,

$$r_2 = Ce^{\varphi_2 \operatorname{tg}\alpha}$$

Für beide Fälle finden wir übereinstimmende Systeme, welche ganz zusammenfallen, wenn die gegebenen Winkel α einander Complemente sind. Dieses muss auch so sein, weil das System gerader Linien durch das System concentrischer Kreise senkrecht geschnitten wird.

Ist $\alpha = 90^0$, so werden die Formeln (5) und (6)

$$\frac{dy_2}{dx_2} = -\frac{dx_1}{dy_1} \quad \text{und} \quad 1/r_2 \frac{dr_2}{d\varphi_2} = -\frac{r_1\, d\varphi_1}{dr_1} \tag{7}$$

Nehmen wir ein System von Ellipsen oder Hyperbeln, bei welchen die Proportion zwischen den Achsen gleich $\operatorname{tg}\eta$ ist. Die Systeme sind gegeben durch

$$\frac{x_1^2}{a^2} \pm \frac{y_1^2}{a^2 \operatorname{tg}^2\eta} = C$$

folglich

$$\frac{dy_1}{dx_1} = \mp \frac{x_1}{y_1} \operatorname{tg}^2\eta$$

In den Schneidepunkten ist $x_1 = x_2$ und $y_1 = y_2$ und folglich für die Systeme, welche die gegebenen unter rechten Winkeln schneiden:

$$\frac{dy_2}{dx_2} = \pm \frac{y_2}{x_2} \operatorname{cotg}^2\eta \quad \text{oder} \quad \frac{dx_2}{x_2} = \pm \frac{dy_2}{y_2} \operatorname{tg}^2\eta$$

durch Integration finden wir für das zu den Ellipsen gehörende System

$$x = C y^{\operatorname{tg}^2\eta}$$

und für das bei den Hyperbeln

$$x y^{\operatorname{tg}^2\eta} = C$$

Ist im ersten Systeme $\operatorname{tg}^2\eta$ rational, so besteht das System aus Parabeln von höherem Grade.

Sei ein System von Cissoiden, welche dieselben Achsen und dieselbe Spitze haben, gegeben.

$$r_1 = 2a \sin\varphi_1 \operatorname{tg}\varphi_1$$

$$\frac{dr_1}{d\varphi_1} = 2a \sin\varphi_1 \frac{1+\cos^2\varphi_1}{\cos^2\varphi_1}$$

Durch Elimination von a finden wir:

$$\frac{1}{r_1}\frac{dr_1}{d\varphi_1} = \operatorname{cotg}\varphi_1 \frac{1+\cos^2\varphi_1}{\cos^2\varphi_1} = \frac{1+\cos^2\varphi_1}{\sin\varphi_1 \cos\varphi_1}$$

und folglich für das gewünschte System:

$$\frac{1}{r_2}\frac{dr_2}{d\varphi_2} = -\frac{\sin\varphi_2 \cos\varphi_2}{1+\cos^2\varphi_2}$$

also nach der Integration:

$$r_2^2 = c^2(1+\cos^2\varphi_2)$$

oder in rechtwinkelige Coordinaten übergebracht

$$(x^2+y^2)^2 = c^2(2x^2+y^2)$$

Diese Curve ist vom vierten Grade und symmetrisch in Bezug auf die Achsen.

Für $\varphi = 0^0$ ist

$$r = c\sqrt{2} \quad \text{und} \quad \varphi = 90^0 \therefore r = c$$

$$\varphi = 30^0 \therefore r = \tfrac{1}{2}c\sqrt{7}: \quad \varphi = 45^0 \therefore r = \tfrac{1}{2}c\sqrt{3} \quad \text{und}$$
$$\varphi = 60^0 \therefore r = \tfrac{1}{2}c\sqrt{5}$$

Die Curve ist also leicht zu construiren. Wendepunkte hat sie nicht. Die Oberfläche O ist gleich vier mal $\frac{1}{2}\int_0^{1/2\pi} r^2\,d\varphi$.

$$\int_0^{1/2\pi} r^2\,d\varphi = c^2 \int_0^{1/2\pi} (1+\cos^2\varphi)\,d\varphi = c^2 \Big|\, {}^3\!/_2\varphi \,\Big|_0^{1/2\pi} = \tfrac{3}{4}\pi c^2$$

und also

$$O = {}^3\!/_2 \pi c^2$$

Im allgemeinen giebt diese Untersuchung Curven, welche wenig bekannt sind, z. B. zu

$y_1{}^2 = 2px_1 - (1-\varepsilon^2)x_1{}^2 \{\varepsilon$ veränderlich$\}$

gehört $y_2{}^2 x_2{}^2 = a x_2{}^3 + b^4$ $\{b$ veränderlich$\}$

$r_1 = \dfrac{p}{1+\varepsilon\cos\varphi_1}$ $\{\varepsilon$ veränderlich$\}$

gehört $b e^{r_2/p} = r_2 \sin\varphi_2$ $\{b$ veränderlich$\}$

$r_1 = a\varphi_1$ $\{a$ veränderlich$\{$

gehört $r_2 e^{1/2\varphi_2{}^2} = b$ $\{b$ veränderlich$\}$

$r_1\varphi_1 = a$ $\{a$ veränderlich$\}$

gehört $r_2 = b e^{1/2\varphi_2{}^2}$ $\{b$ veränderlich$\}$

In vielen Fällen ist die Integration nicht ausführbar.

Das Folgende möge etwas ausführlicher betrachtet werden. Das gegebene System besteht aus Kreisen mit demselben Radius p beschrieben und deren Mittelpunkte auf einer geraden Linie liegen; also

$$y_1{}^2 + (x_1 - a)^2 = p^2 \qquad y_1 \frac{dy_1}{dx_1} + (x_1 - a) = 0$$

folglich

$$\frac{dy_1}{dx_1} = \frac{\sqrt{p^2 - y_1{}^2}}{y_1}$$

also

$$\frac{dy_2}{dx_2} = -\frac{y_2}{\sqrt{p^2 - y_2{}^2}}$$

oder

$$dx_2 = -\frac{\sqrt{p^2 - y_2^2}}{y_2} dy_2$$

Sei $y_2 = p \sin\psi$, so ist

$$dy_2 = p\cos\psi\, d\psi \quad \text{und} \quad dx_2 = -p\frac{\cos^2\psi}{\sin\psi} d\psi$$

die Integration giebt

$$\frac{x_2 + c}{p} = -\operatorname{logtg} {}^1/_2\psi - \cos\psi$$

Boi der Untersuchnng dieser Cnrve können wir das Zeichen ändern und die Constante weglassen, denn diese giebt nur eine Verschiebnng in der Richtung der X Achse.

$$y = 0 \quad \text{für} \quad \sin\psi = 0, \quad \text{so ist} \quad x = \infty$$
$$y = p \quad \text{für} \quad \sin\psi = 1, \quad \text{so ist} \quad x = 0$$

Die Linie der Mittelpunkte ist eine Asymptote nnd die Curvo hat elne Spitze auf der gemeinsamen Tangente der Kreise. Die Oberfläche zwischen der Curve nud der Asymptote ist gleich

$$\int y\,dx = 2p^2 \int_0^{{}^1/_2\pi} \cos^2\psi\, d\psi = {}^1/_2\pi\, p^2$$

folglich der halben Oberfläche eines der Kreiso gleich.

Die Form der Gleichnngen lässt erwarten, dass die Curve eine cycloidische Cnrve, entstanden bei der Wälznng einer Cnrve die Linie der Mittelpnnkte entlang, sein wird. Der Teil der Normale zwischen der Cnrve und der Directrix ist

$$r = p \operatorname{tg}\psi$$

und

$$\frac{dy_2}{dx_2} = -\operatorname{tg}\psi = {}^1/r\,\frac{dr}{d\varphi}$$

folglich

$$-p\frac{dr}{r^2} = d\varphi$$

also

$$p = r\varphi$$

Die Curve, welche also die gerade Linie entlang wälzen muss, ist die hyperbolische Spirale, und der Coordinatenanfangspunkt ist der beschreibende Punkt. Der Punkt auf der Tangente wird bei einer endlichen Geschwindigkeit in unendlich grossor Zeit erreicht werden.

Sind die Gleichnngen von zwei Systemen, welche einander senkrecht schneiden

$$F(x_1 y_1) = a \quad \text{nnd} \quad F'(x_2 y_2) = b$$

so ist

$$\frac{dy_1}{dx_1} = -\frac{\partial F}{\partial x_1} : \frac{\partial F}{\partial y_1} \quad \text{und} \quad \frac{dy_2}{dx_2} = -\frac{\partial F'}{\partial x_2} : \frac{\partial F'}{\partial y_2}$$

Nun soll (7) zufolge

$$\frac{dy_1}{dx_1} = -\frac{dx_2}{dy_2}$$

ein, also

$$\frac{\partial F}{\partial x_1} : \frac{\partial F}{\partial y_1} = -\frac{\partial F'}{\partial y_2} : \frac{\partial F'}{\partial x_2} \tag{8}$$

Ist jetzt

$$\frac{\partial F}{\partial x_1} = 0, \quad \text{so ist auch} \quad \frac{\partial F}{\partial y_2} = 0$$

und für

$$\frac{\partial F}{\partial y_1} = 0 \quad \text{ist} \quad \frac{\partial F'}{\partial x_2} = 0$$

was nns lehrt, dass der geometrische Ort der Gipfel in Bezng anf die X Achse in dem einen Systeme bei dem anderen der geometrische Ort für die Gipfel in Bezng auf die Y Achse ist.

Wenn wir (8) nach x_1 differentiiren, finden wir

$$\left(\frac{\partial^2 F}{\partial x_1^2}\frac{\partial F}{\partial y_1} - \frac{\partial^2 F}{\partial x_1 \partial y_1}\frac{\partial F}{\partial x_1}\right) : \left(\frac{\partial F}{\partial y_1}\right)^2$$
$$= -\frac{dy_2}{dx_1}\left(\frac{\partial^2 F'}{\partial y_2^2}\frac{\partial F'}{\partial x_2} - \frac{\partial^2 F'}{\partial x_2 \partial y_2}\frac{\partial F'}{\partial y_2}\right) : \left(\frac{\partial F'}{\partial x_2}\right)^2$$

und nach y_1

$$\left(\frac{\partial^2 F}{\partial x_1 \partial y_1}\frac{\partial F}{\partial y_1} - \frac{\partial^2 F}{\partial y_1^2}\frac{\partial F}{\partial x_1}\right) : \left(\frac{\partial F}{\partial y_1}\right)^2$$
$$= -\frac{dx_2}{dy_1}\left(\frac{\partial^2 F'}{\partial x_2 \partial y_2}\frac{\partial F'}{\partial x_2} - \frac{\partial^2 F'}{\partial x_2^2}\frac{\partial F'}{\partial y_2}\right) : \left(\frac{\partial F'}{\partial x_2}\right)^2$$

Multipliciren wir die obenstehende Formel mit $\frac{\partial F}{\partial y_1}$ und die untenstehende mit $\frac{\partial F}{\partial x_1}$ und zählen wir sie zusammen,

$$\left\{\frac{\partial^2 F}{\partial x_1^2}\left(\frac{\partial F}{\partial y_1}\right)^2 - 2\frac{\partial^2 F}{\partial x_1 \partial y_1}\frac{\partial F}{\partial x_1}\frac{\partial F}{\partial y_1} + \frac{\partial^2 F}{\partial y_1^2}\left(\frac{\partial F}{\partial x_1}\right)^2\right\} : \left\{\frac{\partial F}{\partial y_1}\right\}^3 -$$
$$\frac{dy_2}{dx_1}\left\{\frac{\partial^2 F'}{\partial x_2^2}\left(\frac{\partial F'}{\partial y_2}\right)^2 - 2\frac{\partial^2 F'}{\partial x_2 \partial y_2}\frac{\partial F'}{\partial x_2}\frac{\partial F'}{\partial y_2} + \frac{\partial^2 F'}{\partial y_2^2}\left(\frac{\partial F'}{\partial x_2}\right)^2\right\} : \left(\frac{\partial F'}{\partial x_2}\right)^3$$

Bei dieser Ableitnng ist (8) gebraucht und weiter ist doch

$$\frac{dy_2}{dx_1} = -\frac{dx_2}{dy_1}$$

Ans dieser Formel ersieht man, dass wenn es für das eine System einen geometrischen Ort für die Wendepunkte gieht, dieser auch der geometrische Ort für die Wendepnnkte des anderen Systems ist.

Indem wir die Formel (7) gebranchen, können wir auf einfache Weise beweiseu, dass wenu das eine System die Formel

$$r_1^n = a^n \cos n\varphi_1$$

hat, dieses System unter einem Winkel α geschnitteu wird dnrch ein gleiches System, wenn die Achsen hoider Systeme einen Winkel $1/n\alpha$ mit einander machen [1]).

$$1/r_1 \frac{dr_1}{d\varphi_1} = -\operatorname{tg} n\varphi_1$$

und weil in deu Schneidepunkten $r_1 = r_2$ und $\varphi_1 = \varphi_2$ ist:

$$1/r_2 \frac{dr_2}{d\varphi_2} = -\frac{\operatorname{tg} n\varphi_2 + \operatorname{tg}\alpha}{1 - \operatorname{tg} n\varphi_2 \operatorname{tg}\alpha} = \operatorname{tg}(n\varphi_2 + \alpha)$$

$$n\frac{dr_2}{r_2} = -\frac{dn\varphi_2}{\operatorname{cotg}(n\varphi_2 + \alpha)}$$

also

$$r_2^n = c^n \cos(n\varphi_2 + \alpha)$$

n kann alle Werte haben. Die meist bekannteu Curveu sind:

- $n = 1$ Kreise, welche einauder in einem Pnnkte berühren;
- $n = -1$ parallele gerade Linien;
- $n = 2$ Lemuiskateu vou Bernoulli mit demselben Coordinateu-anfangspnnkt;
- $n = -2$ gleichseitige Hyperbeln mit deuselben Asymptoteu;
- $n = 1/2$ Kardioiden nnd
- $n = -1/2$ Parabelu mit demselben Breuupunkte.

Die Formeln (5) und (6) helfen uns, wenn zwei Curveusysteme gegebeu sind, den geometrischeu Ort der Pnnkte, in welchen das Schneiden unter einem bestimmten Winkel stattfindet, zu bestimmen. Zu diesem Zwecke schreibeu wir die Formeln in die Form

1) Muurling. Dissertatie. Groningen 1870. p. 81.

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\frac{dy_1}{dx_1} - \frac{dy_2}{dx_2}}{1 + \frac{dy_1}{dx_1}\frac{dy_2}{dx_2}} = -\frac{\frac{1}{r_1}\frac{dr_1}{d\varphi_1} - \frac{1}{r_2}\frac{dr_2}{d\varphi_2}}{1 + \frac{1}{r_1}\frac{1}{r_2}\frac{dr_1}{d\varphi_1}\frac{dr_2}{d\varphi_2}}$$

Wir nehmen z. B. zwei Systeme gerader Linien, welche einander in einem Pnnkte schneiden. Die Entfernnng der beiden Schneidepnnkte sei $2b$; so ist das eine System

$$y_1 = A(x_1 + b)$$

und das andere

$$y_2 = B(x_2 - b)$$

$$\frac{dy_1}{dx_1} = A = \frac{y_1}{x_1 + b} \quad \text{und} \quad \frac{dy_2}{dx_2} = B = \frac{y_2}{x_2 - b}$$

Im geometrischen Orte ist

$$x_1 = x_2 \quad \text{und} \quad y_1 = y_2$$

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{2by}{x^2 - b^2 + y^2}$$

oder

$$x^2 + y^2 - b^2 = 2by \operatorname{cotg}\alpha$$

Diese geometrischen Oerter sind, wie zn erwarten war, Kreise, welche durch die Schneidepnnkte gehen.

Als zweites Beispiel dienen zwei Systeme confocaler Lemniskaten, welche denselben Coordinatenanfangspnnkt haben, doch bei denen die Linien, welche durch die Brennpnnkte gehen, senkrecht zu einander stehen.

Für das eine ist

$$r_1^4 - 2a^2 r_1^2 \cos 2\varphi_1 = p_1^4 - a^4$$

für das andere ist

$$r_2^4 + 2a^2 r_2^2 \cos 2\varphi_2 = p_2^4 - a^4$$

also

$$\frac{1}{r_1}\frac{dr_1}{d\varphi_1} = -\frac{a^2 \sin 2\varphi_1}{r_1^2 - a^2\cos 2\varphi_1} \quad \text{und} \quad \frac{1}{r_2}\frac{dr_2}{d\varphi_2} = \frac{a^2 \sin 2\varphi_2}{r_2^2 + a^2 \cos 2\varphi_2}$$

Im Schneidepnnkte ist wieder

$$r_1 = r_2 \quad \text{und} \quad \varphi_1 = \varphi_2$$

also

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{2a^2 r^2 \sin 2\varphi}{r^4 - a^4}$$

oder

$$r^4 - 2a^2 r^2 \operatorname{cotg}\alpha \sin 2\varphi = a^4$$

Diese geometrischen Oerter sind Lemniskaten, doch die Achsen machen mit den ursprünglichen Winkel von 45°.

Für das eine System können wir ein System gerader Linien, welche durch einen Punkt mit den Coordinaten a, b gehen, nehmen, und den geometrischen Ort der Punkte, in welchen die Curven eines anderen Systems unter dem Winkel α geschnitten werden, suchen Das System gerader Linien ist gegeben durch die Gleichung

$$(x_1 - a)\operatorname{tg} A = y_1 - b$$

also

$$\frac{dy_1}{dx_1} = \frac{y_1 - b}{x_1 - a}$$

und wir finden also

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{(y-b)-(x-a)\frac{dy_2}{dx_2}}{(x-a)+(y-b)\frac{dy_2}{dx_2}}$$

Ist $\alpha = 90°$: d. h. die geraden Linien sind Normalen der Curven, so muss

$$(x-a)+(y-b)\frac{dy_2}{dx_2} = 0$$

sein. Für $\alpha = 0°$ berühren die Geraden die Curven des Systems. und ist

$$(y-b)-(x-a)\frac{dy_2}{dx_2} = 0$$

Aus beiden Formeln sieht man, dass ihnen genügt wird durch $x = a$ und $y = b$, folglich geht der geometrische Ort immer durch den gegebenen Punkt. Von Schlömilch [1]) sind diese geometrischen Oerter für die Kegelschnitte untersucht.

Hat man zwei Systeme, welche einander senkrecht schneiden, und einen Punkt, durch welchen die geraden Linien gehen, so ist naturgemäss der geometrische Ort für die Normalpunkte des einen Systems auch der geometrische Ort für die Berührungspunkte des anderen Systems.

1) Schlömilch Zeitschrift. Bd. XXIII. S. 337—339.

IV.

Ableitungen arithmetischer Reihen.

Von

Franz Rogel.

Vom Verfasser wurden in seinem Aufsatze „Ueber eine besondere Art von Reihen" (Archiv 2. Reihe, Tom. VII., 1889. p. 372) aus Potenzreihen neue gebildet, deren Coefficienten Functionen der Teiler der Stellenvariabelen sind.

Das hiebei eingeschlagene Verfahren ist einer Verallgemeinerung fähig und insbesonders auf trigonometrische Reihen anwendbar.

Sei

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \varrho^n f(n\varphi) = F(\varrho, \varphi), \quad \varrho^2 < 1 \tag{1}$$

eine unendliche Reihe, welche gleichzeitig nach aufsteigenden Potenzen des Modul ϱ und nach den $\begin{Bmatrix}\cos\\ \sin\end{Bmatrix}$, (hier abkürzungsweise mit „f" bezeichnet), der Vielfachen der Amplitude φ fortschreitet, die entweder für jeden Wert, oder wenigstens für nicht negative Werte von φ convergirt, so lässt sich aus derselben eine neue Reihe derselben Art ableiten, wenn in die Stammreihe (1) $r\varphi$, ϱ^r für φ, ϱ gesetzt und das Resultat mit einer noch unbestimmten Function $g(r)$, über welche später verfügt werden wird, multiplicirt wird. Setzt man nun der Reihe nach $r = 1, 2, 3, \ldots$, addirt und ordnet die Glieder wieder nach aufsteigenden Potenzen von ϱ und Vielfachen von φ, so ergiebt sich

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{r=1}^{\infty} a_{nr}\, g(r)\, \varrho^{nr} f(nr\varphi) =$$

$$a_1 g(1)\, \varrho f(\varphi) + (a_1 g(2) + a_2 g(1))\, \varrho^2 f(2\varphi) + (a_1 g(3) + a_3 y_1))\varrho^3 f(3\varphi)$$
$$+ (a_1 g(4) + a_2 g(2) + a_4 g(1))\varrho^4 f(4\varphi) + (a_1 g(5) + a_5 g(1))\, \varrho^5 (5\varphi)$$
$$+ (a_1 g(6) + a_2 g(3) + a_3 (g(2) + a_6 g(1))\varrho^6 f(6\varphi)$$
$$+ (a_1 g(7) + a_7 g(1))\, \varrho^7\, (7\varphi) + \ldots \qquad (2)$$

oder

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{t=1}^{t=n} a_t\, g\left(\frac{n}{t}\right) \varrho^n f(n\varphi) = \sum_{r=1}^{\infty} g(r)\, F(\varrho^r, r\varphi) \qquad (3)$$

wo sich die zweite Summe rechter Hand auf alle Teiler t des Stellenzeigers n bezieht.

Bezeichne $\Omega(\varrho, \varphi, g)$ die hier mit der Stammreihe (1) vorgenommene Operation, so kann für den linksseitigen Ausdruck in (3) symbolisch auch

$$\Omega(\varrho, \varphi, g)\, \Sigma a_n \varrho^n f(n\varphi)$$

geschrieben werden.

Wenn nur solche **arithmetische** Reihen entwickelt werden sollen, welche eine **angebbare** Summe besitzen, d. h. wo

$$\Sigma g(r) F(\varrho^r, r\varphi)$$

summirbar ist, so dürfen nur derartige Reihen als Stammreihen verwendet werden, bei welchen der Ausdruck F für ihre Summe die hiezu geeignete Form hat. Dies ist zwar bei **keiner** der bekannten summirbaren trigonometrischen Reihen (in ihrer gewöhnlichen Form) der Fall, kann aber durch Multiplication derselben mit einer schicklich gewählten Function erzielt werden.

In besonders einfacher Weise lassen sich die folgenden, aus der geometrischen Reihe entstandenen trigonometrischen Reihen zu Stammreihen umgestalten.

$$\Sigma \varrho^n \cos n\varphi = \frac{\cos\varphi - \varrho}{\Delta(\varphi)}, \quad \Delta(\varphi) = 1 - 2\varrho\cos\varphi + \varrho^2 \qquad (4)$$

$$\Sigma \varrho^n \sin n\varphi = \varrho \frac{\sin\varphi}{\Delta(\varphi)} \qquad (5)$$

$$\Sigma n \varrho^n \cos n\varphi = \varrho \frac{(1+\varrho^2)\cos\varphi - 2\varrho}{\Delta^2(\varphi)} \qquad (6)$$

$$\Sigma n \varrho^n \sin n\varphi = \varrho(1-\varrho^2) \frac{\sin\varphi}{\Delta^2(\varphi)} \qquad (7)$$

$$\sum_{1.3.5\ldots} \varrho_n \cos n\varphi = \varrho \frac{1-\varrho^2}{\varDelta'(\varphi)} \cos\varphi, \quad \varDelta'(\varphi) = 1 - 2\varrho^2 \cos 2\varphi + \varrho^4 \quad (8)$$

$$\sum_{1.3.5\ldots} \varrho^n \sin n\varphi = \varrho \frac{1+\varrho^2}{\varDelta'(\varphi)} \sin\varphi \quad (9)$$

$$\left(\begin{matrix}\varrho^2 < 1 \\ \varphi \text{ beliebig}\end{matrix}\right)$$

Wird in diesen Ausdrücken der die Summirung hindernde Nenner $\varDelta(\varphi)$, $\varDelta'(\varphi)$ . . . auf die linke Seite geschafft, indem man Glied für Glied mit demselben multiplicirt, so können sofort aus den so vorbereiteten Reihen summirbare Reihen der angegebenen Art abgeleitet werden.

Selbstverständlich wird bei den Reihen in (4) und (6), deren Summen ein von $\begin{Bmatrix}\cos \\ \sin\end{Bmatrix}$ freies Glied enthalten die specielle Operation Ω (φ, g) nicht angewendet werden dürfen. Ferner sind bei den Reihen in (8) und (9) nur ungerade Vielfache von φ zu substituiren.

Je nach der Art der, an den auf die nahe liegendste Weise zu transformirenden Reihen (4) . . . (9) vorzunehmenden Operationen $\Omega(\varrho, \varphi, g)$, welche, wenn kein Zweifel obwaltet, abkürzungsweise mit Ω bezeichnet werden mögen, werden die nachstehenden einfachsten Fälle zu verzeichnen sein.

1. $\Omega(\varrho, \varphi, 1)$. Es entsteht aus

(4) . . . $\Omega \Sigma \varrho^n \cos n\varphi \,.\, \varDelta(\varphi) = \sum_1 \varrho^n \cos n\psi - \Sigma \varrho^{2n}$

mit Benutzung derselben Formel (4) die neue Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{t=1}^{t=n} \varDelta \; \varDelta(\varrho^t, t\varphi) \,.\, \varrho^n \cos n\varphi = \varrho \frac{\cos\varphi - \varrho}{\varDelta(\varphi)} - \frac{\varrho^2}{1-\varrho^2} \quad (10)$$

Für $\varphi = 0$ ist

$$\varDelta(\varrho^t, 0) = (1-\varrho^t)^2$$

daher

$$\sum_{n=1} \sum_{t=1}^{n} (1-\varrho^t)^2 \varrho^n = \frac{\varrho}{1-\varrho^2} \quad (11)$$

(5) . . . $\Omega \Sigma \varrho^n \sin n\varphi \,.\, \varDelta(\varphi) = \Sigma \varrho^n \sin n\varphi$

$$\Sigma \Sigma \varDelta(\varrho^t, t\varphi) \varrho^n \sin n\varphi = \frac{\varrho \sin\varphi}{\varDelta(\varphi)} \quad (12)$$

Für $\varphi = \frac{\pi}{2}$ ist bei ungeradem t

$$\varDelta\left(\varrho^t,\ t\frac{\pi}{2}\right) = 1+\varrho^{2t}$$

somit

$$\sum_{1.3.5\ldots}(-1)^{\frac{n-1}{2}}\varrho^n\,\Sigma(1+\varrho^{2t}) = \frac{\varrho}{1+\varrho^2} \tag{13}$$

(6) . . . $\Omega\Sigma n\varrho^n\cos n\varphi\,.\,\varDelta^2(\varphi) = \Sigma\varrho^n\cos n\varphi + \Sigma\varrho^{3n}\cos n\varphi - 2\Sigma\varrho^{2n}$

$$\Sigma n\varrho^n\cos n\varphi\,.\,\Sigma\frac{1}{t}\varDelta^2(\varrho^t,\ t\varphi) = \varrho\,\frac{\cos\varphi-\varrho}{\varDelta(\varphi)} + \varrho^3\frac{\cos\varphi-\varrho^3}{\varDelta(\varrho^3,\ \varphi)} - 2\,\frac{\varrho^2}{1-\varrho^2} \tag{14}$$

$\varphi = 0$

$$\Sigma n\varrho^n\,\Sigma\frac{1}{t}(1-\varrho^t)^4 = \frac{\varrho}{1-\varrho} - \frac{2\varrho^2}{1-\varrho^2} + \frac{\varrho^3}{1-\varrho^3} \tag{15}$$

$\varphi = \pi$

$$\sum_{2.4.6\ldots}(-1)^n n\varrho^n\,\Sigma\,\frac{1}{t}\left[1+(-1)^{t-1}\varrho^t\right]^4 = -\frac{\varrho}{1+\varrho} - 2\,\frac{\varrho^2}{1-\varrho^2} - \frac{\varrho^3}{1-\varrho^3} \tag{16}$$

(7) . . . $\Omega\Sigma n\varrho^n\sin n\varphi\,\varDelta^2(\varphi) = \Sigma\varrho^n\sin n\varphi - \Sigma\varrho^{3n}\sin n\varphi$

$$\Sigma n\varrho^n\sin n\varphi\,\Sigma\frac{1}{t}\,\varDelta^2(\varrho^t,\ t\varphi) = \varrho\,\frac{\sin\varphi}{\varDelta(\varphi)} - \varrho^3\,\frac{\sin\varphi}{\varDelta(\varrho^3,\ \varphi)} \tag{17}$$

$\varphi = \frac{\pi}{2}$

$$\sum_{1.3.5\ldots}(-1)^{\frac{n-1}{2}}n\varrho^n\,\Sigma\frac{1}{t}(1+\varrho^{2t})^2 = \varrho\,\frac{(1-\varrho^2)^2}{1+\varrho^6} \tag{18}$$

(8) . . . $\Omega\sum_{1.3.5\ldots}\varrho^n\cos n\varphi\,\varDelta'(\varphi) = \sum_{1.3.5\ldots}\varrho^n\cos n\varphi - \sum_{1.3.5\ldots}\varrho^{3n}\cos n\varphi$

$$\sum_{1.3.5\ldots}\varrho^n\cos n\varphi\,\Sigma\varDelta'(\varrho^t,\ t\varphi) = \varrho\cos\varphi\left[\frac{1-\varrho^2}{\varDelta'\varphi} - \frac{1-\varrho^6}{\varDelta'(\varrho^3,\ \varphi)}\,\varrho^2\right] \tag{19}$$

$\varphi = 0$

$$\sum_{1.3.5\ldots}\varrho^n\,\Sigma(1-\varrho^{2t})^2 = \varrho\,\frac{1+\varrho^4}{1-\varrho^6} \tag{20}$$

$$\varphi = \frac{\pi}{2}$$

$$\sum_{2.4.6\ldots} (-1)^{\frac{n}{2}} \varrho^n \Sigma[1-(-1)^t \varrho^{2t}]^2 = 0 \tag{21}$$

$$(9)\ .\ .\ .\ \Omega \sum_{1.3.5\ldots} \varrho^n \sin n\varphi \,.\, \Delta'(\varphi) = \sum_{1,3.5\ldots} \varrho^n \sin n\varphi + \sum_{1.3.5\ldots} \varrho^{3n} \sin n\varphi$$

$$\sum_{1.3.5\ldots} \varrho^n \sin n\varphi\, \Sigma \Delta'(\varrho^t,\ t\varphi) = \varrho \sin\varphi \left[\frac{1+\varrho^2}{\Delta'(\varphi)} + \varrho^2 \frac{1+\varrho^6}{\Delta'(\varrho^3,\ \varphi)}\right] \tag{22}$$

$$\varphi = \frac{\pi}{2}$$

$$\sum_{1.3.5\ldots} (-1)^{\frac{n-1}{2}} \varrho^n \Sigma(1+\varrho^{2t})^2 = \varrho\, \frac{1+\varrho^4}{1+\varrho^6} \tag{23}$$

2. Allgemeinere Ergebnisse werden durch die Operation

$$\Omega(\varrho,\ \varphi,\ n^r),$$

wo r eine **positive ganze** Zal bedeutet, hervorgebracht.

Es entstehen Reihen, welche sich durch $r$malige Differentiation von

$$z = \frac{1}{1-\varrho x}, \quad x = e^{i\varphi}$$

nach φ ergeben.

Nach **Hoppe's** Theorie ist

$$D_\varphi{}^r z = i^r D_{i\varphi} z = i^r \left[\frac{E_1}{1\,!} x F'(x) + \frac{E_2}{2\,!} x^2 F''(x)\ .\ .\ .\ + \frac{E_r}{r\,!} x^r F^{(r)}(x)\right]$$

wo

$$F(x) = \frac{1}{1-\varrho x} \quad \text{und} \quad F^{(k)} = \frac{k\,!\ \varrho^k}{(1-\varrho x)^{k+1}}$$

$$E_p = \{D_\varphi{}^r (e^\varphi - 1)^p\}_0 = \binom{p}{0} p^r - \binom{p}{1} (p-1)^r + \binom{p}{2} (p-2)^r\ .\ .\ .$$
$$.\ .\ .\ + (-1)^{p-1} \binom{p}{p-1} 1^r$$

daher

$$D_\varphi{}^r z = i^r \left[E_1 \frac{\varrho x}{(1-\varrho x)^2} + E_2 \frac{\varrho^2 x^2}{(1-\varrho x)^3} + \ldots + E_r \frac{\varrho^r x^r}{(1-\varrho x)^{r+1}} \right]$$
$$= i^r \left[1^r \varphi x + 2^r \varrho^2 x^2 + \ldots \right]$$

somit, nach Trennung des Imaginären vom Reellen

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^r \varrho^n \begin{Bmatrix} \cos \\ \sin \end{Bmatrix} n\varphi = \sum_{k=1}^{k=r} \frac{\varrho^k}{[\varDelta(\varphi)]^{\frac{\overline{k+1}}{2}}} \times$$
$$\times \begin{Bmatrix} \cos \\ \sin \end{Bmatrix} \left(k\varphi + \overline{k+1} \operatorname{arctg} \frac{\varrho \sin\varphi}{1-\varrho\cos\varphi} \right) \qquad (24)$$

Auf dio Reihe (5) angewandt findet sich

$$\Omega\, \Sigma\, \varrho^n \sin n\varphi \,.\, \varDelta(\varphi) - \Sigma\, n^r \varrho^n \sin n\varphi$$

daher

$$\Sigma\, \varrho^n \sin n\varphi\, \Sigma\, t^r \varDelta(\varrho^t, t\varphi) =$$
$$\sum_{k=1}^{k=r} \frac{\varrho^k}{[\varDelta(\varphi)]^{\frac{\overline{k+1}}{2}}} \sin\left(k\varphi + k\overline{+1} \operatorname{arctg} \left(\frac{\varrho \sin\varphi}{1-\varrho\cos\varphi} \right) \right) \qquad (25)$$

Für $\varphi = \frac{\pi}{2}$ ist

$$\sum_{1.3.5\ldots} (-1)^{\frac{n-1}{2}} \varrho^n\, \Sigma\, t^r (1+\varrho^{2t}) =$$
$$= \sum_{k=1}^{k=r} \frac{\varrho^k}{(1+\varrho^2)^{\frac{\overline{k+1}}{2}}} \sin\left(k\frac{\pi}{2} + \overline{k+1} \operatorname{arctg} \varrho \right) \qquad (26)$$

3. Durch die Operation $\Omega\left(\varphi, \frac{1}{n^p}\right)$, wobei ϱ ungeändert bleibt, entstehen Reihen, 'welche mit Hilfo der **Bernonlli**'schen Fnnction

$$\beta(z, m) = z^m - \tfrac{1}{2} m z^{m-1} + \binom{m}{2} B_1 z^{m-2} - \binom{m}{4} B_2{}^{m-4} \ldots$$
$$\ldots + \left\{ (-1)^{\frac{m}{2}} \binom{m}{m-2} B_{\frac{m-2}{2}} z^2 \quad m \text{ gerade} \right.$$

$$\ldots + \left\{ (-1)^{\frac{m+1}{2}} \quad B_{\frac{m-1}{2}} z \right. \quad m \text{ ungerade}$$

summirt werden können; es ist

$$\sum_1^{\infty} \frac{1}{n^{2\nu}} \cos n\varphi = \frac{(2\pi)^{2\nu}}{2(2\nu)!}\left[B_\nu + (-1)^{\nu+1}\beta\left(\frac{\varphi}{2\pi}, 2\nu\right)\right] \tag{27}$$

$$\nu > 0$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2\nu+1}} \sin n\varphi = (-1)^{\nu+1} \frac{(2\pi)^{2\nu+1}}{2(2\nu+1)!}\beta\left(\frac{\varphi}{2\pi}, 2\nu+1\right) \tag{28}$$

$$0 \leqq \varphi \leqq 2\pi$$

Die aus den Reihen (4) bis (9) durch Ω entstehenden Beziehungen, welche die in der Gleichung (3) ausgesprochene Form besitzen, werden für **jeden** Wert von φ Giltigkeit haben; es steht daher frei, dieselbe nur für jenen Wertbereich von φ in Anspruch zu nehmen, für welchen $\Sigma \frac{1}{n^\nu} F(\varrho^n, n\varphi)$ summirbar wird, nämlich für

$$0 \leqq \varphi \leqq 2\pi$$

$$(5) \ldots \Omega\left(\varphi, \frac{1}{n^{2\nu+1}}\right) \Sigma \varrho^n \sin n\varphi \,.\, \Delta(\varphi) = \varrho \Sigma \frac{1}{n^{2\nu+1}} \sin n\varphi$$

$$\sum_1 \sin n\varphi \, \Sigma \frac{\varrho^{\frac{n}{t}}}{t^{2\nu+1}} \Delta(t\varphi) = (-1)^{\nu+1} \frac{(2\pi)^{2\nu+1}}{2(2\nu+1)!} \varrho\beta\left(\frac{\varphi}{2\pi}, 2\nu+1\right) \tag{29}$$

Für $\varphi = \frac{\pi}{2}$ ist

$$\Delta\left(t\frac{\pi}{2}\right) = 1 + \varrho^2$$

diesen gemeinsamen Factor auf die rechte Seite gebracht, ist dann

$$\sum_{1.3.5\ldots} (-1)^{\frac{n-1}{2}} \Sigma \frac{\varrho^{\frac{n}{t}}}{t^{2\nu+1}} = \frac{\varrho}{1+\varrho^2} U_{2\nu+1} \tag{30}$$

$$U_{2\nu+1} = \sum_{1.3.5\ldots} \frac{(-1)^{\frac{n-1}{2}}}{n^{2\nu+1}} = \frac{r^{2\nu}\pi^{2\nu+1}}{2^{2\nu+2}(2\nu)!}$$

wo $r_{2\nu}$ der νte Secanten-Coefficient ist,

(7) . . . $\Omega \Sigma n \varrho^n \sin n\varphi \,.\, \Delta^2(\varphi) = \varrho(1-\varrho^2) \sum_1 \frac{1}{n^{2\nu+1}} \sin n\varphi$

$$\sum_1 n \sin n\varphi \, \Sigma \frac{\varrho^{\frac{n}{t}}}{t^{2\nu+2}} \Delta^2(t\varphi) = (-1)^{\nu+1} \frac{(2\pi)^{2\nu+1}}{2(2\nu+1)!} \varrho(1-\varrho^2) \times \beta\left(\frac{\varphi}{2\pi}, 2\nu+1\right) \quad (31)$$

$$\varphi = \frac{\pi}{2}, \quad \Delta^2\left(t\frac{\pi}{2}\right) = (1+\varrho^2)^2$$

$$\sum_{1.3.5\ldots} (-1)^{\frac{n-1}{2}} n \Sigma \frac{\varrho^{\frac{n}{t}}}{t^{2\nu+2}} = \varrho \frac{1-\varrho^2}{(1+\varrho^2)^2} U_{2\nu+1} \quad (32)$$

(8) . . . $\Omega\left(\varphi, \frac{1}{n^{2\nu}}\right) \sum_{1.3.5\ldots} \varrho^n \cos n\varphi \,.\, \Delta'(\varphi) =$

$$\varrho(1-\varrho^2) \sum_{1.3.5\ldots} \frac{1}{n^{2\nu}} \cos n\varphi$$

$$\sum_{1.3.5\ldots} \cos n\varphi \, \Sigma \frac{\varrho^{\frac{n}{t}}}{t^{2\nu}} \Delta'(t\varphi) =$$

$$(-1)^{\nu+1} \frac{(2\pi)^{2\nu}}{2(2\nu)!} \varrho(1-\varrho^2) \left[\left(1-\frac{1}{2^{2\nu}}\right) B_\nu + \beta\left(\frac{\varphi}{2\pi}, 2\nu\right) - \frac{1}{2^{2\nu}} \beta\left(\frac{\varphi}{\pi}, 2\nu\right)\right] \quad (33)$$

$$\varphi = 0, \quad \Delta'(t\varphi) = (1-\varrho^2)^2$$

$$\sum_{n=1.3.5\ldots} \Sigma \frac{\varrho^{\frac{n}{t}}}{t^{k\nu}} = \frac{\varrho}{1-\varrho^2} T_{2\nu} \quad (34)$$

$$T_{2\nu} = \sum_{1.3.5\ldots} \frac{1}{n^{2\nu}} = \frac{(2^{2\nu}-1) B_\nu}{2(2\nu)!} \pi^{2\nu}$$

Sämtliche Reihen von (29) bis (34) sind giltig für $\varrho^2 < 1$ und $0 \leqq \varphi \leqq 2\pi$.

4. Die durch $\Omega\left(\varrho, \varphi, \frac{1}{n}\right)$ erzeugten Reihen werden summirt mittels der Formeln

$$\sum_{1.2.3\ldots} \frac{1}{n} \varrho^n \cos n\varphi = -\tfrac{1}{2}\log(1-2\varrho\cos\varphi+\varrho^2) = -\tfrac{1}{2}\log\Delta(\varphi) \quad (35)$$

$$\sum_{1.2.3\ldots} \frac{1}{n} \varrho^n \sin n\varphi = \operatorname{arctg}\left(\frac{\varrho\sin\varphi}{1-\varrho\cos\varphi}\right) \quad (36)$$

$\varrho^2 < 1$, φ beliebig

(4) . . . $\Omega\, \Sigma \varrho^n \cos n\varphi \,.\, \Delta(\varphi) = \Sigma \frac{1}{n} \varrho^n \cos n\varphi - \Sigma \frac{1}{n} \varrho^{2n}$

$$\Sigma \varrho^n \cos n\varphi\, \Sigma \frac{1}{t} \Delta(t\varphi,\ \varrho^t) = \tfrac{1}{2}\log\frac{(1-\varrho^2)^2}{\Delta(\varphi)} \quad (37)$$

$$\varphi = 0,\quad \Delta(0,\ \varrho^t) = (1-\varrho^t)^2,\quad \Delta(0) = (1-\varrho)^2$$

$$\Sigma \varrho^n \Sigma \frac{1}{t}(1-\varrho^t)^2 = \log(1+\varrho) \quad (38)$$

$$\varphi = \pi,\quad \Delta(t\pi,\ \varrho^t) = (1-(-1)^t\varrho^t)^2,\quad \Delta(\pi) = (1+\varrho)^2$$

$$\sum_{2.4\ldots} \varrho^n \Sigma \frac{1}{t}(1-(-1)^t\varrho^t)^2 - \sum_{1.3.5\ldots} \varrho^n \Sigma \frac{1+\varrho^{2t}}{t} = \log(1-\varrho) \quad (39)$$

$$\varphi = \frac{\pi}{2},\ \Delta\left(t\frac{\pi}{2},\ \varrho^t\right) = \left(1-(-1)^{\frac{t}{2}}\varrho^t\right)^2 \quad (t \text{ gerade}),$$

$$\Delta\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1+\varrho^2$$

$$\sum_{2.4\ldots} (-1)^{\frac{n}{2}} \varrho^n \Sigma \frac{1}{t}\left(1-(-1)^{\frac{t}{2}}\varrho^t\right)^2 = \tfrac{1}{2}\log\frac{(1-\varrho^2)^2}{1+\varrho^2} \quad (40)$$

(5) . . . $\Omega\, \Sigma \varrho^n \sin n\varphi \,.\, \Delta(\varphi) = \Sigma \frac{1}{n} \varrho^n \sin n\varphi$

$$\Sigma \varrho^n \sin n\varphi\, \Sigma \frac{1}{t} \Delta(\varrho^t,\ t\varphi) = \operatorname{arctg}\left(\frac{\varrho\sin\varphi}{1-\varrho\cos\varphi}\right) \quad (41)$$

$$\varphi = \frac{\pi}{2},\quad \Delta\left(\varrho_{,}\ t\frac{\pi}{2}\right) = 1+\varrho^{2t},\ t \text{ ungerade}$$

$$\sum_{1.3.5\ldots} (-1)^{\frac{n-1}{2}} \varrho^n \Sigma \frac{1+\varrho^{2t}}{t} = \operatorname{arctg}\varrho \quad (42)$$

(6) . . . $\Omega \Sigma n \varrho^n \cos n\varphi \,.\, \Delta^2(\varphi) =$

$$\Sigma \frac{1}{n} \varrho^n \cos n\varphi + \Sigma \frac{1}{n} \varrho^{3n} \cos n\varphi - 2\Sigma \frac{1}{n} \varrho^{2n}$$

$$\Sigma n \varrho^n \cos n\varphi \, \Sigma \frac{1}{t^2} \Delta^2(\varrho^t, t\varphi) = \tfrac{1}{2} \log \frac{(1-\varrho^2)^4}{\Delta(\varrho, \varphi) \,.\, \Delta(\varrho^3, \varphi)} \tag{43}$$

$$\varphi = 0, \quad \Delta^2(\varrho^t, 0) = (1-\varrho^t)^4, \quad \Delta(0) = (1-\varrho)^2$$

$$\Sigma n \varrho^n \Sigma \frac{1}{t^2} (1-\varrho^t)^4 = \log \frac{(1+\varrho)^2}{1+\varrho+\varrho^2} \tag{44}$$

$$\varphi = \frac{\pi}{2}, \quad \Delta^2\left(\varrho^t, t\frac{\pi}{2}\right) = \left(1 - (-1)^{\frac{t}{2}} \varrho^t\right)^4$$

$$\Delta\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1 + \varrho^2$$

$$\sum_{2.4\ldots} (-1)^{\frac{n}{2}} n \varrho^n \Sigma \frac{1}{t^2} \left(1 - (-1)^{\frac{t}{2}} \varrho^t\right)^4 = \tfrac{1}{2} \log \frac{(1-\varrho^2)^4}{(1+\varrho^2)(1+\varrho^6)} \tag{45}$$

$$\varphi = \pi, \quad \Delta^2(\varrho^t, t\pi) = (1-(-1^t \varrho^t)^4, \quad \Delta(\pi) = (1+\varrho)^2$$

$$\sum_{1.2\ldots} (-1)^n n \varrho^n \Sigma \frac{1}{t^2} (1-(-1)^t \varrho^t)^4 = \log \frac{(1-\varrho)^2}{1-\varrho+\varrho^2} \tag{44'}$$

Diese Formel geht übrigens auch aus (44) durch Vertauschung von ϱ mit $-\varrho$ hervor.

(7) . . . $\Omega \Sigma n \varrho^n \sin n\varphi \,.\, \Delta^2(\varphi) = \Sigma \frac{\varrho^n}{n} \sin n\varphi - \Sigma \frac{\varrho^{3n}}{n} \sin n\varphi$

$$\Sigma n \varrho^n \sin n\varphi \, \Sigma \frac{1}{t^2} \Delta^2(t\varphi, \varrho^t) =$$

$$\operatorname{arctg}\left(\frac{\varrho \sin\varphi}{1-\varrho\cos\varphi}\right) - \operatorname{arctg}\left(\frac{\varrho^3 \sin\varphi}{1-\varrho^3\cos\varphi}\right) \tag{46}$$

$$\varphi = \frac{\pi}{2}, \quad \Delta^2\left(t\frac{\pi}{2}\right) = (1+\varrho^{2t}) \quad (t \text{ ungerade})$$

$$\sum_{1.3.5\ldots} (-1)\, n \varrho^n \Sigma \frac{(1+\varrho^{2t})^2}{t^2} = \operatorname{arctg} \varrho - \operatorname{arctg} \varrho^3 \tag{47}$$

(8) . . . $\Omega \sum_{1.3.5\ldots} \varrho^n \cos n\varphi \,.\, \Delta'(\varphi) =$

$$\sum_{1.3.5\ldots} \frac{\varrho^n}{n} \cos n\varphi - \sum_{1.3.5\ldots} \frac{\varrho^{3n}}{n} \cos n\varphi$$

$$\sum_{1.3.5...} \varrho^n \cos n\varphi \,\Sigma \frac{1}{t}\, \Delta'(t\varphi,\, \varrho^t) = \tfrac{1}{4}\log \frac{\Delta'(\varrho,\, \varphi)}{\Delta^2(\varphi,\, \varrho)} \cdot \frac{\Delta^2(\varphi,\, \varrho^3)}{\Delta'(\varphi,\, \varrho^3)} \tag{48}$$

$$\varphi = 0, \quad \Delta'(t\varphi) = (1-\varrho^t)^2$$

$$\sum_{1.3.4...} \varrho^n \,\Sigma\, \frac{(1-\varrho^t)^2}{t} = \tfrac{1}{2}\log \frac{(1+\varrho+\varrho^2)^2}{1+\varrho^2+\varrho^4} \tag{49}$$

(9) . . . $\Omega \sum_{1.3.5...} \varrho^n \sin n\varphi \,.\, \Delta'(\varphi) =$

$$\sum_{1.3.5...} \frac{1}{n}\varrho^n \sin n\varphi + \sum_{1.3.5...} \frac{1}{n}\varrho^{3n} \sin n\varphi$$

$$\sum_{1.3.5..} \varrho^n \sin n\varphi \,\Sigma \frac{1}{t}\, \Delta'(t\varphi,\, \varrho^t) =$$

$$\operatorname{arc\,tg}\left(\frac{\varrho\sin\varphi}{1-\varrho\cos\varphi}\right) - \tfrac{1}{2}\operatorname{arc\,tg}\left(\frac{\varrho^2\sin 2\varphi}{1-\varrho^2\cos 2\varphi}\right)$$

$$+ \operatorname{arc\,tg}\left(\frac{\varrho^3\sin\varphi}{1-\varrho^3\cos\varphi}\right) - \tfrac{1}{2}\operatorname{arc\,tg}\left(\frac{\varrho^6\sin 2\varphi}{1-\varrho^6\cos 2\varphi}\right) \tag{50}$$

$$\varphi = \frac{\pi}{2}, \quad \Delta'\left(t\frac{\pi}{2},\, \varrho^t\right) = (1-(-1)^t\varrho^{2t})^2$$

$$\sum_{1.3.5...} (-1)^{\frac{n-1}{2}} \varrho^n \,\Sigma \frac{1}{t}(1-(-1)^t\varrho^{2t})^2 = \operatorname{arctg}\varrho + \operatorname{arctg}\varrho^3 \tag{51}$$

Die Formeln von (37) bis (51) gelten bei beliebigem φ für $\varrho^2 < 1$.

Mit Beachtung des Umstandes, dass die Reihe $\frac{\Sigma\varrho^n\cos n\varphi}{n}$ für $0 \leqq \varphi < \pi$ noch für $\varrho = \pm 1$ convergent ist, während $\Sigma\frac{\varrho^{2n}}{n}$ für diese Werte divergirt, kann man in der Formel (48), in welcher letztere Reihe nicht erscheint,

$$\varrho = +1$$

setzen und erhält

$$\sum_{1.3.5...} \cos n\varphi \,\Sigma \frac{1}{t}\sin^2 t\varphi = 0 \tag{52}$$

$$0 \leqq \varphi \leqq \pi$$

hieraus folgt für

$$\varphi = \frac{\pi}{4}$$

$$\sum_{1.3.5\ldots} (-1)^{\frac{n+(-1)^{\frac{n+1}{2}}}{4}} \quad \Sigma \frac{1}{t} = 0 \tag{53}$$

oder

$$\sum_{1.5.9\ldots} (-1)^{\frac{n-1}{4}} \Sigma \frac{1}{t} = \sum_{n=3.7.11\ldots} (-1)^{\frac{n-3}{4}} \Sigma \frac{1}{t} \tag{53'}$$

5. Nimmt man die Operation Ω so vor, dass man die ans den Stammreihen durch die Einsetzungen ϱ^r, $r\varphi$ erhaltenen Reihen vorerst mit dem Vorzeichen $(-1)^r$ versieht nnd dsnn so verfährt wie früher, so entstehen aus den Reihen (4) nnd (6) Resnltate, welche für $\varrho = \pm 1$ noch richtig hleihen, wenn die Amplitnde φ der Bedingnng

$$0 < \varphi < \pi$$

genügt.

(4) . . . $\Omega' \Sigma \varrho^n \cos n\varphi \,.\, \Delta(\varphi) = \Sigma(-2)^r \frac{\varrho^r}{r} \cos r\varphi - \Sigma(-1)^r \frac{\varrho^{2r}}{r}$

$$\Sigma \varrho^n \cos n\varphi \, \Sigma(-1)^t \frac{1}{t} \Delta(t\varphi, \varphi^t) = -\tfrac{1}{2} \log \frac{\Delta(\varphi)}{\Delta'(\varphi)} + \log(1+\varrho^2) \tag{54}$$

$$\varrho = +1, \;\; \Delta(t\varphi) = 4 \sin^2 \frac{t\varphi}{2}$$

$$\sum_{1.2.3\ldots} \cos n\varphi \, \Sigma(-1)^t \frac{1}{t} \sin^2 \frac{t\varphi}{2} = \tfrac{1}{4} \log 4 \cos \frac{\varphi}{2} \tag{55}$$

$$\varphi = \frac{\pi}{2}$$

$$\sum_{2.4.6\ldots} (-1)^{\frac{n}{2}} \Sigma(-1)^t \frac{1}{t} \sin^2 \frac{t\pi}{4} = \tfrac{3}{8} \log 2 \tag{56}$$

$$\varrho = -1, \;\; \Delta(t\varphi) = 4 \cos^2 \frac{t\varphi}{2}$$

$$\Sigma(-1)^n \cos n\varphi \, \Sigma(-1)^t \frac{1}{t} \cos^2 \frac{t\varphi}{2} = \tfrac{1}{4} \log\left(4 \sin \frac{\varphi}{2}\right) \tag{57}$$

$$\varphi = \frac{\pi}{2}$$

$$\sum_{2.4\ldots} (-1)^{\frac{n}{2}} \Sigma(-1)^t \frac{1}{t} \cos^2 \frac{t\pi}{4} = \tfrac{3}{8} \lg 2 \tag{58}$$

(6) . . . $\Omega' \Sigma n\varrho^n \cos n\varphi \,.\, \Delta^2(\varphi) = \Sigma(-1)^r \frac{\varrho^r}{r} \cos r\varphi$

$$+ \Sigma(-1)^r \frac{\varphi^{2r}}{r} \cos r\varphi - 2\Sigma(-1)^r \frac{\varrho^r}{n}$$

$\Sigma n\varrho^n \cos n\varphi\, \Sigma(-1)^t \frac{1}{t^2} \Delta^2(t\varphi) =$

$$-\tfrac{1}{2} \lg \frac{\Delta(\varrho, \varphi)}{\Delta(\varrho^2, 2\varphi)} \frac{\Delta(\varrho^2, \varphi)}{\Delta(\varrho^4, 2\varphi)} + 2 \lg (1 + \varrho^2) \tag{59}$$

$$\varrho = \pm 1, \quad \Delta(t\varphi) = \begin{cases} 4 \sin \frac{2t\varphi}{2} \\ 4 \cos^2 \frac{t\varphi}{2} \end{cases}$$

$$\Sigma n \cos n\varphi\, \Sigma(-1)^t \frac{1}{t^2} \sin^4 \frac{t\varphi}{2} = \tfrac{1}{8} \lg 4 \cos \frac{\varphi}{2} \tag{60}$$

$$\Sigma(-1)^n n \cos n\varphi\, \Sigma(-1)^t \frac{1}{t^2} \cos^4 \frac{t\varphi}{2} = \tfrac{1}{8} \lg 4 \sin \frac{\varphi}{2} \tag{61}$$

$$\varphi = \frac{\pi}{2}$$

$$\sum_{2.4.6\ldots} (-1)^{\frac{n}{2}} \Sigma(-1)^t \frac{1}{t^2} \begin{Bmatrix}\sin\\ \cos\end{Bmatrix}^4 \frac{t\pi}{4} = \frac{3}{16} \lg 2 \tag{62}$$

oder

$$\left.\begin{array}{l} \sum\limits_{2.4.6\ldots} (-1)^{\frac{n}{2}} n \left[\sum\limits_{2.6\ldots} \frac{1}{t^2} - \frac{1}{4} \sum\limits_{1.3.5\ldots} \frac{1}{t^2} \right] \\ \sum\limits_{2.4.6\ldots} (-1)^{\frac{n}{2}} n \left[\sum\limits_{4.8\ldots} \frac{1}{t^2} - \frac{1}{4} \sum\limits_{1.3.5\ldots} \frac{1}{t^2} \right] \end{array}\right\} = \frac{3}{16} \lg 2 \tag{62'}$$

hieraus folgt noch

$$\sum_{2.4.6\ldots} (-1)^{\frac{n}{2}} n \sum_{2.6\ldots} \frac{1}{t^2} = \sum_{2.4.8\ldots} (-1)^{\frac{n}{2}} n \sum_{4.8\ldots} \frac{1}{t^2} \tag{62''}$$

6. Aus $\Omega\left(\varrho,\ \varphi,\ \frac{1}{n!}\right)$ gehen nachstehende Reihen hervor:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\varrho^n}{n!} \cos n\varphi = e^{\varrho\cos\varphi} \cos(\varrho \sin \varphi) \tag{63}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \varrho^n \sin n\varphi = e^{\varrho\cos\varphi} \sin(\varrho \sin \varphi) \tag{64}$$

die gelten für jedes ϱ und φ.

(4) . . . $\Omega \Sigma \varrho^n \cos n\varphi \,.\, \Delta(\varphi) = \Sigma \frac{\varrho^r}{r!} \cos r\varphi - \Sigma \frac{\varrho^{2r}}{r!}$

$$\Sigma \varrho^n \cos n \varphi\, \Sigma \frac{1}{t!} \Delta(t\varphi,\ \varrho^t) = e^{\varrho\cos\varphi} \cos(\varrho \sin \varphi) - e^{\varrho^2} \tag{65}$$

$$\varphi = 0; \qquad \sum_{1.2.3\ldots} \varrho^n \Sigma \frac{1}{t!} (1 - \varrho^t)^2 = e^{\varrho} - e^{\varrho^2} \tag{66}$$

$\varphi = \frac{\pi}{2};$

$$\sum_{2,4\ldots} (\ \ 1)^{\frac{n}{2}} \varrho^n\, \Sigma \frac{1}{t!} \left(1 - 2\varrho^t \cos \frac{t\pi}{2} + \varrho^{2t}\right) = \cos \varrho - e^{\varrho^2} \tag{67}$$

$$\varphi = \pi; \sum_{1.3.5\ldots} (-1)^n \varrho^n \Sigma \frac{1}{t!} (1 - (-1)^t \varrho^t) = e^{-\varrho} - e^{\varrho^2} \tag{68}$$

(5) . . . $\Omega \Sigma \varrho^n \sin n\varphi \,.\, \Delta(\varphi) = \Sigma \frac{\varrho^r}{r!} \sin r\varphi$

$$\Sigma \varrho^n \sin n\varphi\, \Sigma \frac{1}{t!} \Delta(\varrho^t,\ t\varphi) = e^{\varrho\cos\varphi} \sin(\varrho \sin \varphi) \tag{69}$$

$$\varphi = \frac{\pi}{2}; \qquad \sum_{1.3.5\ldots} (-1)^{\frac{n-1}{2}} \varrho^n\, \Sigma \frac{1}{t!} (1 + \varrho^{2t}) = \sin \varrho \tag{70}$$

(6) . . . $\Omega \Sigma n \varrho^n \cos n\varphi \,.\, \Delta^2(\varphi) =$

$$\Sigma \frac{\varrho^r}{r!} \cos r\varphi + \Sigma \frac{\varrho^{3r}}{r!} \cos r\varphi - 2 \Sigma \frac{\varrho^{2r}}{r!}$$

$$\Sigma n\varrho^n \cos n\varphi \;.\; \Sigma \frac{1}{t!\,t} \Delta^2(\varrho^t,\, t\varphi) = e^{\varrho\cos\varphi} \cos(\varrho \sin\varphi) + e^{\varrho^3\cos\varphi} \cos(\varrho^3 \sin\varphi) - 2e^{\varrho^2} \qquad (71)$$

$$\varphi = 0; \qquad \Sigma n\varrho^n \Sigma \frac{1}{t!\,t} (1-\varrho^t)^4 = e^{\varrho} - 2e^{\varrho^2} + e^{\varrho^3} \qquad (72)$$

$$\varphi = \frac{\pi}{2};$$

$$\sum_{n=1.3.5\ldots} (-1)^{\frac{n-1}{2}} n\varrho^n \Sigma \frac{1}{t!\,t} (1+\varrho^{2t})^2 = \cos\varrho + \cos\varrho^3 - 2e^{\varrho^2} \qquad (73)$$

$$\varphi = \pi;$$

$$\Sigma (-1)^n n\varrho^n \Sigma \frac{1}{t!\,t} (1-(-1)^t \varrho^t)^4 = e^{-\varrho} - 2e^{\varrho^2} + e^{-\varrho^3} \qquad (74)$$

$$(7)\;.\;.\;.\;\Omega\, \Sigma n\varrho^n \sin n\varphi \;.\; \Delta^2(\varphi) = \Sigma \frac{\varrho^r}{r!} \sin r\varphi - \Sigma \frac{\varrho^{3r}}{r!} \sin r\varphi$$

$$\Sigma n\varrho^n \sin n\varphi\, \Sigma \frac{1}{t!\,t} \Delta^2(\varrho^t,\, t\varphi) = e^{\varrho\cos\varphi} \sin(\varrho\sin\varphi) - e^{\varrho^3\cos\varphi} \sin(\varrho^3 \sin\varphi) \qquad (75)$$

$$\varphi = \frac{\pi}{2};$$

$$\sum_{1,3,5\ldots} (-1)^{\frac{n-1}{2}} n\varrho^n\, \Sigma \frac{1}{t!\,t} (1+\varrho^{2t})^2 = \sin\varrho - \sin\varrho^3 \qquad (76)$$

Sämtliche Reihen gelten bei beliebigem φ für $\varrho^2 < 1$.

7. Mittelst $\Omega\left(\varrho,\, \varphi,\, \binom{m}{n}\right)$, wo m ein Bruch oder eine negative ganze Zal ist, gelangt man zu

$$1 + \Sigma \binom{m}{n} \varrho^n \cos n\varphi = \Delta_1^{\frac{m}{2}}(\varphi) \cos\left(m \operatorname{arctg} \frac{\varrho\sin\varphi}{1+\varrho\cos\varphi}\right)$$

$$1 + \Sigma \binom{m}{n} \varrho^n \sin n\varphi = \Delta_1^{\frac{m}{2}}(\varphi) \sin\left(m \operatorname{arctg} \frac{\varrho\sin\varphi}{1+\varrho\cos\varphi}\right)$$

$$\Delta_1(\varphi) = 1 + 2\varrho\cos\varphi + \varrho^2$$

$$(4) \ldots \Omega \Sigma \varrho^n \cos n\varphi \,.\, \Delta_1(\varphi) = \Sigma \binom{m}{n} \varrho^n \cos n\varphi - \Sigma \binom{m}{n} \varrho^{2n}$$

$$\Sigma \varrho^n \cos n\varphi \, \Sigma \binom{m}{t} \Delta_1(t\varphi,\ \varrho^t) = -(1+\varrho^2)^m$$

$$+ \Delta_1^{\frac{m}{2}}(\varphi) \cos\left(m \operatorname{arc\,tg} \frac{\varrho \sin\varphi}{1+\varrho\cos\varphi}\right)$$

$$\varphi = 0; \quad \sum_{1.2.3\ldots} \varrho^n \Sigma \binom{m}{t} (1-\varrho^t)^2 = (1+\varrho)^m - (1+\varrho^2)^m \qquad (77)$$

$$\varphi = \frac{\pi}{2}; \quad \sum_{2.4.6\ldots} (-1)^{\frac{n}{2}} \varrho^n \, \Sigma \binom{m}{t} \left(1 - 2\varrho^t \cos\frac{t\pi}{2} + \varrho^{2t}\right)$$

$$= -(1+\varrho^2) + (1+\varrho^2)^{\frac{m}{2}} \cos(m \operatorname{arc\,tg} \varrho) \qquad (78)$$

$$\varphi = \pi; \ \Sigma(-1)^n \varrho^n \Sigma \binom{m}{t} [1-(-1)^t \varrho^t]^2 = (1-\varrho)^m - (1+\varrho^2)^m \ (79)$$

$$(5) \ldots \Omega \Sigma \varrho^n \sin n\varphi \,.\, \Delta(\varphi) = \Sigma \binom{m}{n} \varrho^n \sin n\varphi$$

$$\Sigma \varrho^n \sin n\varphi \, \Sigma \binom{m}{t} \Delta(\varrho^t,\ \varphi t) =$$

$$= -1 + \Delta_1^{\frac{m}{2}}(\varphi) \sin\left(m \operatorname{arc\,tg} \frac{\varrho\sin\varphi}{1+\varrho\cos\varphi}\right) \qquad (80)$$

$$\varphi = \frac{\pi}{2}; \quad \sum_{1.3.5\ldots} (-1)^{\frac{n-1}{2}} \varrho^n \, \Sigma \binom{m}{t} (1+\varrho^{2t}) =$$

$$-1 + (1+\varrho^2)^{\frac{m}{2}} \sin(m \operatorname{arc\,tg} \varrho) \qquad (81)$$

$$(6)\ .\ .\ .\ \Omega\Sigma n\varrho^n \cos n\varphi\ .\ \Delta^2(\varphi) = \Sigma\binom{m}{n}\varrho^n \cos n\varphi$$
$$+ \Sigma\binom{m}{n}\varrho^{3n}\cos n\varphi - 2\Sigma\binom{m}{u}\varrho^{2n}$$

$$\Sigma n\varrho^n \cos n\varphi\, \Sigma \frac{1}{t}\binom{m}{t}\Delta^2(\varrho^t,\ t\varphi) =$$

$$\Delta_1^{\frac{m}{2}}(\varphi,\ \varrho)\cos\left(m \operatorname{arc\,tg}\frac{\varrho\sin\varphi}{1+\varrho\cos\varphi}\right)$$

$$+\Delta_1^{\frac{m}{2}}(\varrho^3,\varphi)\cos\left(m \operatorname{arc\,tg}\frac{\varrho^3\sin\varphi}{1+\varrho^3\cos\varphi}\right) - (1+\varrho^2)^m \qquad (82$$

$\varphi = 0$;

$$\Sigma n\varrho^n \Sigma\frac{1}{t}\binom{m}{t}(1-\varrho^t)^4 = (1+\varrho)^m + (1+\varrho^3)^m - (1+\varrho^2)^m \qquad (83)$$

$$\varphi = \frac{\pi}{2};\quad \underset{2.4\ldots}{\Sigma}(-1)^{\frac{n}{2}} n\varrho^n \Sigma\frac{1}{t}\binom{m}{t}\left(1-2\varrho^t\cos\frac{t\pi}{2}+\varrho^{2t}\right)^2$$
$$= (1+\varrho^2)^{\frac{m}{2}}\cos(m \operatorname{arc\,tg}\varrho) + (1+\varrho^6)^{\frac{m}{2}}\cos(m \operatorname{arc\,tg}\varrho^3) - (1+\varrho^2)^m$$
$$(84)$$

$$\varphi=\pi;\ \Sigma(-1)^n n\varrho^n\Sigma\frac{1}{t}\binom{m}{t}(1-(-1)^t\varrho^t)^4 = (1-\varrho)^m - (1+\varrho^2)^m$$
$$+(1-\varrho^3)^m \qquad (85)$$

$$(7)\ .\ .\ .\ \Omega\Sigma n\varrho^n \sin n\varphi\ .\ \Delta^2(\varphi) = \Sigma\binom{m}{n}\varrho^n\sin n\varphi$$
$$- \Sigma\binom{m}{n}\varrho^{3n}\sin n\varphi$$

$$\Sigma n\varrho^n \sin n\varphi\,\Sigma\frac{1}{t}\binom{m}{t}\Delta^2(\varrho^t,\ t\varphi) =$$

$$\Delta_1^{\frac{m}{2}}(\varphi,\ \varrho)\sin\left(m \operatorname{arc\,tg}\frac{\varrho\sin\varphi}{1+\varrho\cos\varphi}\right)$$

$$- \Delta_1^{\frac{m}{2}} (\varrho^3, \varphi) \sin \left(m \operatorname{arc\,tg} \frac{\varrho^3 \sin\varphi}{1+\varrho^3 \cos\varphi} \right) \tag{86}$$

$$\varphi = \frac{\pi}{2}; \quad \sum_{1.3.5\ldots} (-1)^{\frac{n-1}{2}} n\varrho^n \Sigma \frac{1}{t} \binom{m}{t} (1+\varrho^{2t})^2 =$$

$$(1+\varrho^2)^{\frac{m}{2}} \sin(m \operatorname{arc\,tg} \varrho) - (1+\varrho^6)^{\frac{m}{2}} \sin(m \operatorname{arc\,tg} \varrho^3) \tag{87}$$

8. Die Operation $\Omega\left(\varrho, \varphi, \frac{\mu}{n^2-\mu^2}\right)$ führt zu

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu \cos n\varphi}{n^2-\mu^2} = -\frac{\pi}{2} \cdot \frac{\cos\mu(\pi-\varphi)}{\sin\mu\pi} + \frac{1}{2\mu} \tag{88}$$

wo μ keine ganze Zal ist, und φ der Bedingüng

$$0 \leq \varphi \leq 2\pi$$

unterworfen ist.

Da dieselbe ϱ ungeändert lässt, so kann sie auch nur auf die Reihe (8), welche kein von $\cos\varphi$ freies Glied im Zäler enthält, angewendet werden; man erhält, wenn nur ungerade Vielfache von φ genommen werden,

$$(8) \ldots \Omega \Sigma \varrho^n \cos n\varphi \, \Delta'(\varphi) = \varrho(1-\varrho^2) \sum_{n=1.3,\ldots} \frac{\mu}{n^2-\mu^2} \cos n\varphi$$

$$0 \leq \varphi \leq \pi$$

$$\sum_{1.3.5\ldots} \cos n\varphi \sum^{\frac{n}{t}} \frac{\varrho}{t^2-\mu^2} \Delta'(t\varphi) =$$

$$\frac{\pi}{4\mu} \varrho(1-\varrho^2) \left(\frac{\cos\frac{\mu}{2}(\pi-2\varphi)}{\sin\frac{\mu\pi}{2}} - 2\frac{\cos\mu(\pi-\varphi)}{\sin\mu\pi} \right) \tag{89}$$

$$\varphi=0;\ \sum_{n=1.3.5\ldots} \sum^{\frac{n}{t}} \frac{\varrho}{t^2-\mu^2} = \frac{\pi}{4\mu}\,\varrho\,\frac{1-\varrho^2}{1+\varrho^4}\left(\cot\frac{\mu\pi}{2} - 2\cot\mu\pi\right) \qquad (90)$$

$\mu = \frac{1}{2}$

$$\sum_{n=1.2.5\ldots} \sum \varrho^{\frac{n}{t}} \frac{1}{4t^2-1} = \frac{\pi}{8}\,\varrho\,\frac{1-\varrho^2}{1-\varrho^4} \qquad (90')$$

$\varrho^2 < 1$

9. Die Operation $\Omega\left(\varphi, \frac{n}{n^2-\mu^2}\right)$, wo μ keine ganze Zal ist, erzeugt mit Benutzung von

$$\sum \frac{n \sin n\varphi}{n^2-\mu^2} = \frac{\pi}{2}\,\frac{\sin\mu(\pi-\varphi)}{\sin\mu\pi}$$

$$0 \leq \varphi \leq 2\pi$$

aus (5) . . . $\Omega \Sigma \varrho^n \sin n\varphi\,.\,\Delta(\varphi) = \varrho\,\Sigma \frac{n \sin n\varphi}{n^2-\mu^2}$

die Identität

$$\Sigma n \sin n\varphi\, \Sigma \frac{1}{t}\, \varrho^{\frac{n}{t}} \frac{\Delta(t\varphi)}{t^2-\mu^2} = \frac{\pi}{2}\,\varrho\,\frac{\sin\mu(\pi-\varphi)}{\sin\mu\pi} \qquad (91)$$

$$\varphi = \frac{\pi}{2};\quad \sum_{1.3.5\ldots} (-1)^{\frac{n-1}{2}}\, n \Sigma_t^1 \frac{\varrho^{\frac{n}{t}}}{t^2-\mu^2} = \frac{\pi}{4}\,\frac{\varrho}{1+\varrho^2}\,\frac{1}{\cos\frac{\mu\pi}{2}} \qquad (92)$$

(7) . . . $\Omega \Sigma n \varrho^n \sin n\varphi\,.\,\Delta^2(\varphi) = \varrho(1-\varrho^2)\,\Sigma \frac{n \sin n\varphi}{n^2-\mu^2}$

$$\Sigma n \sin n\varphi\, \Sigma \varrho^{\frac{n}{t}} \frac{\Delta^2(t\varphi)}{t^2-\mu^2} = \frac{\pi}{2}\,\varrho(1-\varrho^2)\,\frac{\sin\mu(\pi-\varphi)}{\sin\mu\pi} \qquad (93)$$

$$\varphi = \frac{\pi}{2}; \quad \sum_{1.3.5\ldots} (-1)^{\frac{n-1}{2}} n \sum \frac{\varrho^{\frac{n}{t}}}{t^2-\mu^2} = \frac{\pi}{2}\,\varrho\,\frac{1-\varrho^2}{(1+\varrho^2)^2}\,\frac{1}{\cos\frac{\mu\pi}{2}} \qquad (94)$$

Wenn wieder nur ungerade Vielfache von φ substituirt werden, kommt aus

$$(9)\ldots\ \Omega\ \ \Sigma\ \ \varrho^n \sin n\varphi \,.\, \Delta'(\varphi) = \varrho(1+\varrho^2)\,\Sigma\,\frac{n\sin n\varphi}{n^2-\mu^2}$$

$$\sum_{1.3.5\ldots} n\sin n\varphi\, \sum_t \frac{\varrho^{\frac{n}{t}}\,\Delta'(t\varphi)}{t^2-\mu^2} =$$

$$\frac{\pi}{4}\varrho(1+\varrho^2)\left[2\,\frac{\sin\mu(\pi-\varphi)}{\sin\mu\pi} - \frac{\sin\frac{\mu}{2}(\pi-2\varphi)}{\sin\frac{\mu\pi}{2}}\right]$$

$$0 \leq \varphi \leq \pi \qquad (95)$$

Für $\mu = \frac{1}{2}$ ergiebt sich noch aus

$$(92)\ldots \sum_{1.3.5\ldots} (-1)^{\frac{n-1}{2}} n \sum \frac{1}{t}\cdot\frac{1}{4t^2-1}\cdot\varrho^{\frac{n}{t}} = \frac{\pi}{16}\sqrt{2}\,\frac{\varrho}{1+\varrho^2} \qquad (92')$$

$$(94)\ldots \sum_{1.3.5\ldots} (-1)^{\frac{n-1}{2}} n \sum \frac{1}{4t^2-1}\cdot\varrho^{\frac{n}{t}} = \frac{\pi}{8}\sqrt{2}\cdot\varrho\,\frac{1-\varrho^2}{(1+\varrho^2)^2} \qquad (94')$$

10. Wird die im Absatz (5) angegebene Modification auch bei den anderen Operationen angenommen, so ergeben sich Formeln, welche sich von den hier entwickelten nur dadurch unterscheiden. dass der Ausdruck unter dem zweiten Summenzeichen linker Hand das Vorzeichen $(-1)^t$ besitzt, während in dem rechtsseitigen Teile $-\varrho$ für $+\varrho$ steht.

Brünn, August 1891.

V.

Ueber die durch dielektrische und magnetische Polarisation hervorgerufenen Volum- und Formänderungen (Elektrostriction und Magnetostriction).

Von

Dr. F. Pockels.

Schon Volta hat im Jahre 1776 die Aufmerksamkeit auf die Tatsache gelenkt, dass sich das innere Volum einer Leydener Flasche bei deren Ladung vergrössert, und hat auch bereits richtig vermutet, dass der Grund jener Ausdehnung in der gegenseitigen Anziehung der Belegungen zu suchen sei.

Die erwähnte Erscheinung gerieth dann, wie es scheint, in Vergessenheit, bis sie 1864 von Govi [1]) wieder aufgefunden wurde doch erst 1878 wurde sie von Duter [2]) näher untersucht, welcher glaubte, es mit einer ganz neuen rätselhaften Wirkung der Elektricität zu tun zu haben. Der Arbeit Duter's folgten bald zahlreiche experimentelle und theoretische Untersuchungen über die Volum- und Formänderung dielektrischer Körper im elektrischen Felde. Das erhöhte Interesse, welches die Physiker seit 1879 diesem Gebiete

---

1) Govi, Nuovo Cimento XXI—XXII, p. 18—26, 1865—66; Atti della R. Accad. delle Scienze diTorino, I, 206—220, 1886; ferner auch Compt. rend. LXXXVII, p. 857, 1878.

2) Duter, Compt. rend. LXXXVII, p. 828, 960, 1038, 1878; LXXXVIII, 1260, 1879; auch Journ. de phys. VIII, p. 82, 1879.

der sogenannten **Elektrostriction** zuwandten, erklärt sich wol zum Teil durch die zunehmende Verbreitung der von **Faraday** begründeten und von **Maxwell** weiter durchgeführten Anschauung, nach welcher die elektrostatischen und magnetischen Kräfte nicht auf unvermittelter Fernwirkung, sondern auf einem gewissen **Spannungszustande** des Mediums, welches die scheinbar auf einander wirkenden Körper trennt, beruhen sollen. Denn es lag nahe, zu vermuten, dass jene Spannungen von **Deformationen** des Zwischenmediums begleitet sein würden, und durch einen experimentellen Nachweis solcher Deformationen eine Bestätigung der Maxwell'schen Theorie zu suchen.

Wir wollen nun im Folgenden sehen, ob die Erscheinungen der Elektrostriction und die analogen der Magnetostriction, d. h. die Volum- und Formänderungen elektrisch oder magnetisch polarisirter Körper, zu einer solchen Bestätigung überhaupt führen können oder aber sich nach der alten Theorie ebensogut erklären lassen. Wenn dabei zumeist nur von den Erscheinungen im **elektrischen** Felde die Rede seinwird, so sei im Voraus bemerkt, dass Alles auf die entsprechenden **magnetischen** Wirkungen übertragbar ist, indem man die elektrische Kraft mit der magnetischen, die Dielektricitätsconstante mit der Magnetisirungsconstante (magnetischen Permeabilität) vertauscht und das absolute magnetische Maasssystem statt des elektrischen benutzt.

Die Maxwell'sche Theorie für isotrope Medien.

Nach der Theorie **Maxwell's** besteht in einem isotropen dielektrischen Medium, welches irgendwelche elektrisch geladene Körper umgiebt, ein Spannungszustand von der besonderen Art, dass sich das Medium parallel den elektrischen Kraftlinien zusammenzuziehen und in allen Richtungen senkrecht gegen dieselben mit einer gleich grossen Kraft auszudehnen strebt; dieser Zug parallel den Kraftlinien und Druck senkrecht dazu ist der absoluten Grösse nach gleich $\frac{K}{8\pi}.R^2$, wo K die Dielektricitätsconstante des Mediums, R die in absolutem elektrostatischen Maasse gemessene elektrische Kraft nach der „polaren Definition" (also gleich dem Potentialgefälle) ist. Für den freien Aether hat K den Wert 1, auch dort sind also nach **Maxwell** solche Spannungen vorhanden. Nach der in der Elasticitätstheorie gebräuchlichen Bezeichnungsweise würde das erwähnte Spannungssystem in Bezug auf ein beliebiges rechtwinkliges Coordinatensystem X, Y, Z die Componenten besitzen:

$$
1)\quad \left\{
\begin{aligned}
A_x &= -\frac{K}{8\pi}\left\{\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2-\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2-\left(\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)^2\right\}\\
B_y &= -\frac{K}{8\pi}\left\{\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2-\left(\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)^2-\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2\right\}\\
C_z &= -\frac{K}{8\pi}\left\{\left(\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)^2-\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2-\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2\right\}\\
B_z &= C_y = -\frac{K}{4\pi}\frac{\partial\varphi}{\partial y}\frac{\partial\varphi}{\partial z}\\
A_z &= C_x = -\frac{K}{4\pi}\frac{\partial\varphi}{\partial z}\frac{\partial\varphi}{\partial x}\\
A_y &= B_x = -\frac{K}{4\pi}\frac{\partial\varphi}{\partial x}\frac{\partial\varphi}{\partial y}
\end{aligned}
\right.
$$

wobei φ das (gesamte) elektrische Potential bedeutet.

Aus den bekannten Eigenschaften des letzteren lässt sich leicht ableiten, (wie es für den Fall $K=1$ schon 1843 durch W. Thomson geschehen ist) dass das vorstehende Spannungssystem vollständig äquivalent ist den Kraftcomponenten, welche sich aus dem Coulomb'schen Gesetze ergeben, und in der Tat ist Maxwell zu den Gleichungen 1) durch eine blosse mathematische Umformung der bekannten Ausdrücke für jene Kraftcomponenten gelangt. Gegen diese Ableitung ist der Einwand erhoben werden [1]), dass sie willkürlich sei, da man unendlich viele andere Spannungssysteme angeben könne, welche ebenfalls den bekannten elektrostatischen Kräften aequivalent seien. In der Tat bleibt die auf geladene Conductoren ausgeübte Kraft die gleiche, wenn man die Drucke senkrecht zu den Kraftlinien beliebig ändert, weil ja die Conductoroberflächen von den Kraftlinien stets senkrecht getroffen werden. „Aber nur die Max-„well'schen Spannungen genügen der unerlässlichen Bedingung, dass „sie sich an jedem Volumelement des Dielektricums, welches keine „elektrische Ladung enthält, das Gleichgewicht halten" [2]).

---

1) Vergl. z. B. Poincaré, Electricité et optique, I, p. 86; ferner A. Seydler, Sitzungsber. der böhmischen Ges. der Wissensch. Prag 1882, Beiblätter VII, p. 551; Adler, Sitzungsber. der Wiener Akademie 89, (2) p. 594, 1884.

2) Dass dies in der Tat der Fall ist, erkennt man sofort, indem man aus den Gl. 1) die Kraftcomponenten

In Folge dieser Eigenschaft nun kommen die betrachteten Spannungen im Inneren eines (keine freie Elektricität enthaltenden) Dielektricums überhaupt nicht zur Geltung: es verhält sich so, als ob sie dort gar nicht existirten, und nur auf die Oberfläche des Dielektricums Kräfte ausgeübt würden. An den „Grenzflächen gegen Conductoren" gelangt der Zug parallel den Kraftlinien voll zur Wirkung, sofern also nicht aus mechanischen Ursachen, z. B. der Elasticität des Conductors, noch andere Kräfte auf diese Grenzflächen hinzukommen, ist das Resultat dasselbe, als ob daselbst auf das Dielektricum von aussen ein „normaler Druck" $\frac{K}{8\pi}R^2$ ausgeübt würde. Auf eine „Grenzfläche gegen ein anderes Dielektricum" wirkt die Resultirende derjenigen Kräfte, welche sich nach der aus der Elasticitätstheorie bekannten Regel aus den im Inneren eines jeden Dielektricums vorhandenen Spannungen ergeben, und deren X-Componenten also sind:

$-A_n = -A_x \cos(n, x) - A_y \cos(n, y) - A_z \cos(n, z)$ im ersten,
$+A_n' = +A_x' \cos(n, x) + A_y' \cos(n, y) + A_z' \cos(n, z)$ im zweiten Dielektricum, wenn n die Richtung der in das erste Medium hineinführenden Normale der Grenzfläche bezeichnet. Die Spannungen A_x', A_y', A_z' . . . sind durch die Formeln 1) gegeben, wenn darin K durch die Dielektricitätsconstante K' des zweiten Mediums ersetzt wird. Dabei ist aber zu beachten, dass die zur Grenzfläche senkrechten Componenten der polar definirten elektrischen Kraft beiderseits nicht gleich sind, sondern sich umgekehrt verhalten wie die Dielektricitätsconstanten, so dass also die Relation besteht:

$$A = -\frac{\partial A_x}{\partial x} - \frac{\partial A_y}{\partial y} - \frac{\partial A_z}{\partial z}$$

. . . .

berechnet; man findet z. B.

$$A = -\frac{K}{4\pi}\Delta\varphi\frac{\partial\varphi}{\partial x}, \quad \text{und} \quad \Delta\varphi \text{ ist } = 0$$

wo keine freie Elektricität vorhanden ist. Wolbemerkt gilt dies aber nur für den bei unserer Betrachtung immer vorausgesetzten Fall der Gleichgewichtsverteilung der elektrischen Kraft. Bei nicht stationären Zuständen, z. B. bei elektrischen Schwingungen, würden auch die Maxwell'schen Spannungen das Innere der Dielektrica nicht in Ruhe verharren lassen; jedoch würden unter den bei unsern Versuchen herstellbaren Verhältnissen daraus beobachtbare Bewegungen der Materie nicht hervorgehen. (Vergl. Hertz, Wied. Ann. 41, p. 398; 1891). Einen einfachen Beweis, dass die Gleichgewichtsbedingung notwendig auf die Maxwell'schen Spannungen führt, gab auch Vaschy. Compt. rend. CIII, p. 1186.

$$K\frac{\partial\varphi}{\partial n} = K'\left(\frac{\partial\varphi}{\partial n}\right)$$

Mit Rücksicht auf diese findet man als Componenten der resultirenden Kraft an der Grenzfläche:

2.

$$\begin{aligned}
\overline{A} = A_n' - A_n &= \frac{K'-K}{8\pi}\left\{\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)^2 + \frac{K-K'}{K'}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial n}\right)^2\right\}\cos(n, x) \\
\overline{B} = B_n' - B_n &= \frac{K'-K}{8\pi}\left\{\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)^2 + \frac{K-K'}{K'}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial n}\right)^2\right\}\cos(n, y) \\
\overline{C} = C_n' - C_n &= \frac{K'-K}{8\pi}\left\{\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)^2 + \frac{K-K'}{K'}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial n}\right)^2\right\}\cos(n, z)
\end{aligned}$$

Aus der Form dieser Ausdrücke geht hervor, dass auch die auf die „Grenzfläche zweier Dielectrica" wirkende Kraft stets senkrecht zu dieser Fläche gerichtet ist und zwar in einem „normalen Druck" gegen das Medium mit kleinerer Dielektricitätsconstante besteht.

Die soeben näher bestimmten, auf die Oberfläche eines dielektrischen Körpers im elektrischen Felde wirkenden Druckkräfte haben nun, sofern ihnen nicht mechanische Kräfte entgegenwirken, eine Deformation des Körpers zur Folge, welche aus ihnen (für feste Dielektrica) nach den gewöhnlichen Regeln der Elasticitätstheorie zu berechnen ist. „Ganz verkehrt ist dagegen die nicht „selten [1]) anzutreffende Ansicht, dass im Inneren des Dielektricums „an jeder Stelle Deformationen stattfinden müssten, wie sie sich aus „den dort herrschenden Maxwell'schen Spannungen $A_x, \ldots B_z, \ldots$ „unmittelbar nach den linearen Grundgleichungen der Elasticitäts-„theorie ergeben würden," woraus u. A. folgen würde, dass in flüssigen Körpern, in welchen keine anderen als allseitig gleiche Dilatationen möglich sind, der Maxwell'sche Spannungszustand überhaupt nicht bestehen könnte [2]). Veranlasst ist diese irrtümliche Auffassung

---

1) Z. B. sogar in Poincaré's Electricité et optique, I, p. 90. 1890.

2) Dies macht noch jüngst P. Duhem in seinen „Leçons sur l'électricité et le magnétisme", Tome II. (Paris 1892), p. 457 als besonders gewichtigen

jedenfalls dadurch, dass man aus der Elasticitätstheorie gewohnt ist, Spannungen und Deformationen als untrennbar mit einander verbunden zu betrachten, „Der Zwangszustand im polarisirten Dielek-„tricum soll aber nach Maxwell gar nicht aus der Elasticitätstheorie „erklärt werden," sondern ist als von einer ganz anderen, ihrem Wesen nach völlig unbekannten Ursache herrührend anzusehen [1]). Demnach berührt es die Maxwell'sche Anschauung nicht, dass die von ihr angenommene Druckverteilung, wie sie durch die Gleichungen 1) gegeben ist, als Folge der Deformationen eines den gewöhnlichen Gesetzen der Elasticitätstheorie gehorchenden Mediums im allgemeinen nicht auftreten kann, weil diejenigen 6 Differentialgleichungen 2ter Ordnung, welchen die elastischen Druckcomponenten zufolge ihrer linearen Abhängigkeit von den Differentialquotienten der Verrückungen genügen [2]), nach 1) auf ebensoviele Differentialgleichungen für das elektrische Potential φ führen würden, die von diesem nur in ganz speciellen Fällen erfüllt werden können [3]).

Spannungszustand in ponderabelen Dielektricis nach der Fernewirkungs-Theorie.

Nach der alten Anschauung von der Fernewirkung würden aus den Maxwell'schen Spannungen 1) diejenigen Bestandteile, welche

---

Einwand gegen die ganze Maxwell'sche Theorie geltend. Im Livre XII, Cap. III dieses Werkes will dessen Verf. zeigen, dass die Maxwell'sche Theorie, auch abgesehen von jenem Einwand, an und für sich fehlerhaft sei, da sich die auf die Oberfläche eines Dielektricums wirkenden Kräfte nicht in der Form

$$A_x \cos(n, x) + A_y \cos(n, y) + A_z \cos(n, z)$$

darstellen liessen. Die betreffende Rechnung Duhems (l. c. p. 459—466) beruht aber auf einem schon in Cap. I des Livre XII, p. 412, begangenen Fehler, darin bestehend, dass bei der Berechnung jener Oberflächenkräfte die Unstetigkeit der elektrischen Kraft $\frac{d\varphi}{dn}$ nicht berücksichtigt wird. „Infolge dieses Fehlers wird nicht nur die Beweisführung Duhems gegen die „Maxwell'sche Theorie hinfällig, sondern auch seine ganzen die Elektro- und „Magnetostriction betreffenden Entwickelungen des Livre XII."

1) Maxwell selbst betont dies ausdrücklich in Art. 110 seines „Treatise on Electricity and Magnetism." p. 163 des 1. Bandes der deutschen Uebersetzung.

2) Vergl. z. B. Kirchhoffs Mechanik, p. 399.

3) Vergl. z. B. E. Beltrami, Memorie della R. Accad. delle Scienze dell' Istit. di Bologna, (4) VII p. 1—40, 1886; M. Brillouin, Ann. de l'Ecole Normale supérieure. (3), t. IV, p. 201; 1887; auch E. Mathieu, Théorie du potentiel, II, p. 110.

auch im freien Aether vorhanden sind, auszusondern und durch die ihnen aequivalente Fernewirkung nach dem Coulomb'schen Gesetze zu ersetzen sein; die übrig bleibenden Bestandteile, nämlich

1')
$$\begin{array}{|l} \mathfrak{A}_x = -\frac{K-1}{8\pi}\left\{-\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right) + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)^2\right\} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \mathfrak{B}_z = -\frac{K-1}{4\pi}\frac{\partial\varphi}{\partial y}\frac{\partial\varphi}{\partial z} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{array}$$

sind also auch hier noch als moleculare Druck- resp. Zugkräfte, hervorgerufen durch die elektrische Polarisation, aufzufassen und ergeben die Modification, welche die nach dem Coulomb'schen Gesetze berechnete Wirkung durch das dielektrische Zwischenmedium erleidet. Entsprechend dieser Auffassung zerfallen auch die an den Oberflächen der Dielectrica auftretenden Kräfte $\bar{A}$, $\bar{B}$, $\bar{C}$ in zwei Teile: erstens die Fernewirkung auf die infolge der Polarisation an jenen Grenzflächen vorhandene scheinbare elektrische Belegung, zweitens die Resultirende aus den molecularen Spannungen $\mathfrak{A}_n, \ldots$ in den zusammenstossenden Medien, welche hier aber nicht mehr senkrecht zur Grenzfläche ist. Auch die Spannungen 1') halten sich in jedem inneren Punkte des Dielectricums das Gleichgewicht, kommen also nur in jener Resultirenden an dessen Oberfläche zur Geltung; die Deformationen, welche sie hervorrufen, dürfen indessen nicht direct durch Einsetzen der Ausdrücke $\mathfrak{A}_x, \ldots$ in die Grundgleichungen der Elasticitätstheorie $-x_x = s_{11} X_x + s_{12}(Y_y + Z_z)$ etc. berechnet werden, sondern man hat wieder lediglich die auf die Oberfläche wirkenden Kräfte als gegeben anzusehen. Dabei kommt natürlich die erwähnte Zerlegung derselben gar nicht in Betracht, „so dass also die alte Anschauung notwendig zu denselben Resultaten führt, wie die Maxwell'sche".

„Spannungen zweiter Art" in ponderabelen isotropen Dielektricis.

Die Ausdrücke 1) bzhw. 1') für die Spannungen in isotropen ponderabelen Dielektricis bedürfen noch einer Ergänzung in dem Falle, dass sich die Dielektricitätsconstante in Folge von Deformationen der Körper ändert. Dies hat schon 1880 Korteweg[1]) bei der Behandlung einiger specieller Probleme der Elektrostriction gezeigt; 1881 wurde die allgemeine Theorie für Flüssigkeiten, bei denen die Dielektricitätsconstante nur von der Dichte abhängt, von

1) Korteweg, Wied. Ann. 9, p. 48—61, 1880.

Helmholtz[1]), und 1884 für feste isotrope Körper, wo Dilatationen parallel den Kraftlinien einen anderen Einfluss haben können, als solche senkrecht dazu, fast gleichzeitig von Kirchhoff[2]) und Lorberg[3]) gegeben.

Alle diese theoretischen Untersuchungen beruhen auf der Erwägung, dass der Zuwachs, den die gesamte elektrische Energie[4]) eines Systems von Conductoren und Isolatoren in Folge irgendwelcher Verschiebungen seiner Volumelemente erfährt, gleich sein muss der bei diesen Verschiebungen zu leistenden äusseren Arbeit, aus der sich dann die auf jeden Punkt des Systems wirkenden ponderomotorischen Kräfte nach dem Princip der virtuellen Verrückungen bestimmen.

Da die Verteilung des Potentials im Gleichgewichtszustande eine solche ist, dass sie die elektrische Energie zu einem Minimum macht, so kann man bei der Berechnung der Energieänderung durch unendlich kleine Verschiebungen an Stelle derjenigen Variation, die das Potential dabei wirklich erleiden würde, irgend eine andere setzen, oder man kann auch das Potential dabei als constant betrachten. Letzteres tun Helmholtz, Kirchhoff und Lorberg. Die Variation kommt dann dadurch zu Stande, dass in dem elektrischen Felde von

---

1) Helmholtz, Wied. Ann. 13, 1881. Sitzber. der k. Akad. d. Wiss. zu Berlin 1881. p. 191.

2) Kirchhoff, Sitzungsber. d. k. Akad. d. Wiss. zu Berlin 1884, p. 137 und Wied. Ann. 24, p. 52, 1885.

3) Lorberg, Wied. Ann. 21, p. 300, 1884.

4) Die gesamte elektrische (potentielle) Energie E ist diejenige Arbeit, welche zu leisten ist, um die im System vorhandene wahre Elektricität aus einem Reservoir vom Potential null an ihren Ort zu bringen; bezeichnet ε die räumliche Dichte, e die Oberflächendichte jener wahren, d. h. von aussen zugeleiteten Elektricität, so ist also

$$E = \tfrac{1}{2}\int \varphi\,\varepsilon\,dk + \tfrac{1}{2}\int \varphi\,e\,do,$$

wo das erste Integral über den ganzen Raum, das zweite über alle Oberflächen von Conductoren zu erstrecken ist. Eine andere Form von E, welche der Maxwell'schen Vorstellung, wonach der Sitz der Energie die Dielektrica allein sind, entspricht, ist diese:

$$E' = \int \frac{K}{8\pi}\left\{\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)^2\right\} dk$$

Weitere Umformungen dieses Ausdruckes giebt Helmholtz in der citirten Abhandlung; die von ihm benutzte Form ist $2E - E'$.

constanster räumlicher Verteilung der elektrischen Kraft sich die Verteilung der Materie und somit an einer festen Stelle des Raumes der Wert der wahren elektrischen Dichtigkeit und der Dielektricitätsconstante in Folge der Verrückungen und der damit verbundenen Deformationen ändert. — Während bei dieser Ableitung nur die gewöhnlichen Sätze der Elektrostatik und das Energieprincip vorausgesetzt werden, und daher auch die so gefundenen ponderomotorischen Kräfte A, B, C erst durch eine mathematische Umgestaltung, nämlich durch Darstellung in der Form $-\frac{\partial A_x}{\partial x}-\frac{\partial A_y}{\partial y}-\frac{\partial A_z}{\partial z}$ etc., auf moleculare Drucke oder Spannungen zurückgeführt werden, hat Hertz neuerdings eine der Anschauung Maxwell's consequent angepasste Ableitung gegeben[1]), indem er von vornherein annimmt, dass die ponderomotorischen Kräfte nur durch Druckkräfte zu Stande kommen können. Diese Druckkräfte leitet er ebenfalls aus dem Energieprincip ab; dabei berechnet er die Aenderung der elektrischen Energie jedes Volumelementes so, als ob das Potential in jedem materiellen Punkte ungeändert bliebe, während Helmholtz und Kirchhoff den Potentialwert in jedem Raumpunkte beibehielten. Beides ist nach dem oben Gesagten gleich berechtigt, und in der Tat gelangt Hertz (für isotrope Körper) zu denselben Resultaten.

Die von der Veränderlichkeit der Dielektricitätsconstante herrührenden Glieder, welche in den Ausdrücken für die ponderomotorischen Kräfte neu hinzukommen, ergeben sich bei beiden Arten der Ableitung unmittelbar in der Form von Druckkräften; sie mögen zum Unterschied von den Maxwell'schen Spannungen als „Spannungen zweiter Art" bezeichnet werden. Die einfachste Ableitung derselben ist wol folgende. Die elektrische Energie eines Systems von Conductoren und Dielektricis ist darstellbar in der Form (vergl. S. 64)

$$E''=\int \varphi\,\varepsilon\,dk+\int \varphi\,e\,do-\int \frac{K}{8\pi}R^2\,dk$$

worin die beiden ersten Teile constant bleiben, soweit nur in den Dielektricis Verschiebungen und Deformationen stattfinden. Man kann es demnach so auffassen, als ob die Volumeinheit des gerade betrachteten homogenen Dielektricums zur elektrischen Energie den Beitrag $-\frac{K}{8\pi}R^2$ lieferte. Erleidet dasselbe nun Deformationen $x_x,\ldots y_z,\ldots$, so kommt erstens hinzu das elastische Potential

1) Hertz, Grundgleichungen der Elektrodynamik für bewegte Körper; Wied. Ann. 41, p. 389 ff., 1890.

$$\Phi = \frac{c_{11}-c_{12}}{2}(x_x^2 + \ldots + \ldots + \tfrac{1}{2} y_z^2 + \ldots + \ldots) +$$

$$+ \frac{c_{11}}{2}(x_x + y_y + z_z)^2$$

sodann aber ändert sich die elektrische Energie in Folge der Aenderung von K durch die Deformationen. Für die letztere wird nun der Ansatz gemacht:

$$K' = K^0 - 4\pi\alpha\lambda_1 - 4\pi\beta(\delta - \lambda_1)$$

wo λ_1 die Dilatation in der Richtung der Kraftlinien, δ die kubische Dilatation bezeichnet, und somit die Grössen $4\pi\alpha$, $4\pi\beta$, welche in erster Annäherung als Constanten zu betrachten sind, die Aenderung der Dielektricitätsconstante durch die lineare Contraction 1 parallel bzhw. senkrecht zu den Kraftlinien bedeuten [1]). Da

$$\lambda_1 = x_x l^2 + y_y m^2 + z_z n^2 + y_z mn + z_x nl + x_y lm$$

ist, wo

$$l = \frac{\partial\varphi}{\partial x} : R, \quad m = \frac{\partial\varphi}{\partial y} : R, \quad n = \frac{\partial\varphi}{\partial z} : R$$

die Richtungscosinus der Kraftlinien sind, so ergiebt sich gemäss dem obigen Ansatz für die potentielle Energie der Volumeinheit des deformirten Dielektricums der Ausdruck

$$3)\quad V = \Phi - \frac{K}{8\pi}R^2 + \frac{\beta}{2}(x_x + y_y + z_z)R^2 + \frac{\alpha-\beta}{2}\Big(x_x\Big(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\Big)^2$$

$$+ y_y\Big(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\Big)^2 + z_z\Big(\frac{\partial\varphi}{\partial z}\Big)^2 + y_z\frac{\partial\varphi}{\partial y}\frac{\partial\varphi}{\partial z} + z_x\frac{\partial\varphi}{\partial z}\frac{\partial\varphi}{\partial x} + x_y\frac{\partial\varphi}{\partial x}\frac{\partial\varphi}{\partial y}\Big)$$

Nun sind

$$-\frac{\partial V}{\partial x_x}, \ldots -\frac{\partial V}{\partial y_z}, \ldots$$

---

1) Es ist dies die von Lorberg eingeführte Bezeichnung; Kirchhoff benutzt die Grössen

$$k' = \beta, \quad k'' = \alpha - \beta$$

und Korteweg

$$x_1 = 4\pi\alpha, \quad x_2 = 4\pi\beta$$

bei Helmholtz ist

$$\alpha = \beta = \Theta$$

Ferner steht bei letzterem $1+4\pi\vartheta$, bei Kirchhoff $1+4\pi k$ an Stelle von K.

allgemein die im betrachteten Volumelement herrschenden molecularen Drucke, und

$$-\frac{\partial\Phi}{\partial x_x}, \dots -\frac{\partial\Phi}{\partial y_z}, \dots$$

die gewöhnlichen elastischen Drucke

$$X_x, \dots Y_z, \dots$$

folglich sind die Drucke elektrischen Ursprungs, d. h. eben die „Spannungen 2ter Art" [1]), gegeben durch

$$\mathfrak{A}_x' = -\frac{\partial V}{\partial x_x} + \frac{\partial\Phi}{\partial x_x} = -\frac{\beta}{2} R^2 - \frac{\alpha-\beta}{2}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2$$

. . . .

$$\mathfrak{B}_z' = -\frac{\partial V}{\partial y_z} + \frac{\partial\Phi}{\partial y_z} = -\frac{\alpha-\beta}{2}\frac{\partial\varphi}{\partial y}\frac{\partial\varphi}{\partial z}$$

. . . .

Dieselben bestehen also in einem Zuge parallel den Kraftlinien von der Grösse $\frac{1}{2}\alpha R^2$ und in einem solchen in allen dazu senkrechten Richtungen von der Grösse $\frac{1}{2}\beta R^2$. Demgemäss lauten die vollständigen Spannungscomponenten:

4

$$A_x = -\left(\frac{K}{4\pi} + \frac{\alpha-\beta}{2}\right)\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{K}{8\pi} - \frac{\beta}{2}\right)R^2$$

. . . .

$$B_z = -\left(\frac{K}{4\pi} + \frac{\alpha-\beta}{2}\right)\frac{\partial\varphi}{\partial y}\frac{\partial\varphi}{\partial z}$$

. . . .

Diese Spannungen zweiter Art ergeben im Gegensatz zu den Maxwell'schen Spannungen „auf die inneren Volumelemente des Dielektricums wirkende Kraftcomponenten" auch dann, wenn dort keine wahre Elektricität vorhanden ist, ausgenommen in einem homogenen elektrischen Felde. Diese Kraftcomponenten im Innern eines homogenen, isotropen, von wahrer Elektricität freien Dielektricums sind [2]):

1) Dass obige Ableitung aus dem Potentialansatz 3) nur die Spannungen 2 Art, nicht die Maxwell'schen Spannungen liefert, ist die natürliche Folge davon, dass er für das Innere eines homogenen Mediums gilt und somit nur die im Innern, nicht die auf die Oberfläche wirkenden Drucke ergeben kann.

2) Hierbei ist vorausgesetzt, dass die in Folge der Elektrostriction selbst eintretenden Aenderungen der Dielektricitätsconstanten und somit der elektri-

$$
4' \quad \left|
\begin{aligned}
A &= -\frac{\partial A_x}{\partial x} - \frac{\partial A_y}{\partial y} - \frac{\partial A_z}{\partial z} = \frac{\alpha+\beta}{4}\,\frac{\partial(R^2)}{\partial x} \\
B &= -\frac{\partial B_x}{\partial x} - \frac{\partial B_y}{\partial y} - \frac{\partial B_z}{\partial z} = \frac{\alpha+\beta}{4}\,\frac{\partial(R^2)}{\partial y} \\
C &= -\frac{\partial C_x}{\partial x} - \frac{\partial C_y}{\partial y} - \frac{\partial C_z}{\partial z} = \frac{\alpha+\beta}{4}\,\frac{\partial(R^2)}{\partial z}
\end{aligned}
\right.
$$

sie verschwinden also in der Tat nur, wenn die elektrische Kraft R constant ist. Man kann sie hervorgebracht denken durch einen an jeder Stelle des Mediums auftretenden allseitig gleichen Druck $-\frac{\alpha+\beta}{4}R^2$. Ist nun das Dielektricum eine Flüssigkeit, so dass sich seine Teilchen beliebig gegeneinander verschieben können, so wird an jeder Stelle eine entsprechende kubische Contraction oder Dilatation eintreten, d. h. eine solche, dass der durch sie erweckte Druck gerade jenen elektrischen $-\frac{\alpha+\beta}{4}R^2$ compensirt. Da dann an jeder Stelle des Dielektricums die mit α proportionalen Glieder der elektrischen Drucke A_x . . . (— es ist für Flüssigkeiten $\alpha = \beta$, also treten solche Glieder nur in A_x, B_y, C_z auf —) durch entsprechende Drucke elastischen Ursprungs aufgehoben sind, so treten an der Oberfläche gar keine von $\alpha (= \beta)$ abhangenden Kräfte auf; man hat also das Resultat, „dass die auf die Grenzflächen eines „flüssigen Dielektricums wirkenden Kräfte unabhängig sind von der „Veränderlichkeit seiner Dielektricitätsconstante mit der Dichtig„keit"[1]). Daraus folgt insbesondere, dass auf Conductoren, welche in eine dielektrische Flüssigkeit eingetaucht sind, sowie auf die Trennungsfläche von zwei verschiedenen dielektrischen Flüssigkeiten keine anderen Kräfte wirken, als die aus den Maxwell'schen Spannungen resultirenden, was für die Deutung gewisser später zu besprechenden Beobachtungen von Wichtigkeit ist.

Bei festen Dielektricis gestalten sich die Verhältnisse wesentlich complicirter, weil sich hier diejenigen Deformationen, welche an jeder Stelle die den elektrischen Drucken $A_x, \ldots B_z, \ldots$ entgegengesetzten elastischen Drucke hervorrufen würden, nicht frei

---

schen Kraftverteilung unendlich klein sind, was nach den vorliegenden Erfahrungen stets zulässig ist. Anders ist es im analogen Falle der stark magnetischen Metalle, worauf wir später zurückkommen.

1) Vorausgesetzt ist dabei nur, dass die Dilatation oder Contraction der Flüssigkeit nicht etwa durch Beschränkung ihres Gesamtvolums behindert wird.

entwickeln können. Man hat also die eintretenden Verrückungen u, v, w zu berechnen aus den für das Innere geltenden Differentialgleichungen:

5. $$\frac{\partial X_x}{\partial x} + \frac{\partial X_y}{\partial y} + \frac{\partial X_z}{\partial z} = A = \frac{\alpha + \beta}{4} \frac{\partial (R^2)}{\partial x}$$

. . . .

und aus den Oberflächenbedingungen:

6. $$\begin{aligned} & X_x \cos(n, x) + X_y \cos(n, y) + X_z \cos(n, z) = \overline{A} = A_n' - A_n \\ & = -\left\{ \left(\frac{K - K'}{8\pi} R^2 - \frac{\beta - \beta'}{2} R^2 + \left(\frac{(K - K')^2}{8\pi K'} + \frac{K^2 - K'^2}{K'^2} \frac{\beta'}{2} \right. \right. \right. \\ & \left. \left. + \frac{K(K - K')}{K'^2} \frac{\alpha' - \beta'}{2} \right) \left(\frac{\partial \varphi}{\partial n} \right)^2 \right\} \cdot \cos(n, x) \Big\} \\ & + \left(\frac{\alpha - \beta}{2} - \frac{\alpha' - \beta'}{2} \frac{K}{K'} \right) \frac{\partial \varphi}{\partial n} \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \end{aligned}$$

. . . .

worin

$$-X_x = c_{11} \frac{\partial u}{\partial x} + c_{12} \left(\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right)$$

. . . .

$$-Y_z = \frac{c_{11} - c_{12}}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right)$$

. . . .

ist, wenn c_{11}, c_{12} die Elastcitätsconstanten bezeichnen.

Die Grenzbedingungen, deren erste in 6) hingeschrieben ist, gelten für die Grenzflächen gegen ein anderes Dielektricum, welchem die Constanten K', α', β' zukommen; ist dasselbe eine Flüssigkeit, so ist $$\beta' = \alpha'$$
und ist es der leere Raum, so ist

$$K' = 1 \quad \text{und} \quad \alpha' = \beta' = 0$$

zu setzen. Für Grenzflächen gegen **Conductoren** gelten an Stelle von 6) die Bedingungen

6'. $$\begin{aligned} & X_x \cos(n, x) + X_y \cos(n, y) + X_z \cos(n, z) = -A_n \\ & = + \left(\frac{K}{8\pi} + \frac{\alpha}{2} \right) R^2 \cos(n, x), \end{aligned}$$

. . . .

Das Dielektricum erleidet dort einfach einen normalen Druck $\left(\frac{K}{8\pi}+\frac{\alpha}{2}\right)R^2$. Dagegen zeigt das Zusatzglied mit $\left(\frac{\partial\varphi}{\partial n}\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)$ in 6), dass bei Berücksichtigung der Veränderlichkeit der Dielektricitätsconstante die auf Grenzflächen fester Dielektrica gegen andere feste oder flüssige dielektrische Medien wirkenden Druckkräfte **nicht mehr senkrecht** zur Grenzfläche gerichtet sind. Ueberhaupt wird das elastische Problem der Elektrostriction durch das Hinzukommen der mit α und β proportionalen Glieder in hohem Grade erschwert, um so mehr als es keineswegs statthaft ist, diese Glieder von vornherein als sehr klein gegen die übrigen (also $4\pi\alpha$, $4\pi\beta$ als sehr klein gegen K) zu behandeln.

Wir wissen über die Aenderungen der Dielektricitätsconstanten fester und flüssiger Körper durch Deformationen nichts durch directe Beobachtungen [1]; aber es dürfte wenigstens für solche Dielektrica, bei denen die von der elektromagnetischen Lichttheorie geforderte Relation zwischen Dielektricitätsconstante und Brechungsindex

$$K = n^2$$

annähernd zutrifft, der Schluss berechtigt sein, dass die Grössenordnung jener Aenderungen dieselbe sei, wie diejenige der entsprechenden Aenderungen von n^2, letztere sind aber in den untersuchten Fällen keineswegs ohne weiteres neben n^2 zu vernachlässigen. Bei einigen dielektrischen Flüssigkeiten hat Cassie [2]) die Aenderung von K mit der Temperatur bestimmt und annähernd gleich der entsprechenden Aenderung von n^2 gefunden, woraus wol dieselbe Uebereinstimmung für die Aenderungen beider Grössen durch Druck zu schliessen ist, weil bei jenen Flüssigkeiten erfahrungsmässig der Brechungsindex durch thermische und mechanische Dilatation in gleicher Weise geändert wird.

Schliesslich sei noch erwähnt, dass unter Umständen noch aus einer im Vorhergehenden nicht berücksichtigten Ursache Defor-

---

1) Es sei jedoch auf die interessanten qualitativen Beobachtungen an getrockneter Gelatine von Ambronn (Sitzungsber. der k. sächs. Ges d. Wiss. 1891, Heft III) hingewiesen, welche zeigten, dass bei dieser Substanz eine dauernde Dehnung eine Vergrösserung sowol der Dielektricitäts- als auch der Diamagnetisirungsconstante in der Dehnungsrichtung hervorbringt.

2) W. Cassie, Phil. Transactions 1890, p. 1.

Eine Abnahme der Dielektricitätsconst. durch Erwärmung hat auch Negreano für Benzol, Xylol und Toluol nachgewiesen: Compt. Rend. CXIV, p. 345, 1892.

mationen bei dielektrischer bzhw magnetischer Polarisation hervorgehen können, nämlich aus einer Aenderung der Elasticitätsconstanten in Folge der Polarisation. Abgesehen davon, dass eine solche Aenderung bisher nur für die Torsionscoefficienten von Glas (und Glimmer) nachgewiesen zu sein scheint [1]), kommt aber diese Art von Deformationen für uns deshalb nicht in Betracht, weil sie in merklichem Grade nur bei Körpern auftreten können, welche bereits einer starken Deformation unterworfen sind, bevor sie in das elektrische oder magnetische Feld gebracht werden.

Wir wollen nun die bisher vorliegenden Beobachtungsresultate daraufhin betrachten, wie weit sie die besprochenen theoretischen Folgerungen bestätigen und insbesondere gestatten, Schlüsse in Betreff der Grössen α und β zu ziehen.

Beobachtungen an Flüssigkeiten.

In einer Flüssigkeit verursachen die Spannungen zweiter Art an jeder Stelle einen hydrostatischen Druck $\frac{\alpha}{2}R^2$ und eine diesem entsprechende kubische Contraction, vorausgesetzt, dass eine Aenderung des Gesamtvolums nicht durch starre Wandungen verhindert wird. Versuche, bei welchen diese Volumänderung unmittelbar zur Wahrnehmung gelangen konnte, sind zuerst von Quincke [2]) angestellt worden, indem er ein Glassgefäss, an welches eine Capillare angeschmolzen war, und in dem sich zwei einander parallel gegenüberstehende Platinbleche befanden, mit isolirenden Flüssigkeiten füllte und an deren Stande im Capillarrohr die bei elektrischer Ladung der Platinelektroden eintretende Volumänderung der Flüssigkeit mass. Bei dieser Versuchsanordnung besitzt das flüssige Dielektricum keine freien Grenzflächen in Gebieten, wo die elektrische Kraft merkliche Intensität besitzt; es kommt daher der Druck $\frac{\alpha}{2}R^2$ allein zur Wirkung, und man würde eine Contraction erwarten, da die Dielektricitätsconstante der Flüssigkeiten durch Compression höchst wahrscheinlich zunimmt, also α positiv ist. Quincke hat aber nur bei einigen fetten Oelen eine Contraction beobachtet, dagegen bei allen anderen von ihm untersuchten Flüssigkeiten, z. B. Schwefelkohlenstoff, Petroleum, Terpentinöl, Wasser, eine mehr oder weniger beträchtliche Dilatation, und spätere Beobachter, nämlich Röntgen [3]),

1) Quincke, Wied. Ann. 10, p. 412. 1880.

2) Quincke, Wied. Ann. 10, 521 u. s. f., 1880.

3) Röntgen, Wied. Ann. 11, p. 771, 1880.

Oddone[1]) und Bos[2]), haben auch bei jenen Oelen nur eine Ausdehnung finden können. „Es unterliegt aber keinem Zweifel, dass „bei allen diesen Versuchen die von der elektrischen Polarisation „herrührende Volumänderung durch secundäre thermische Wirkungen „verdeckt wurde". Dass eine thermische Dilatation auftrat, ist ja sehr plausibel, da die untersuchten Flüssigkeiten nie vollständig isolirten, vielmehr die zur Ladung der Platinbleche dienende Batterie sich in verhältnissmässig kurzer Zeit völlig durch die Flüssigkeit entlud. Für diesen Ursprung der beobachteten Dilatationen spricht auch der Umstand, dass dieselben mit der Capacität der Batterie wuchsen, während doch die Elektrostrictionswirkung nur vom Ladungspotential abhangen kann; ferner das Verhalten des Wassers, welches bei $+8^0$ eine Dilatation, bei 0^0 aber eine Contraction zeigte. Wenn doch noch Zweifel möglich waren, so sind dieselben durch die oben citirte, in Groningen ausgeführte Untersuchung von Bos beseitigt worden, welcher das Auftreten einer Erwärmung zwischen den elektrisirten Platinplatten vermittelst eines Thermoelements direct nachgewiesen und auch dargetan hat, dass diese Erwärmung zur Erklärung der gleichzeitig beobachteten Ausdehnung ausreichte. Aber auch die Contraction, welche Quincke bei Mandelöl, Rüböl und Olivenöl beobachtete, scheint thermischen Ursprungs gewesen zu sein, da Bos in dem einzigen Falle, wo er sie wahrnahm, gleichzeitig eine Temperaturerniedrigung im Innern der Flüssigkeit, wol in Folge von Strömungen gegen die etwas kälteren Gefässwände, beobachten konnte. Somit haben alle diese Versuche bisher nur negative Resultate ergeben, und eine Wiederholung derselben könnte nur dann Erfolg versprechen, wenn Temperaturschwankungen mit äusserster Sorgfalt vermieden und das der dielektrischen Polarisation unterworfene Flüssigkeitsvolum gross genug gemacht würde.

Ebenso negative Resultate ergaben analoge Versuche mit Gasen (Luft und CO_2), welche ebenfalls von Quincke[3]) angestellt wurden. Das Gas war in den Raum zwischen zwei concentrischen metallenen Hohlkugeln, die auf eine bestimmte Potentialdifferenz geladen werden konnten, eingeschlossen, somit die elektrische Kraft R an jeder Stelle der Gasmasse bekannt; man konnte daher mit Hülfe der von Boltzmann bestimmten Dielektricitätsconstanten die nach der Theorie zu erwartende gesamte Volumänderung berechnen. Da nämlich bei

---

1) Oddone, Rendiconti della R. Accad. dei Lincei VI, p. 452, 1890.

2) Bos, Volumänderungen von Dielektricis. Dissertation, Groningen 1888. (Beiblätter 1890, p. 1120.)

3) Quincke, Wied. Ann. 10, 529. 1880.

Gasen $K-1$ proportional der Dichtigkeit ist, so ergiebt sich für den Aendorungscoefficienten $4\pi\alpha$ selbst der Wert $K-1$, und es genügt die Kenntniss von K[1]). Die Berechnung[2]) zeigt, dass bei Quincke's Versuchsanordnung, wobei noch eine Volumänderung von $\frac{1}{3 \,.\, 10^9}$ nachweisbar war, eine merkliche Volumänderung hätte eintreten müssen, während nur bei Kohlensäure eine Spur einer solchen beobachtet wurde; es müssen also wol Nebenumstände die Contraction compensirt haben. Ein Phaenomen, in welchem sich die Volumänderung der Luft im elektrischen Felde indirect äussert, ist aber wahrscheinlich das von Thomson beobachtete Tönen eines Luftcondensators, der in sehr rascher Aufeinanderfolge mittelst 800 Daniels geladen und wieder entladen wurde.

Beobachtungen über die Volumänderung magnetischer oder diamagnetischer Flüssigkeiten im magnetischen Felde, die eintreten würde, wenn sich die Magnetisirungsconstante mit der Dichte änderte, sind meines Wissens noch nicht vorhanden, wären aber vielleicht (wenigstens bei Eisenchloridlösung) nicht aussichtslos, da man magnetische Felder von weit grösserer Intensität herstellen kann, als bei elektrischen Feldern erreichbar ist, und da die störenden Wärmewirkungen in Fortfall kämen.

Wir kommen nun zu denjenigen Beobachtungen, welche die auf Grenzflächen dielektrischer oder magnetisirbarer Flüssigkeiten wirkenden Kräfte betreffen, bei welchen also, wie schon oben erörtert wurde, nur die Maxwell'schen Spannungen, nicht der hydrostatische Druck $\frac{\alpha}{2} R^2$ zur Geltung kommt. In Bezug auf alle diese Beobachtungen sei gleich bemerkt, dass die von der Theorie geforderte Proportionalität der Wirkungen mit dem Quadrate des Potentialgefälles sich fast immer gut bestätigt fand.

Zunächst ist hier zu erwähnen, dass das theoretische Ergebniss, wonach auf „Grenzflächen gegen Conductoren" ein Zug von der Stärke $\frac{K}{8\pi} R^2$ wirkt, durch Messungen von Silow[3]) und in weiterem Umfange durch solche von Quincke[4]) (— welcher mittelst einer

---

1) Vergl. Korteweg, Wied. Ann. 9, p. 59; 1880.

2) Eine directe Behandlung des Problems mit Hülfe des Energieprincips giebt Lippmann, Ann. de chim. et phys. (5) XXIV p. 144; 1881.

3) Silow, Pogg. Ann. 156, p. 389, 1875.

4) Quincke, Wied. Ann. 19, p. 705, 1883; 28, p. 529, 1888.

Waage die Anziehung zweier durch eine isolirende Flüssigkeit getrennten, auf bekannte Potentialdifferenz geladenen Metallplatten bestimmte —) vollkommen bestätigt worden ist. — Mehr Interesse haben aber von unserem Standpunkt die Erscheinungen, welche von der durch die Gleichungen 2) gegebenen Druckdifferenz an Grenzflächen zweier verschiedenen dielektrischen Flüssigkeiten oder an der freien Oberfläche einer solchen herrühren. Wird nämlich eine solche Grenzfläche in ein inhomogenes elektrisches Feld gebracht, so erleidet sie Gestaltsänderungen, die soweit gehen, bis die Schwere oder die Oberflächenspannung der elektrischen Druckdifferenz das Gleichgewicht hält. Eine solche Deformation der freien Oberfläche kann man z. B. sehr bequem beobachten, indem man einen schmalen Glastrog, der zum Teil mit einer isolirenden Flüssigkeit gefüllt ist, zwischen zwei auf hohe Potentialdifferenz geladene Conductoren (etwa kleine Kugeln) bringt. Ein anderes Beispiel ist die von Quincke beobachtete Erscheinung, dass sich eine Luftblase innerhalb einer dielektrisch polarisirten Flüssigkeit in der Richtung der Kraftlinien streckt. Die ersten Messungen dieser Oberflächendrucke hat Quincke[1]) in der Weise angestellt, dass er zwischen den durch die Flüssigkeit getrennten Platten eines Condensators eine beide Platten berührende grosse Luftblase herstellte und mittelst eines empfindlichen Manometers die beim Laden des Condensators eintretende Druckzunahme in dieser Luftblase beobachtete. Kirchhoff[2]) hat gezeigt, dass man bei dieser Versuchsanordnung die Grenzfläche zwischen Luftblase und Flüssigkeit als eine zu den Condensatorplatten senkrechte Cylinderfläche betrachten darf; dann ist, vorausgesetzt, dass die Flüssigkeit innerhalb des elektrischen Feldes von merklicher Intensität (d. h. zwischen den Condensatorplatten oder in deren Nähe) nicht noch andere freie Oberflächenteile besitzt, die Druckzunahme in der Luftblase direct gleich der Differenz der Drucke senkrecht zu den Kraftlinien in Flüssigkeit und Luft, also, da die elektrische Kraft R beiderseits gleich ist,

$$= \frac{K-1}{8\pi} R^2$$

Quincke hat hiernach aus seinen Beobachtungen K berechnet und dabei, ausser für Rapsöl, gute Uebereinstimmung mit den Werten gefunden, welche er aus den oben erwähnten Messungen der Anziehung von Metallplatten in der betreffenden Flüssigkeit, sowie aus

1) Quincke, Wied. Ann 19. 718; 1883.

2) Kirchhoff, Sitzungsber. d. Acad. d. Wiss. zu Berlin 1884, p. 1159; Wied. Ann. 25, p. 606, 1886.

Capacitätsbestimmungen abgeleitet hatte. Aus dieser Uebereinstimmung ist von Bos (a. a. O.) der Schluss gezogen worden, dass die Constanten α und β (— welche übrigens bei Flüssigkeiten identisch werden müssten —) sehr kleine Werte hätten. Diese Folgerung ist aber falsch, da diese Grössen, wie schon hervorgehoben wurde, bei allen jenen Messungen „gar keinen Einfluss haben".

Die Messung des Druckes in einer Luftblase hat Quincke[1]) in ganz analoger Weise zur Bestimmung der Magnetisirungs- bzhw. Diamagnetisirungsconstante von Flüssigkeiten benutzt. Für diesen Zweck hat er dann die Versuchsanordnung noch in der Weise modificirt, dass zwischen die verticalen Polflächen eines starken Elektromagnets der eine Schenkel einer mit der zu untersuchenden Flüssigkeit gefüllten U-förmigen Röhre gebracht wurde, deren anderer Schenkel sich ausserhalb des Magnetfeldes befand. Auch in diesem Falle besitzt die Flüssigkeit im Magnetfelde eine (— sofern man von ihrer Krümmung, wie im obigen Fall der Luftblase, absehen kann —) den Kraftlinien parallele Oberfläche; bei Erregung des Elektromagnets wird daher die Flüssigkeit in dem zwischen den Polflächen befindlichen Schenkel, wenn sie magnetisch ist, steigen, oder wenn sie diamagnetisch ist, sinken, bis die dadurch entstandene hydrostatische Druckdifferenz der Differenz der magnetischen Querdrucke $\frac{\mu}{8\pi} R^2$ in der Flüssigkeit und im angrenzenden Gase das Gleichgewicht hält. Die Messung der eintretenden Niveaudifferenz gestattet demnach, die Differenz der Magnetisirungsconstanten μ der Flüssigkeit und des angrenzenden Gases, sowie auch, wenn letzteres in verschiedener Dichtigkeit angewandt wird, die absoluten Werte jener Magnetisirungsconstanten zu bestimmen, wie das von Quincke in zahlreichen Fällen geschehen ist.

Der letztere beobachtete dieselben Niveaudifferenzen, wie bei der beschriebenen Versuchsanordnung, auch dann, wenn die Flüssigkeitsoberfläche im U-Rohr senkrecht zu den (jetzt vertical verlaufenden) Kraftlinien war, was zunächst auffallend erscheint, weil die Druckdifferenz in diesem Falle zufolge 2) gegeben ist durch

$$\frac{\mu' - \mu}{8\pi} \cdot \frac{\mu}{\mu'} R^2 \quad \text{statt durch} \quad \frac{\mu' - \mu}{8\pi} R^2$$

Bedenkt man aber, dass μ und μ' für alle Flüssigkeiten und Gase sehr wenig von 1 verschieden sind, und somit auch R in beiden

1) Quincke, Wied. Ann. 24, p. 347—416, 1884.



Fällen sehr nahe gleich derjenigen magnetischen Kraft, welche in dem Magnetfelde vor dem Hineinbringen der Flüssigkeit herrschen würde, so ergieht sich in der Tat, dass obige Druckdifferenzen sich nicht merklich unterscheiden können.

Beobachtungen der Elektrostriction fester isotroper Körper.

Bei festen Körpern sind die Deformationen durch dielektrische Polarisation bisher nur durch solche Versuchsanordnungen nachgewiesen worden, bei welchen dieselben die isolirende Zwischenschicht eines Condensators bildeten und somit sehr starken elektrischen Kräften unterworfen werden konnten.

Die von Govi wieder aufgefundene Erscheinung der Dilatation einer Leydener Flasche gab ja directe Veranlassung zu solchen Versuchen. Um dieses Phaenomen genauer studiren zu können, gab Duter[1]) der Leydener Flasche die Gestalt einer dünnwandigen Glaskugel mit angeschmolzener Capillare, welche mit einer leitenden Flüssigkeit gefüllt wurde, deren Stand im Capillarrohr zugleich die Volumänderungen anzeigte; als äussere Belegung diente ebenfalls eine in ein das erste umgebendes Gefäss mit Capillarrohr eingeschlossene Flüssigkeit. Durch diese Versuchsanordnung wies Duter nach, dass die äussere und innere Oberfläche der Glaskugel eine nahezu gleiche Ausdehnung erleiden, dass also in erster Linie nicht eine Compression der Glaswand, oder, wie Govi meinte, eine solche der inneren Flüssigkeit die Ursache der Erscheinung ist. Obgleich hiernach die richtige Deutung der letzteren nahe lag, wurde dieselbe nicht von Duter selbst, sondern zuerst von Kortewog[2]) gefunden, welcher bewies, dass die „Anziehung der beiden Belegungen' des Condensators eine der von Duter beobachteten ungefähr gleiche Ausdehnung hervorbringen musste. Dies ergieht sich daraus, dass zufolge der Potentialtheorie die elektrischen Drucke $\frac{K}{8\pi}R^2$, welche auf die innere und äussere Glasoberfläche ausgeübt werden, umgekehrt proportional der 4ten Potenz der Kugelradien sind, so dass die innere Kugeloberfläche einen grösseren Gesamtdruck erleidet als die äussere, und ausser einer Compression der Glaswand, die bei deren geringer Dicke sich der Wahrnehmung entzieht, eine gleich grosse Zunahme des inneren und äusseren Radius stattfindet. Bei einer exacten Berechnung der Volumänderung müssen aber ausser

1) Vergleiche die früher citirten Stellen.

2) Korteweg, Compt. rend. LXXXVIII, p. 338, 1879.

den Maxwell'schen Spannungen parallel den Kraftlinien, welche sich in jenen Drucken auf die Oberflächen äussern, auch die Spannungen 2ter Art berücksichtigt werden, welche radial gerichtete Kräfte auf die inneren Punkte der Glaswand zur Folge haben; d. h. man hat die Gleichungen 5) mit den Grenzbedingungen 6') für den Fall zu lösen, dass die elektrische Kraft

$$R = -\frac{d\varphi}{dr} = \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\varphi_0}{\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}}$$

ist, wo φ_0 die Potentialdifferenz, r_1 und r_2 die Radien der beiden Belegungen des Kugelcondensators bezeichnen. In dieser Weise haben Kirchhoff [1]) und Lorberg das Problem gelöst und sind zu einem Resultate gelangt, welches schon früher Korteweg durch eine etwas abweichende, speciellere Behandlungsweise abgeleitet hatte; es ergab sich unter Voraussetzung einer im Verhältniss zum Radius sehr geringen Wanddicke für die Volumzunahme des Innenraumes, ausgedrückt in Teilen des Gesamtvolums, der Ausdruck:

$$7)\qquad \frac{\delta v}{v} = \frac{3\varphi_0^2}{2E \cdot (r_2 - r_1)^2}\left\{\frac{K}{4\pi} + \nu \cdot \alpha - (1-\nu)\beta\right\}$$

worin E den Elasticitätsmodul, ν das Verhältniss der Quercontraction zur Längsdilatation für die Substanz der Kugelschale ist. Abweichende Formeln, welche 1882 von Boltzmann [2]) und neuerdings von Kopp [3]) abgeleitet worden sind, beruhen auf Irrtümern in den theoretischen Grundlagen, wozu bei letzterem noch Rechenfehler kommen.

Eine grosse Reihe sorgfältiger Messungen der Dilatation von gläsernen Kugelcondensatoren hat Quincke [4]) 1880 -83 ausgeführt, der dabei auch, wie es für die Anwendbarkeit der obigen Formel

---

1) Kirchhoff, Wied. Ann. 24, p. 70; 1885.

2) Boltzmann, Sitzungsber. der Wiener Acad. d. Wiss. 82 (2) p. 826 u. 1157; 1880. Das Fehlerhafte seiner Entwicklungen ist bereits von Kirchhoff a. a. O. dargelegt.

3) Kopp, Theorie der Elektrostriction kugelförmiger Condensatoren. Dissertation, Leipzig 1890. — Der Verf. setzt die elektrischen Drucke an den Belegungen proportional mit K^2 statt K, erhält durch falsche Differentiation Kraftcomponenten für das Innere des Dielektricums und macht ferner den Fehlschluss, die Glieder mit α und β als klein zu vernachlässigen, weil sie nur von den Aenderungen herrührten, welche die Dielektricitätsconstante durch die Elektrostriction selbst erlitte.

4) Quincke, Wied. Ann. 10, p. 165, 1880, 19, p. 573, 1883.



durchaus notwendig ist, die Elasticitätsconstanten und Dielektricitätsconstante der einzelnen Apparate direct bestimmte. Allein seine Beobachtungsresultate stimmen doch zu wenig unter einander überein und scheinen zu sehr durch mancherlei unvermeidliche Fehlerquellen, wie die Leitungsfähigkeit des Glases, gestört zu sein, als dass man sie zu einer exacten Vergleichung mit der Theorie resp. zu Schlüssen über die Grössen α und β verwenden könnte.

Man hat die Elektrostriction ferner an cylinderförmigen Condensatoren beobachtet, bestehend aus Glasröhren, deren Belegungen entweder von einem dünnen Silberüberzuge, oder wiederum von leitender Flüssigkeit gebildet wurden. Messungen der Längenänderung solcher Cylindercondensatoren hat schon 1879 Righi [1]) mit Hülfe eines Fühlhebels ausgeführt, und später in grösserem Umfange Quincke [2]), welcher zugleich die „Zunahme des inneren Volumens" der Röhren bestimmte; noch genauer sind vielleicht die 1887 von Cantone [3]) in Palermo angestellten Beobachtungen, wobei die Verlängerung durch die Verschiebung Newton'scher Interferenzstreifen gemessen wurde. — Die Integration der Gleichungen 5) mit den Grenzbedingungen 6') für den Fall eines unendlich langen Cylindercondensators, wo nur radial gerichtete elektrische Kräfte wirken, ergiebt, dass die bei der Ladung eintretende Deformation im Falle sehr geringer Wanddicke bestehen würde in einer Erweiterung des Cylinders, die gegeben ist durch

$$\frac{\delta r}{r} = \frac{\varphi_0^2}{2d^2 E}\left\{\frac{K}{4\pi}(1+\nu)+\alpha\nu-\beta\right\}$$

und in einer Längsdilatation

$$\frac{\delta l}{l} = \frac{\varphi_0^2}{2d^2 E}(\alpha+\beta)\,\nu$$

Das vorstehende Resultat würde auch noch für einen begrenzten Cylinder bestehen bleiben, wenn dessen Belegungen unveränderliche Länge hätten.

Sobald aber eine Längenänderung des Glases auch mit einer gleich grossen der Belegung vorhanden ist, wie es eintritt, wenn die Belegungen auch für tangentiale Kräfte fest am Glase haften,

---

1) Righi, Compt. rend. LXXXVIII, p. 1263, 1879; Journ. de phys. (1) IX p. 203.

2) Quincke, Wied. Ann. 10 p. 374, 515; 1880; 19 p. 569, 1883.

3) Cantone, Rend. della R. Acc. dei Lincei IV, p. 344, 471, 1888.

oder wenn der Cylinder nnten geschlossen ist, nnd eine leitende Flüssigkeit als innere Belegnng dient, so kommt noch eine Längsdilatation

$$\frac{\delta l}{l} = \frac{\varphi_0^2}{2d^2E}\left(\frac{K}{4\pi} - \beta\right)$$

nnd eine entsprechende Quercontraction

$$\frac{\delta r}{r} = -\frac{\varphi_0^2 \nu}{2d^2E}\left(\frac{K}{4\pi} - \beta\right)$$

hinzu, so dass dann die genannten relativen Aendernngen der Länge, des Radins nnd des Volnmens gegehen sind dnrch

8. $$\left|\begin{aligned} \frac{\delta l}{l} &= \frac{\varphi_0^2}{2d^2E}\left(\frac{K}{4\pi} + \alpha\nu - \beta(1-\nu)\right) \\ \frac{\delta r}{r} &= \frac{\varphi_0^2}{2d^2E}\left(\frac{K}{4\pi} + \alpha\nu - \beta(1-\nu)\right) \\ \frac{\delta v}{v} &= \frac{\delta l}{l} + 2\frac{\delta r}{r} = \frac{3\varphi_0^2}{2d^2E}\left(\frac{K}{4\pi} + \alpha\nu - \beta(1-\nu)\right) \end{aligned}\right.$$

Somit ist

$$\frac{\delta l}{l} = \frac{\delta r}{r} = \frac{1}{3}\frac{\delta v}{v}$$

nnd der Ausdruck für $\frac{\delta v}{v}$ stimmt völlig mit demjenigen 7) üherein, welcher für einen dünnwandigen Kugelcondensator gilt. Dieses Resnltat hat schon Korteweg[1]) lediglich mit Hülfe des Energieprincips abgeleitet.

Die ohen ansgesprochene Voranssetznng, nnter welcher dasselbe gilt, war nnn ohne Zweifel bei allen Beobachtnngen erfüllt, nnd in der Tat hat sich die Relation

9. $$\frac{\delta l}{l} = \frac{1}{3}\frac{\delta v}{v}$$

dahei immer ziemlich gut bestätigt, wodnrch Quincke[2]) anfangs zu dem falschen Schlusse veranlasst wnrde,' dass sich das Glas in Folge der dielektrischen Polarisation allseitig gleichmässig ausdehne, wie dnrch Erwärmung. Die Längsdehnnng eines nnten ge-

1) Korteweg, Wied. Ann. 12, p. 647, 1881.

2) Quincke, Wied. Ann. 10. p. 515; 1880. Die Unrichtigkeit dieses Schlusses wnrde zuerst dargetan von Röntgen. Wied. Ann. 11, p. 771, 1880.

schlossenen Cylindercondensators mit Flüssigkeitsbelegungen hat Lorberg[1]) auf Grund der allgemeinen Theorie der Elektrostriction in Strenge zu berechnen versucht, indem er verschiedene specielle Annahmen über die Form der den Cylinder schliessenden Calotte einführte; bei dieser Rechnung ist er jedoch in Irrtümer geraten, in Folge deren das Resultat von dem unter 8) angegebenen abweicht. Das letztere ist (im Gegensatz zu dem von Lorberg) unabhängig von der besonderen Form der erwähnten Calotte, wenn man auch, um es aus den Gleichungen 6) und 6') abzuleiten, eine solche besondere Form, z. B. die einer Kugelschale, annehmen muss; in der Tat ist leicht einzusehen, dass die Form der Calotte nur Einfluss haben kann auf ihre eigenen Deformationen, welche das Gesamtresultat nur unmerklich modificiren können und in den Formeln 8) auch tatsächlich vernachlässigt sind. — Die falschen Lorberg'schen Formeln hat Cantone in der schon citirten Arbeit übernommen und benutzt, um aus seinen Beobachtungen, welche an halbkugelförmig geschlossenen Glasröhren angestellt wurden, die Grössen α und β zu berechnen. Die hierfür von ihm angegebenen Werte sind also ebenfalls unrichtig; in Wahrheit kann man, wie die richtigen Formeln 8) zeigen, aus jenen Beobachtungen $\left(\text{von } \frac{\partial l}{l} \text{ und } \frac{\partial v}{v}\right)$ überhaupt gar nicht α und β getrennt berechnen, sondern nur die Combination $\nu\alpha - (1-\nu)\beta$. Aber auch die hierfür aus Cantone's Beobachtungen sich ergebenden Werte, welche $\frac{1}{2}$ bis $\frac{1}{3}$ betragen würden, können wegen der unsicheren Kenntniss der Dielektricitätsconstante, der von Cantone erwähnten Abhängigkeit der Dilatationen von der Ladungsdauer u. s. w. noch nicht als zuverlässig betrachtet werden. Eine Wiederholung der Versuche nach der von Cantone angewandten Methode mit recht gut isolirenden Glassorten wäre wünschenswert.

Die Beobachtungen, welche von Quincke, sowie von Korteweg und Julius an Kautschuk und von ersterem an Glimmer angestellt worden sind, mögen hier übergangen werden, da sie eine Vergleichung mit der Theorie nicht gestatten. Wir wenden uns vielmehr zu den Deformationen magnetisirbarer fester Körper im magnetischen Felde.

Beobachtungen über Magnetostriction.

Schon seit Joule war die Tatsache bekannt, dass sich ein Eisenstab durch longitudinale Magnetisirung verlängert, und 1879

---

1) Lorberg, Wied. Ann. 21, p. 300; 1884.

führte Righi [1]) Messungen dieser Verlängerung aus, welche ergaben, dass letztere proportional dem Quadrate der Intensität des (durch einen galvanischen Strom erzeugten) magnetischen Feldes war. Die Berechnung der Deformation eines den Kraftlinien parallelen cylindrischen Stabes würde sich nicht streng durchführen lassen, sondern höchstens in gewisser Annäherung für den Fall sehr kleiner Querdimensionen, wo man die Selbstinduction vernachlässigen, d. h. annehmen könnte, dass das magnetische Feld durch das Hineinbringen des Stabes nicht merklich geändert würde [2]). Daher hat Cantone [3]) dem Metallkörper die Form eines sehr gestreckten Rotationsellipsoides gegeben, für welches das Problem streng lösbar ist. Das homogene Magnetfeld wurde durch einen Strom, welcher eine das Ellipsoid umgebende Drahtspirale durchfloss, erzeugt, die Längenänderung des Ellipsoids mittelst der Verschiebung von Interferenzstreifen, und seine Volumänderung mittelst eines mit Flüssigkeit gefüllten Dilatometers gemessen, in welches das Ellipsoid hineingestellt wurde. Aus diesen beiden Messungen kann man, nachdem noch die Magnetisirungsconstante besonders bestimmt worden ist, die Grössen berechnen, welche den früher mit α und β bezeichneten analog sind und also die Aenderung der Magnetisirungsconstante durch Deformationen bestimmen. Cantone findet für dieselben bei Eisen und Nickel Werte, welche im Verhältniss zur Magnetisirungsconstante selbst so ausserordentlich gross sind, dass sie den Sinn der Deformationen allein bestimmen. (Die Zahlenwerte, welche überdies je nach der Feldstärke sehr variirten, sind wol noch wenig zuverlässig). Bei Eisen ist α negativ, β positiv, bei Nickel umgekehrt α positiv, β negativ, da sich Eisen in der Magnetisirungsrichtung ausdehnt, Nickel aber zusammenzieht. Die hohen Werte

---

1) Righi, Memorie dell' Accad. delle Scienze dell' Istit. di Bologna' (4) I, 1879.

2) Bei dieser Annäherung ergeben die Maxwell'schen Spannungen allein eine allseitig gleiche Dilatation, und nicht etwa, wie man zunächst erwarten könnte, eine Contraction parallel den Kraftlinien, da das Zusammenziehungsbestreben in dieser Richtung durch die auf die scheinbaren magnetischen Belegungen der Endflächen wirkenden Kräfte überwogen wird. Die an dünnen Eisenstäben von Joule und Righi beobachtete Längsdehnung ist aber nicht in dieser Weise zu erklären, sondern hängt wesentlich von den Spannungen 2ter Art ab (siehe unten).

3) Cantone, Memorie della R. Accad. dei Lincei VI, 1890; Beiblätter 15, p. 49 1891. Die theoretische Behandlung schliesst sich derjenigen an, welche Kirchhoff bereits in Wied. Ann. 25, p. 702, 1885 für eine magnetisirbare Kugel gegeben hatte. Uebrigens war mir das Original nicht zugänglich.

von α und β bringen es mit sich, dass die Deformationen in Folge der Magnetisirung relativ gross sind und selbst schon merkliche Aenderungen der Magnetisirungsconstanten bewirken. Hieraus ergiebt sich, wie leicht zu sehen, eine bestimmte „Abhängigkeit der „Magnetisirungsconstante" von der Feldstärke", welche aber nicht mit der beobachteten im Einklang steht, falls man α und β als Constanten betrachtet. Ebensowenig würde sich bei letzterer Annahme die Tatsache erklären lassen, dass bei einer bestimmten Feldstärke die anfängliche Dehnung eines longitudinal magnetisirten Eisendrahtes in eine Zusammenziehung übergeht. Es ist also bei den stark magnetischen Metallen die Kirchhoff'sche Theorie jedenfalls nur für schwache magnetische Kräfte anwendbar; hierfür hat sie aber insofern eine Bestätigung gefunden, als directe Beobachtungen über den Einfluss mechanischer Dehnung auf die Magnetisirungsconstante für die Dehnungsrichtung gezeigt haben, dass dieser Einfluss bei Eisen anfangs in einer Zunahme, bei Nickel in einer Abnahme besteht, wie es nach der Theorie aus dem Sinn der durch longitudinale Magnetisirung bewirkten Deformation folgt. — Auch die auf einer allgemeineren Grundlage beruhende Theorie, welche J. J. Thomson für die Wechselbeziehungen zwischen Magnetisirung und elastischen Deformationen in seinem Buche „Anwendungen der Dynamik auf Physik und Chemie" entwickelt hat, vermag noch nicht alle die merkwürdigen Erscheinungen zu erklären, welche auf diesem, noch weiterer Bearbeitung bedürfenden Gebiete namentlich durch englische Forscher, wie Bidwell und Tomlinson[1]), aufgefunden worden sind.

Elektrische Doppelbrechung.

Es möge schliesslich noch einer interessanten Erscheinung Erwähnung geschehen, welche man mit der Elektrostriction in Zusammenhang gebracht hat: es ist die von Kerr[2]) entdeckte Doppelbrechung gewisser isotroper Körper im elektrischen Felde. Feste isotrope Körper müssen ja durch dielektrische Polarisation in Folge der Deformationen, welche den Gegenstand unserer Betrachtung bildeten, doppelbrechend werden; allein es lässt sich berechnen, dass in Glas, welches für Versuche dieser Art wol allein in Betracht käme, diese Doppelbrechung nur unter sehr günstigen Umständen,

---

1) Vergl. die Referate über deren Arbeiten in Bd. 9, 10, 11, 14 der „Beiblätter"; ferner z. B. Zehnder, Wied. Ann. 41, p. 218, 1891.

2) Kerr, Phil. Magazine (4) L, p. 337 und 446, 1875; Phil. Mag. (5) VIII, 185 und 229, 1879, (5) IX, 114, 1880.

etwa bei einer sehr langen und sehr stark geladenen Franklin'schen Tafel, wahrnehmbar werden kann. In der Tat ist es auch noch fraglich, ob die von Kerr und Brongserma [1]) in Glas beobachtete Doppelbrechung wirklich auf den elektrischen Deformationen, oder auf secundären Wirkungen beruhte, um so mehr, als sie von anderen Beobachtern [2]) bei allem Anschein nach günstigeren Versuchsbedingungen nicht aufgefunden werden konnte. Dagegen ist es ganz unmöglich, die bei isolirenden Flüssigkeiten zuerst von Kerr, dann von Quincke [3]) und Röntgen [4]) beobachtete und gemessene elektrische Doppelbrechung durch Deformationen zu erklären, da in Flüssigkeiten, und besonders in so leicht beweglichen wie der jenes Phaenomen sehr stark zeigende Schwefelkohlenstoff, nur allseitig gleiche Dilatation oder Contraction möglich ist, welche wol eine Aenderung des Brechungsindex, aber keine Doppelbrechung verursachen kann [5]). „Es handelt sich hier demnach offenbar um eine „directe Einwirkung der dielektrischen Polarisation auf die Licht- „bewegung" und dadurch erlangt das Phaenomen gewiss eine hohe Bedeutung. Dasselbe aber als einen Beweis für das wirkliche Vorhandensein der von Maxwell supponirten Spannungen anzusehen wäre nur dann richtig, wenn auch das Vacuum im elektrischen Felde doppelbrechend würde; denn in ponderabelen Dielektricis ist der mit $(K-1)$ proportionale Teil jener Spannungen, wie wir sahen, auch nach der alten Anschauung vorhanden.

Elektrostriction krystallinischer Körper.

Wir wollen nun noch den Erscheinungen der Elektrostriction, welche bei krystallinischen Körpern auftreten können, eine kurze Betrachtung widmen; es werden dabei einige wesentliche Verschiedenheiten gegenüber der Elektrostriction isotroper Körper zu beachten sein.

---

1) Brongserma, Wied. Ann. 16, p. 422; 1882.

2) Gordon, Phil. Mag. (5) .II p. 203, 1876; Mackenzie, Wied. Ann. 2, p. 336, 1877; Quincke, Wied. Ann. 10, p. 533, 1880.

3) Quincke, Wied. Ann. 10, p. 533, 1880; 19, p. 765, 1883; 32, p. 529, 1887.

4) Röntgen, Wied. Ann. 10, p. 77. 1880.

5) Bemerkenswert ist die Tatsache, dass der Charakter der elektrischen Doppelbrechung bei einigen Flüssigkeiten positiv, bei den übrigen negativ ist. Die Versuche Quincke's, diesen Unterschied aus dem verschiedenen Sinne der Aenderung des Brechungsindex durch thermische Dilatation und der Volumänderung im elektrischen Felde zu erklären, sind nicht stichhaltig.

Zunächst nehmen hier diejenigen Krystalle eine besondere Stellung ein, „welche kein Centrum der Symmetrie besitzen", d. h. in welchen entgegengesetzte Richtungen physikalisch ungleichwertig sind (piëzoelektrische Krystalle). Denn in diesen Krystallen sind Deformationen möglich, welche ihr Vorzeichen mit demjenigen der dielektrischen Polarisation umkehren und somit nach der einfachsten Annahme, die übrigens auch experimentell bestätigt worden ist, „lineare Functionen der elektrischen Kraftcomponenten oder Momente" (Polarisationen) sind. Dieselben verhalten sich zu den gewöhnlichen, dem Quadrat der Kraftintensität proportionalen Deformationen gleichsam wie Grössen 1ter Ordnung zu solchen 2ter Ordnung und scheinen auch nach den bisher vorliegenden Beobachtungen (an Quarz) jene bei weitem an Grösse zu übertreffen. Um diese Deformationen zu berechnen, kann man ganz analog verfahren, wie früher bei den von den „Spannungen 2ter Art" herrührenden Deformationen, indem man jetzt in dem Ausdrucke 3) für die potentielle Energie der Volumeinheit noch hinzufügt:

$$9)\quad +\frac{\partial\varphi}{\partial x}(\varepsilon_{11}x_x+\dots+\varepsilon_{16}x_y)+\frac{\partial\varphi}{\partial y}(\varepsilon_{21}x_x+\dots+\varepsilon_{26}x_y) +\frac{\partial\varphi}{\partial z}(\varepsilon_{31}x_x+\dots+\varepsilon_{36}x_y)$$

wo die ε_{hk} neue Constanten des Krystalls sind. Die negativen Ableitungen dieses Ausdruckes nach $x_x, \dots x_y$ liefern dann die neu hinzukommenden Druckcomponenten

$$10)\quad \begin{aligned} \mathfrak{A}_x'' &= -\left(\varepsilon_{11}\frac{\partial\varphi}{\partial x}+\varepsilon_{21}\frac{\partial\varphi}{\partial y}+\varepsilon_{31}\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)\\ &\dots\dots\dots\dots\\ \mathfrak{B}_z'' &= -\left(\varepsilon_{14}\frac{\partial\varphi}{\partial x}+\varepsilon_{24}\frac{\partial\varphi}{\partial y}+\varepsilon_{34}\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)\\ &\dots\dots\dots\dots \end{aligned}$$

welche in die Differentialgleichungen 5) und Grenzbedingungen 6) bzhw. 6') neben den früheren einzusetzen sind. Betrachtet man nur die Deformationen erster Ordnung unter Vernachlässigung der dem Quadrate der elektrischen Kraft proportionalen, so hat man also zu deren Bestimmung die Differentialgleichungen

$$\frac{\partial X_x}{\partial x}+\frac{\partial X_y}{\partial y}+\frac{\partial X_z}{\partial z}=-\frac{\partial\mathfrak{A}_x''}{\partial x}-\frac{\partial\mathfrak{A}_y''}{\partial y}-\frac{\partial\mathfrak{A}_z''}{\partial z}$$
$$\dots\dots\dots\dots$$

und die Grenzbedingungen

$$X_x \cos(n, x) + X_y \cos(n, y) + X_z \cos(n, z) = -\mathfrak{A}_x'' \cos(n, x)$$
$$- \mathfrak{A}_y'' \cos(n, y) - \mathfrak{A}_z'' \cos(n, z)$$

. . . .

letztere gültig für den Fall, dass die Oberfläche an ein nicht piëzoelektrisches, gleichviel ob isolirendes oder leitendes Medinm grenzt und keinen äusseren Druckkräften ausgesetzt ist; dabei ist allgemein zufolge der Elasticitätstheorie:

11)
$$-X_x = c_{11} x_x + \ldots + c_{16} x_y$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$-X_y = c_{61} x_x + \ldots + c_{66} x_y$$
$$c_{hk} = c_{kh}.$$

Es sei hier noch einmal daran erinnert, dass die obigen Gleichungen nur bei ganz speciellen Verteilungen der elektrischen Kraft, z. B. im Falle eines (auch noch nach Einführung des Krystalles) **homogenen** elektrischen Feldes, die einfache Lösung

$$-X_x = \mathfrak{A}_x'', \ldots - X_y = \mathfrak{A}_y'',$$

d. h. die Berechnung der an einer bestimmten Stelle eintretenden Deformationen unmittelbar aus den ebendort herrschenden Drucken $\mathfrak{A}_x'', \ldots \mathfrak{A}_y''$ gestatten.

Da die negativen Ableitungen der potentiellen Energie nach den elektrischen Kräften $-\frac{\partial \varphi}{\partial x}, \ldots$ allgemein die inducirten elektrischen Momente (a, b, c) darstellen, so zeigt der Ausdruck 9), dass auch beim Fehlen äusserer elektrischer Kräfte, d. h. für $\varphi = \text{Const.}$, in Krystallen ohne Centrum der Symmetrie elektrische Momente auftreten, wenn sie deformirt werden. Es ergicbt sich so für diese „**piëzoelektrische Erregung**" der allgemeine Ansatz:

$$a = \varepsilon_{11} x_x + \ldots + \varepsilon_{16} x_y$$
$$b = \varepsilon_{21} x_x + \ldots + \varepsilon_{26} x_y$$
$$c = \varepsilon_{31} x_x + \ldots + \varepsilon_{36} x_y$$

welcher 1890 von W. Voigt[1]) aufgestellt und für die einzelnen

1) W. Voigt, Allgemeine Theorie der piëzo- und pyroelektr. Erscheinungen an Krystallen; Abhandl. der k. Ges. d. Wiss. zu Göttingen, 36; 1890.

Krystallgruppen gemäss ihren Symmetrieeigenschaften specialisirt worden ist. Hiernach ist ersichtlich, dass sich die „Deformationen erster Ordnung“ berechnen lassen, sobald das piëzoelektrische Verhalten des betreffenden Krystalles vollständig bekannt ist[1]); dies ist bereits für einen einfachen Fall an Quarz von J. und P. Curie[2]) experimentell bestätigt worden.

Wie E. Riecke[3]) gezeigt hat, lassen sich die piëzoelektrischen Erscheinungen auch molecular theoretisch vollständig erklären, wenn man die Moleküle piëzoelektrischer Krystalle mit gewissen permanent elektrischen Polsystemen behaftet annimmt. Auf Grund dieser Vorstellung kann man nun auch die in dem obigen Ansatze enthaltenen Gesetze für das reciproke Phaenomen, d. h. die „Deformationen erster Ordnung“, ableiten, indem man die Wechselwirkung zwischen jenen elektrischen Polsystemen und den durch die äussere elektrische Kraft inducirten Momenten der einzelnen Moleküle berechnet. Dies scheint mir deshalb bemerkenswert, weil sich die Spannungen „zweiter Ordnung“, welche in isotropen Medien allein vorhanden sind, nicht in analoger Weise durch Berechnung der Wechselwirkung polarisirter Moleküle, wie es der Clausius-Mosotti'schen Vorstellung von den Dielektricis entsprechen würde, ableiten lassen[4]).

---

1) Dieser Zusammenhang ist zuerst von Lippmann (Journ. de phys. (1) X p. 391 und Ann. de chim. et phys. (5) XXIV p. 164; 1881) für einen speciellen Fall, sodann allgemein vom Verf. (F. Pockels, N. Jahrb. f. Mineralogie. Beilagebd. VII p. 201, 1890) bewiesen worden. P. Duhem (Ann. de l'Ecole Normale Supérieure (3) IX p. 167; 1892) gelangte neuerdings infolge eines Irrtums zu entgegengesetzten Resultaten; vergl. darüber F. Pockels, N. Jahrb. f. Mineralogie, Beilagebd. VIII, p. 407; 1892.

2) J. und P. Curie, Compt. rend. XCV. p. 914, 1882; Journ. de phys. (2) VIII, p. 149; 1889.

3) E. Riecke, Göttinger Nachrichten 1891, p. 191.

4) Berechnet man nämlich die Moleculardrucke, welche aus der Wechselwirkung elektrisch polarisirter Moleküle resultiren würden, so findet man

$$A_x = -2k^2\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2 + k^2\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2 + k^2\left(\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)^2$$

. . . .

$$B_z = +2k^2\frac{\partial\varphi}{\partial y}\frac{\partial\varphi}{\partial z}$$

. . . .

wo k eine mit $K-1$ proportionale Constante bezeichnet. Diese Ausdrücke würden mit den früher angegebenen für

Die bei allen Krystallen notwendigerweise ebenfalls auftretenden, wenn auch bisher noch nicht experimentell nachgewiesenen Spannungen, welche dem Quadrate der elektrischen Kraft proportional sind und denjenigen entsprechen, welche wir bei isotropen Körpern zuvor betrachtet haben, lassen sich in ganz analoger Weise berechnen, wie es für letztere von Kirchhoff und Lorberg geschehen ist. Man hat nur zu berücksichtigen, dass an Stelle von $\frac{K}{8\pi}\left\{\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)^2\right\}$ in der Formel für die potentielle Energie eines dielektrisch polarisirten Krystalles der Ausdruck tritt:

$$\frac{1}{8\pi}\left\{K_{11}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2+K_{22}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2+K_{33}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)^2+2K_{23}\frac{\partial\varphi}{\partial y}\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right.$$
$$\left.+2K_{31}\frac{\partial\varphi}{\partial z}\frac{\partial\varphi}{\partial x}+2K_{12}\frac{\partial\varphi}{\partial x}\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right\}$$

wo $K_{11}, \ldots K_{12}$ sechs von der Natur des Krystalls und der Orientirung des Coordinatensystems abhängige Constanten sind, die sich durch die 3 Hauptdielektricitätsconstanten k_1, k_2, k_3 und die Richtungscosinus $\alpha_1, \ldots \gamma_3$ der Hauptaxen des Inductionsellipsoides folgendermassen ausdrücken:

$$
\begin{aligned}
K_{11} &= k_1\alpha_1^2+k_2\alpha_2^2+k_3\alpha_3^2\\
K_{22} &= k_1\beta_1^2+k_2\beta_2^5+k_3\beta_3^2\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\\
K_{12} &= k_1\alpha_1\beta_1+k_2\alpha_2\beta_2+k_3\alpha_3\beta_3
\end{aligned}
\tag{12}
$$

$$\mathfrak{A}_x+\mathfrak{A}_x', \ldots \mathfrak{B}_z+\mathfrak{B}_z', \quad \ldots$$

(das sind die von der ponderabelen Materie herrührenden Spannungen) übereinstimmen, wenn man die aus der Mosotti-Clausius'schen Theorie, nach welcher $\frac{K-1}{K+2}$ proportional der Dichtigkeit ist, folgende Relation einführt:

$$\alpha=\beta=\frac{(K-1)(K+2)}{12\pi}$$

man erhält dann aber

$$\mathfrak{A}_x+\mathfrak{A}_x'=-\frac{K-1}{4\pi}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2-\frac{(K-1)^2}{24\pi}R^2,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\mathfrak{B}_z+\mathfrak{B}_z'=-\frac{K-1}{4\pi}\frac{\partial\varphi}{\partial y}\frac{\partial\varphi}{\partial z}$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$

also von $A_x, \ldots B_z, \ldots$ ganz abweichende Ausdrücke.

Hieraus geht hervor, dass sich $K_{11}, \ldots K_{12}$ auch durch blosse Drehungen der Volumelemente (oder des ganzen Krystalls) ändern, und zwar ergiebt sich, wenn λ, μ, ν jene Drehungen um die X-, Y-, und Z-Axe bedeuten,

$$\frac{\partial K_{11}}{\partial \lambda} = 0, \quad \frac{\partial K_{22}}{\partial \lambda} = -2K_{23}, \quad \frac{\partial K_{33}}{\partial \lambda} = +2K_{23}$$

$$\frac{\partial K_{23}}{\partial \lambda} = K_{22} - K_{33}, \quad \frac{\partial K_{31}}{\partial \lambda} = K_{12}, \quad \frac{\partial K_{12}}{\partial \lambda} = -K_{31}$$

woraus die Differentialquotienten nach μ und ν leicht durch cyklische Permutation ableitbar sind. Dies ist zu berücksichtigen, wenn man nach dem Vorgange Kirchhoff's die Variation berechnen will, welche das Raumintegral

$$13) \qquad \int \left(\varepsilon\varphi - \frac{1}{8\pi} \left\{ K_{11} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)^2 + \ldots + 2K_{12} \frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right\} \right) dk$$

dadurch erleidet, dass (bei unverändertem φ) in dem krystallinischen Dielektricum ein beliebiges System von Verschiebungen ξ, η, ζ hervorgebracht wird; denn ein solches ist mit Drehungen der Volumelemente verbunden, deren Componenten λ, μ, ν durch

$$\frac{1}{2}\left(\frac{\partial \zeta}{\partial y} - \frac{\partial \eta}{\partial z}\right), \quad \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \xi}{\partial z} - \frac{\partial \zeta}{\partial x}\right), \quad \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \eta}{\partial x} - \frac{\partial \xi}{\partial y}\right)$$

gegeben sind. Setzt man die so berechnete Variation des obigen Integrals, d. i. die Variation der Energie bei Vernachlässigung des Einflusses der Deformationen auf $K_{11} \ldots K_{12}$, nachdem man noch die von den Drehungen herrührenden Glieder durch partielle Integration so umgeformt hat, dass sie ebenfalls die Factoren ξ, η, ζ erhalten, gleich der negativen Arbeit der ponderomotorischen Kräfte: $-(A\xi + B\eta + C\zeta)$, und bringt die so gefundenen Ausdrüke A, B, C unter Benutzung der Differentialgleichung

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(K_{11}\frac{\partial \varphi}{\partial x} + K_{12}\frac{\partial \varphi}{\partial y} + K_{13}\frac{\partial \varphi}{\partial z}\right)$$
$$+ \frac{\partial}{\partial y}\left(K_{12}\frac{\partial \varphi}{\partial x} + K_{22}\frac{\partial \varphi}{\partial y} + K_{23}\frac{\partial \varphi}{\partial z}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(K_{13}\frac{\partial \varphi}{\partial x} + K_{23}\frac{\partial \varphi}{\partial y} + K_{33}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial z}\right)\right) = -4\pi\varepsilon$$

welcher φ genügt, auf die Form

$$-\frac{\partial A_x}{\partial x} - \frac{\partial A_y}{\partial y} - \frac{\partial A_z}{\partial z}, -\frac{\partial B_x}{\partial x} \ldots, -\frac{\partial C_x}{\partial x} \ldots,$$

so erhält man diejenigen Spannungscomponenten, welche im krystallinischen Dielektricum an Stelle der durch die Gleichungen (1) dargestellten Maxwell'schen Spannungen treten.

Das Resultat ist:

14.

$$A_x = -\frac{1}{8\pi}\left\{K_{11}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2 - K_{22}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2 - K_{33}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)^2 - 2K_{23}\frac{\partial\varphi}{\partial y}\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right\}$$

$$B_y = -\frac{1}{8\pi}\left\{-K_{11}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2 + K_{22}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2 - K_{33}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)^2 - 2K_{31}\frac{\partial\varphi}{\partial z}\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right\}$$

$$C_z = -\frac{1}{8\pi}\left\{-K_{11}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2 - K_{22}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2 + K_{33}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)^2 - 2K_{12}\frac{\partial\varphi}{\partial x}\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right\}$$

$$B_z = C_y = -\frac{1}{8\pi}\left\{K_{23}\left[\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)^2\right] + (K_{22}+K_{33})\frac{\partial\varphi}{\partial y}\frac{\partial\varphi}{\partial z} + K_{12}\frac{\partial\varphi}{\partial z}\frac{\partial\varphi}{\partial x} + K_{13}\frac{\partial\varphi}{\partial x}\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right\}$$

$$C_x = A_z = -\frac{1}{8\pi}\left\{K_{31}\left[\left(\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2\right] + (K_{33}+K_{11})\frac{\partial\varphi}{\partial z}\frac{\partial\varphi}{\partial x} + K_{12}\frac{\partial\varphi}{\partial y}\frac{\partial\varphi}{\partial z} + K_{23}\frac{\partial\varphi}{\partial x}\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right\}$$

$$B_x = A_y = -\frac{1}{8\pi}\left\{K_{12}\left[\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2\right] + (K_{11}+K_{22})\frac{\partial\varphi}{\partial x}\frac{\partial\varphi}{\partial y} + K_{13}\frac{\partial\varphi}{\partial y}\frac{\partial\varphi}{\partial z} + K_{23}\frac{\partial\varphi}{\partial z}\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right\}$$

Natürlich ergeben auch diese Spannungen keine Kraftcomponenten für das Innere eines homogenen, keine wahre Elektricität enthaltenden Dielektricums, d. h. es ist $\frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$ nebst den beiden analogen Ausdrücken null zufolge der Differentialgleichung

$$\frac{\partial}{\partial x}\left\{K_{11}\frac{\partial\varphi}{\partial x} + K_{12}\frac{\partial\varphi}{\partial y} + K_{13}\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right\} + \frac{\partial}{\partial y}\left\{K_{12}\frac{\partial\varphi}{\partial x} + K_{22}\frac{\partial\varphi}{\partial y} + K_{23}\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right\} + \frac{\partial}{\partial z}\left\{K_{13}\frac{\partial\varphi}{\partial x} + K_{23}\frac{\partial\varphi}{\partial y} + K_{33}\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right\} = 0$$

welcher das elektrische Potential φ daselbst genügt.

Die Deformation des dielektrischen Krystalls ist also zu berechnen aus den für das Innere geltenden Differentialgleichungen

$$\frac{\partial X_x}{\partial x} + \frac{\partial X_y}{\partial y} + \frac{\partial X_z}{\partial z} = 0$$

. . . .

und den Oberflächenbedingungen

$$X_x \cos(n, x) + X_y \cos(n, y) + X_z \cos(n, z) = (-A_x + A_x') \cos(n, x)$$
$$+ (-A_y + A_y') \cos(n, y) + (-A_z + A_z') \cos(n, z)$$

. . . .

worin $X_x, \ldots X_y$ die durch 11) gegebenen linearen Functionen der Deformationen und $A_x', \ldots A_y'$ die Maxwell'schen Spannungen in dem angrenzenden Medium sind. Dabei ist zu berücksichtigen, dass in den Grenzbedingungen für φ im krystallinischen Medium an Stelle von $K\frac{\partial \varphi}{\partial n}$ der allgemeinere Ausdruck tritt:

$$\left(K_{11}\frac{\partial \varphi}{\partial x} + K_{12}\frac{\partial \varphi}{\partial y} + K_{13}\frac{\partial \varphi}{\partial z}\right)\cos(n, x)$$
$$+ \left(K_{12}\frac{\partial \varphi}{\partial x} + K_{22}\frac{\partial \varphi}{\partial y} + K_{23}\frac{\partial \varphi}{\partial z}\right)\cos(n, y)$$
$$+ \left(K_{13}\frac{\partial \varphi}{\partial x} + K_{23}\frac{\partial \varphi}{\partial y} + K_{33}\frac{\partial \varphi}{\partial z}\right)\cos(n, z)$$

Die vorstehenden Resultate, bzhw. die entsprechenden für magnotisch polarisirte Krystalle, sind in etwas anderer Form von Hertz in seiner p. 65 citirten Abhandlung (p. 389 ff.) abgeleitet worden; dagegen stehen sie im Widerspruch zu denen, welche Maxwell in seinem „Treatise on electr. and magn.", Art. 641 — 643, angieht. Nach letzterem wirken nämlich auf die Volumelemente des magnetisch oder dielektrisch polarisirten Krystalles auch Drehungsmomente, während nach Hertz nur Druckkräfte von der Natur der elastischen, charakterisirt durch die Relationen

$$A_y = B_x, \quad B_z = C_y, \quad C_x = A_z$$

auftreten. Nun würde man in der Tat nach der molecularen Vorstellung von der Natur eines Dielektricums, also etwa nach der Mosotti-Clausius'schen Hypothese, das Auftreten von Drehungsmomenten im Falle anisotroper Structur erwarten, weil dann die Axen der polarisirten Moleküle nicht den Kraftlinien parallel sind, und somit das Bestreben vorhanden sein muss, die ersteren in die Richtung der letzteren zu drehen. Dementsprechend zeigt auch die nähere Unter-

suchung, dass man zu dem Maxwell'schen „unsymmetrischen“ Spannungssysteme, bei welchem nicht $A_y = B_x$ etc. ist, und welches daher Drehungsmomente ergiebt, gelangt, wenn man selbstständige Drehungen der einzelnen Volumelemente als möglich annimmt. Dann kann man nämlich die Variation der potentiellen Energie für ein beliebiges Verschiebungssystem ξ, η, ζ berechnen, ohne auf die Drehungen der Volumelemente $\frac{1}{2}\left(\frac{\partial \zeta}{\partial y} - \frac{\partial \eta}{\partial z}\right)$ etc. Rücksicht zu nehmen; denn man kann sich diese Drehungen einzeln rückgängig gemacht denken. Tut man dies, so findet man für A_x, B_y, C_z die früheren Ausdrücke, statt der in 14) angegebenen Werte der übrigen Druckcomponenten aber die folgenden:

14')
$$\begin{aligned}
B_z &= -\frac{1}{4\pi}\left\{K_{13}\frac{\partial\varphi}{\partial x}\frac{\partial\varphi}{\partial y} + K_{23}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2 + K_{33}\frac{\partial\varphi}{\partial y}\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right\}\\
C_y &= -\frac{1}{4\pi}\left\{K_{12}\frac{\partial\varphi}{\partial x}\frac{\partial\varphi}{\partial z} + K_{22}\frac{\partial\varphi}{\partial y}\frac{\partial\varphi}{\partial z} + K_{23}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)^2\right\}\\
A_z &= -\frac{1}{4\pi}\left\{K_{13}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2 + K_{23}\frac{\partial\varphi}{\partial x}\frac{\partial\varphi}{\partial y} + K_{33}\frac{\partial\varphi}{\partial x}\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right\}\\
C_x &= -\frac{1}{4\pi}\left\{K_{11}\frac{\partial\varphi}{\partial x}\frac{\partial\varphi}{\partial z} + K_{12}\frac{\partial\varphi}{\partial y}\frac{\partial\varphi}{\partial z} + K_{13}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)^2\right\}\\
A_y &= -\frac{1}{4\pi}\left\{K_{12}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2 + K_{22}\frac{\partial\varphi}{\partial x}\frac{\partial\varphi}{\partial y} + K_{23}\frac{\partial\varphi}{\partial x}\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right\}\\
B_x &= -\frac{1}{4\pi}\left\{K_{11}\frac{\partial\varphi}{\partial x}\frac{\partial\varphi}{\partial y} + K_{12}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2 + K_{13}\frac{\partial\varphi}{\partial y}\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right\}
\end{aligned}$$

Hieraus resultiren dieselben deformirenden Kräfte wie früher, weil $\frac{1}{2}(B_z + C_y)$, $\frac{1}{2}(C_x + A_z)$, $\frac{1}{2}(A_y + B_x)$ noch die früheren Werte haben, aber ausserdem Drehungsmomente, deren Componenten gegeben sind durch

$$L = B_z - C_y, \quad M = C_x - A_z, \quad N = A_y - B_x$$

Dieselben Drehungsmomente findet man, wenn man die durch willkürliche Drehungen λ, μ, ν der einzelnen Volumelemente, die ja nach der augenblicklich von uns angenommenen Vorstellung möglich sind, verursachte Energieänderung berechnet und gleich $-(L\lambda + M\mu + N\nu)$ setzt.

Fragen wir nun nach den Folgen des Unterschiedes zwischen den Formelsystemen 14) und 14'), so ist zunächst zu bemerken, dass sich für die gesamten, auf einen Krystall im elektrischen Felde

wirkenden Kräfte und Drehungsmomente aus beiden dieselben Werte ergeben, indem die Differenz der aus 14) und 14') folgenden, auf die Oberfläche des Krystalls wirkenden Kräfte gerade aufgehoben wird durch die nach 14') hinzukommenden auf dessen innere Elemente ausgeübten Drehungsmomente. Ein Unterschied kann also höchstens in den Deformationen auftreten, und zwar würde dies dann der Fall sein, wenn die durch L, M, N hervorgerufenen Molekulardrehungen ihrerseits Deformationen zur Folge hätten. Es ist dies ein Punkt, über welchen man noch keinerlei Kenntniss besitzt, weil man eben kein anderes Mittel als elektrische oder magnetische Kräfte besitzt, um Drehungsmomente auf die Moleküle auszuüben. Die im Falle des Vorhandenseins solcher Drehungsmomente notwendige Erweiterung der Elasticitätstheorie ist von W. Voigt gegeben worden [1]. — Dass es gelingen werde, mit unseren jetzigen Hilfsmitteln jenen etwaigen Unterschied in den Deformationen nachzuweisen und somit experimentell zwischen den Formeln 14 und 14') zu entscheiden, ist leider wol völlig ausgeschlossen, da die elektrischen (oder gar magnetischen) Deformationen „2ter Ordnung" bei Krystallen überhaupt kaum messbar sein werden, um so weniger aber der fragliche Unterschied, welcher von den Differenzen der Haupt-Dielektricitäts- (bzhw. Magnetisirungs)-Constanten des Krystalls abhängt.

Aber selbst, wenn es gelänge, auf diesem experimentellen Wege die Unzulässigkeit des symmetrischen Spannungssystems zu erweisen (— eine das unsymmetrische ausschliessende Entscheidung wäre nicht möglich —), so würde man darum noch nicht die Grundvorstellung von Maxwell und Hertz aufzugeben brauchen; denn die Existenz der fraglichen Drehungsmomente wird, wie Hertz l. c. p. 395 bemerkt, mit derselben vereinbar, wenn man den Aether bei den Bewegungen der Materie als ruhend annimmt, in welchem Falle allerdings die Hertz'sche Theorie einer Modification bedürfte.

Wie bei isotropen Körpern, so bedürfen auch in Krystallen die Spannungen $A_x, \ldots$ einer Ergänzung (— bestehend in den Spannungen 2ter Art —) wegen der Aenderung der dielektrischen Polarisation durch Deformation. Man wird bei Krystallen die sechs, das dielektrische Verhalten bestimmenden Grössen $K_{11}, \ldots K_{12}$ als lineare Functionen der Deformationsgrössen $x_x, \ldots x_y$ einführen, also den Ansatz machen:

---

1) W. Voigt, Theoretische Studien über die Elasticitätsverhältnisse der Krystalle, Abhandlungen der kgl. Ges. d. Wissensch. zu Göttingen, **34**, 1887.

$$K_{11} = K_{11}^0 + k_{11}x_x + k_{12}y_y + k_{13}z_z + k_{14}y_z + k_{15}z_x + k_{16}x_y$$

15) . . . .

$$K_{12} = K_{12}^0 + k_{61}x_x + k_{62}y_y + k_{63}z_z + k_{64}y_z + k_{65}z_x + k_{66}x_y$$

worin im allgemeinen 36 neue, dem Krystall eigentümliche Constanten $k_{m,n}$ vorkommen[1]). Zufolge diesem Ansatz erhält man (— wenn man den Index ^{0} der Grössen K auf der rechten Seite wieder fortlässt —) folgenden Ausdruck für die potentielle Energie der Volumeinheit des deformirten und dielektrisch polarisirten Krystalls:

$$16)\quad V = \Phi - \frac{1}{8\pi}\left\{K_{11}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2 + \ldots + 2K_{12}\frac{\partial\varphi}{\partial x}\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right\}$$

$$-\frac{1}{8\pi}\left\{k_{11}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2 + \ldots + 2k_{61}\frac{\partial\varphi}{\partial x}\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right\}x_x$$

. . . .

$$-\frac{1}{8\pi}\left\{k_{16}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2 + \ldots + 2k_{66}\frac{\partial\varphi}{\partial x}\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right\}x_y$$

woraus dann in analoger Weise wie früher folgende Werte für die Spannungen 2ter Art $\mathfrak{A}_x' \ldots \mathfrak{A}_y'$ folgen:

$$\mathfrak{A}_x' = \frac{1}{8\pi}\left\{k_{11}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2 + k_{21}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2 + k_{31}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)^2 + 2k_{41}\frac{\partial\varphi}{\partial y}\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right.$$
$$\left. + 2k_{51}\frac{\partial\varphi}{\partial z}\frac{\partial\varphi}{\partial x} + 2k_{61}\frac{\partial\varphi}{\partial x}\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right\}$$

17) . . . .

$$\mathfrak{A}_y' = \mathfrak{B}_x' = \frac{1}{8\pi}\left\{k_{16}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2 + k_{26}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2 + k_{36}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)^2 + 2k_{46}\frac{\partial\varphi}{\partial y}\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right.$$
$$\left. + 2k_{56}\frac{\partial\varphi}{\partial z}\frac{\partial\varphi}{\partial x} + 2k_{66}\frac{\partial\varphi}{\partial x}\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right\}$$

---

1) Der auf die elektrischen Deformationen 2ter Ordnung der Krystalle bezügliche Schlusssatz meiner Abhandlung im N. Jahrb. f. Min., Beil.-Bd. VII, p. 231, wo ich jene Anzahl zu 21 angab, ist unrichtig. — Um den Vergleich mit den früheren Entwicklungen für isotrope Körper zu erleichtern, sei bemerkt, dass für letztere zu setzen ist:

$$k_{11} = k_{22} = k_{33} = -4\pi\alpha$$
$$k_{12} = k_{13} = k_{21} = k_{31} = k_{23} = k_{32} = -4\pi\beta$$
$$k_{44} = k_{55} = k_{66} = -2\pi(\alpha - \beta)$$

während alle übrigen $k_{m,n} = 0$ werden.

Man hätte V statt als Function der elektrischen Kräfte $-\frac{\partial\varphi}{\partial x}, -\frac{\partial\varphi}{\partial y}, -\frac{\partial\varphi}{\partial z}$ auch als solche der elektrischen Momente oder Polarisationen a, b, c, welche mit letzteren durch die Relationen

$$a = -K_{11}\frac{\partial\varphi}{\partial x} - K_{12}\frac{\partial\varphi}{\partial y} - K_{13}\frac{\partial\varphi}{\partial z}$$

. . . .

verbunden sind, darstellen können; die Form bleibt dabei ganz ungeändert, nur treten an Stelle von $K_{11}, \ldots K_{12}$ andere Constanten $K_{11}', \ldots K_{12}'$, und in 17) an Stelle von $k_{11} \ldots k_{66}$ ebenfalls neue Constanten $k_{11}', \ldots k_{66}'$, welche definirt werden durch

$$k_{11}' = \frac{\partial K_{11}'}{\partial x_x}, \ldots k_{16}' = \frac{\partial K_{11}'}{\partial x_y}, \ldots k_{66}' = \frac{\partial K_{12}'}{\partial x_y}$$

In dieser Form hat Hertz a. a. O. die von der magnetischen Polarisation herrührenden Spannungen dargestellt; seine Constanten $\mu_{hk}', \mu_{11,11}', \ldots \mu_{11,12}' \ldots \mu_{12,12}'$ entsprechen genau den K_{hk}', $k_{11}', \ldots k_{16}' \ldots k_{66}'$.

Die Constanten K_1', K_2', K_3', durch welche sich $K_{11}', \ldots K_{12}'$ nach den Formeln 12) ausdrücken würden, sind die reciproken Werte der Haupt-Dielektricitätsconstanten des Krystalls; sie würden nach der elektromagnetischen Lichttheorie also mit den Quadraten der drei Hauptlichtgeschwindigkeiten, bezogen auf die Lichtgeschwindigkeit in Luft $= 1$, übereinstimmen. Daraus folgt, dass dann K_{11}', $\ldots K_{12}'$ mit den 6 das „Fresnel'sche Ovaloid" bestimmenden Grössen $\frac{B_{11}}{v^2}, \ldots \frac{B_{12}}{v^2}$, und die $k_{m,n}'$ mit den von mir eingeführten [1]), die Aenderung des optischen Verhaltens durch elastische Deformationen bestimmenden Constanten $\frac{a_{m,n}}{v^2}$ identisch werden, und dass insbesondere die Anzahl der verschiedenen $k_{m,n}'$ sich für die einzelnen Krystallsysteme in genau derselben Weise reducirt, wie ich es für die $a_{m,n}$ durchgeführt habe. Wenn nun auch jene Uebereinstimmung keine vollständige sein wird, so kann man doch jedenfalls sagen, dass die $k_{m,n}'$ für hinreichend langsame elektrische Schwingungen genau dieselbe Bedeutung haben, wie die $\frac{a_{m,n}}{v^2}$ für

1) F. Pockels, Wied. Ann. 37, p. 151; 1889.

Lichtschwingungen, und dass daher beide Arten von Constanten voraussichtlich von derselben Grössenordnung sein werden.

Diese Grössen $k_{m,n}$ und $\mu_{m,n}$, von welchen die Aenderung des dielektrischen und magnetischen Verhaltens in Folge elastischer Deformationen abhängt, zu ermitteln, würde der Hauptzweck weiterer Beobachtungen über Elektrostriction und Magnetostriction sein. Denn wir haben gesehen, dass aus diesen Erscheinungen nicht, wie man oft meinte, eine Entscheidung für oder gegen die Maxwell'sche Theorie von der Vermittelung aller elektrischen und magnetischen Wirkungen durch Spannungen oder Drucke hergeleitet werden kann. — Wenn aber auch andere Gründe voraussichtlich zur allgemeinen Annahme der Vorstellung Maxwell's führen werden, so darf man doch nicht vergessen, dass diese selbst, um völlig befriedigend zu werden, nach Maxwell's eigenem Zugeständniss [1]) noch die Lösung der schwierigen Anfgabe erfordert: „die Spannungen in einem dielek- „trisch oder magnetisch polarisirten Medium aus den bekannten Prin- „cipien der Mechanik, genauer gesagt, der Dynamik, zu erklären".

1) Maxwell, Treatise on Electricity and Magnetism Art. 110, p. 163 der Uebersetzung.

VI.

Osculirende Kugel nebst den analogen Gebilden für n Dimensionen.

Von

R. Hoppe.

§. 1. Die osculirende Kugel einer Raumcurve ist das analoge Gebilde des Krümmungskreises einer ebenen Curve. Damit ist die Frage nach einem allgemeinern Gebilde für beliebig vielfach gekrümmte Linien an die Hand gegeben, welches die zwei genannten als besondere in sich begreift. Um soviel als möglich die Rechnung durch räumliche Anschauung zu illustriren, lasse ich die Herleitung der osculirenden Kugel in solcher Weise vorausgehen, dass jede dazu verwandte Operation sich sichtlich sogleich von der Dreizahl auf n erweitern lässt.

§. 1. Osculirende Kugel.

Ein Punkt P einer Curve s sei Anfang der xyz. Drei andre Punkte derselben P_1, P_2, P_3 haben die unabhängig unendlich kleinen Bogenabstände u_1, u_2, u_3 von P. Dann ist (Stetigkeit bis auf 3. Ordnung vorausgesetzt):

$$x_h = \sum_{\mu=1}^{\mu=\infty} \frac{\partial^\mu x}{\partial s^\mu} \frac{u_h{}^\mu}{\mu!}; \quad \text{etc.} \quad (h = 1, 2, 3) \tag{1}$$

Der Mittelpunkt der Kugel, welche durch die 4 Punkte geht, ist der Schnitt der Ebenen E_1, E_2, E_3, welche die Sehnen PP_1, PP_2, PP_3 normal halbiren. Ihre Gleichungen sind:

$$x_h(x_0-\tfrac{1}{2}x_h)+y_h(y_0-\tfrac{1}{2}y_h)+z_h(z_0-\tfrac{1}{2}z_h)=0 \quad \text{oder:}$$

$$x^h x_0+y_h y_0+z_h z_0=\tfrac{1}{2}r_h^2 \quad (h=1,\,2,\,3)$$

nach deren Auflösung mau orhält:

$$\varDelta x_0=\tfrac{1}{2}\varDelta_x \tag{2}$$

wo

$$\varDelta=\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{vmatrix};\quad \varDelta_x=\begin{vmatrix} r_1^2 & r_2^2 & r_3^2 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{vmatrix};\quad \text{etc.} \tag{3}$$

und dio r die Radienvectoren bezeichnen.

Seieu nnu ξ, η, ζ die Coordinaten eines der Punkte P_1, P_2, P_3 in Bezng auf die Tangente, Haupt- und Binormale in P, und $a_1 b_1 c_1$, $a_2 b_2 c_2$, $a_3 b_3 c_3$ die Richtungscosinus der genannten 3 Fnudamentalaxen der Curve. Danu ist nach den Formeln (1) bis auf 3 Ordnung

$$\xi_h=u_h-\frac{u_h^3}{6\varrho^2};\quad \eta_h=\frac{u_h^2}{2\varrho}-\frac{\partial\varrho}{6\varrho^2\partial s}u_h^3;\quad \zeta_h=\frac{u_h^3}{6\varrho\pi} \tag{4}$$

wo ϱ und π den Krümmungs- und Torsionsradius bezeichnen, und

$$\left.\begin{aligned} x_h &= a_1\xi_h+a_2\eta_h+a_3\zeta_h \\ y_h &= b_1\xi_h+b_2\eta_h+b_3\zeta_h \\ z_h &= c_1\xi_h+c_2\eta_h+c_3\zeta_h \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

ist. Hiernach wird

$$\varDelta=\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix} \xi_1 & \xi_2 & \xi_3 \\ \eta_1 & \eta_2 & \eta_3 \\ \zeta_1 & \zeta_2 & \zeta_3 \end{vmatrix}=\frac{u_1 u_2 u_3}{12\varrho^2\pi}\begin{vmatrix} 1 & u_1 & u_1^2 \\ 1 & u_2 & u_2^2 \\ 1 & u_3 & u_3^2 \end{vmatrix} \tag{6}$$

mit Weglassnng der Terme höherer Ordnung. Ferner ist nach Gl. (5) (4)

$$r_h^2=\xi_h^2+\eta_h^2+\zeta_h^2=u_h^2-\frac{u_h^4}{12}+\ldots$$

$$\begin{vmatrix} y_2 & y_3 \\ z_2 & z_3 \end{vmatrix}=a_1\begin{vmatrix} \eta_2 & \eta_3 \\ \zeta_2 & \zeta_3 \end{vmatrix}+a_2\begin{vmatrix} \zeta_2 & \zeta_3 \\ \xi_2 & \xi_3 \end{vmatrix}+a_3\begin{vmatrix} \xi_2 & \xi_3 \\ \eta_2 & \eta_3 \end{vmatrix};\quad \text{etc.} \tag{7}$$

Da nun $\varDelta$ 6. Ordnnng, r_h^2 2. Ordnnng ist, so sind in deu Ausdrücken (7) nur die Terme 4. Ordnung beizubehalten. Im Ausdruck (3) von $\varDelta_x$ hebt sich der erste Term von η gegen die r^2; man hat also nur einzuführen:

$$\xi_h = u_h; \quad \eta_h = -\frac{\partial \varrho}{\partial s} \frac{u_h^3}{6\varrho^2}; \quad \zeta_h = \frac{u_h^3}{6\varrho\pi} \tag{8}$$

dann wird im Ansdruck (7) die erste Determinante mindestens 7. Ordnung, fällt also weg, dio beiden übrigen sind 4. Ordnung, und es ergibt sich:

$$\Delta_x \doteq \frac{a_2}{6\varrho\pi} \left| u_h^2 \, u_h^3 \, u_h \right| - \frac{a_3}{6\varrho^4} \frac{\partial \varrho}{\partial s} \left| u_h^2 \, u_h \, u_h^3 \right| \quad (h = 1, 2, 3)$$
$$- \frac{u_1 \, u_2 \, u_3}{6\varrho^2\pi} \left| 1 \;\; u_h \;\; u_h^2 \right| \left(a_2 \varrho + a_3 \pi \frac{\partial \varrho}{\partial s} \right)$$

daber nacb Gl. (2) (6):

$$x_0 = a_2 \varrho + a_3 \pi \frac{\partial \varrho}{\partial s}: \quad \text{etc.} \tag{9}$$

Für einon beliebigen Anfangspunkt ist hierzn noch x zu addiren, $x + a_2\varrho$ ist die Coordinate des Krümmnngsmittelpnnkts, nnd der Mittelpunkt der osculirenden Kügel erweist sich als der Coincidenzpunkt der Krümmnngsaxe, d. b. er erzengt deren Einhüllende. Ist R der Radius der Kngel, so hat man:

$$R^2 = \varrho^2 + \left(\pi \frac{\partial \varrho}{\partial s} \right)^2 \tag{10}$$

§ 2. Das osculirende der Kngelfläcbo analoge Gebilde.

Das der Kugelfläche analoge Gebilde in $n$facher Mannigfaltigkeit, welcbes wir knrz rnnde $(n-1)$dehnung nennen, ist der Ort des Endpnnkts einer constanten Strecke eines von festem Centrum ausgehenden Strahles. Wird die $n$facbo Mannigfaltigkeit ansser dieser Bedingung durch $n-m$ lineare Gleicbnngen bescbränkt, so ergibt sich eine runde $(m-1)$debnung als linearer Scbnitt der rnnden $(n-1)$dehnung. Man kann daher bei Darstellnng der rnnden $(1, 2. 3, \ldots n-1)$dehnnngen die Zahl n der variabeln Coordinaten eines Punkts nnverändert beibehalten.

Die n Coordinaten eines beliebigen Pnnkts in Bezug anf n feste rechtwinklige Axen, deren Anfang ein Punkt P der Curve s sei, seien dnrcb $\overset{k}{x} (k = 1, 2, \ldots n)$ oder knrz durch x bezeicbnet. Ferner seien $\overset{k}{a}_h$ oder $a_h (h = 1, 2, \ldots n)$ die Richtungscosinus der n Fundamentalaxen A_h. Deren Theorie babe ich in dem Anfsatz XXI. 5. (Tl. XI. S. 442) entwickelt nnd verweise hier auf denselben.

Wie leicht erhellt, geht jede lineare $(n-1)$ dehnung durch den Mittelpunkt einer runden $(m-1)$ dehnung, wenn sie irgend eine Sehne derselben normal halbirt. Seien nun $P_h (h = 1, 2, \ldots m)$ mit den Coordinaten x_h Curvenpunkte in unendlich kleinen Bogenabständen u_h von P. Dann hat ein Punkt x_0 auf der linearen $(m-1)$ dehnung, welche die Sehne

$$PP_h = r_h = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} x_h^2}$$

normal halbirt, die Gleichung zu erfüllen:

$$\sum_{k=1}^{n} x_h (x_0 - \tfrac{1}{2} x_h) = 0 \quad \text{oder} \quad \Sigma_k x_h x_0 = \tfrac{1}{2} r_h^2 \tag{11}$$

Um aber Mittelpunkt der runden $(m-1)$ dehnung zu sein, muss er ausserdem in der linearen m dehnung liegen, welche durch die $m+1$ Punkte $P, P_1, \ldots P_m$ bestimmt ist, folglich für irgend welche Werte der Parameter v_h die Gleichung

$$x_0 = \sum_{\mu=1}^{m} x_\mu v_\mu \tag{12}$$

befriedigen. Dieser Wert in Gl. (11) eingeführt gibt:

$$\sum_{\mu=1}^{m} v_\mu \sum_{k=1}^{n} x_h x_\mu = \tfrac{1}{2} r_h^2 \tag{13}$$

Gilt diese Gleichung für $h = 1, 2, \ldots m$, so sind die m Parameter v_μ und durch diese nach Gl. (12) die Coordinaten des Mittelpunkts x_0 bestimmt.

Zunächst kann man von der linearen m dehnung (12) zur osculirenden m dehnung übergehen. Nach taylor'scher Entwickelung ist

$$x_\mu = \sum_{\lambda=1}^{\infty} \frac{u_\mu^\lambda}{\lambda!} x^{(\lambda)} \tag{14}$$

Setzt man dann

$$w_\lambda = \sum_{\mu=1}^{m} v_\mu u_\mu^\lambda : \lambda! \tag{15}$$

so wird

$$x_0 = \sum_{\lambda=1}^{m} w_\lambda x^{(\lambda)} + R \tag{16}$$

wo R für endliche w verschwindet. Entwickelt man ebenso x_h und r_h^2, so erhält man:

$$r_h^2 = \sum_{\lambda=1}^{\infty} \sum_{\mu=\lambda+1}^{\infty} \frac{u_h^\mu}{\lambda!\,(\mu-\lambda)!} \sum_{k=1}^{n} x^{(\lambda)} x^{(\mu-\lambda)}$$

$$= \sum_{\mu=2}^{\infty} \frac{u_h^\mu}{\mu!} B_\mu \qquad (17)$$

wo

$$B_\mu = \sum_{k=1}^{n} \sum_{\lambda=1}^{\mu-1} (\mu)_\lambda\, x^{(\lambda)} x^{(\mu-\lambda)} = \sum_{k=1}^{n} \{(x^2)^{(\mu)} - 2x\, x^{(\mu)}\}$$

oder, da nach Differentiation $x = 0$ zu setzen ist,

$$B_\mu = \sum_{k=1}^{n} (x^2)^{(\mu)} \qquad (18)$$

Führt man dies ein und setzt zur Abkürzung

$$A_{\lambda\mu} = \sum_{k=1}^{n} x^{(\lambda)} x^{(\mu)} \qquad (19)$$

so wird Gl. (11) mit Vernachlässigung des mit u_h^{m+1} verschwindenden Restes:

$$\sum_{\mu=1}^{m} \frac{u_h^\mu}{\mu!} \sum_{\lambda=1}^{m} w_\lambda A_{\lambda\mu} = \tfrac{1}{2} \sum_{\mu=1}^{m} \frac{u_h^\mu}{\mu!} B_\mu \qquad (20)$$

Sie wird durch willkürliche u_h, also für jedes h erfüllt, wenn man die Coefficienten der u_h^μ auf beiden Seiten gleich setzt. Dann hat man:

$$\sum_{\lambda=1}^{m} w_\lambda A_{\lambda\mu} = \tfrac{1}{2} B_\mu \quad (\mu = 1, 2, \ldots m) \qquad (21)$$

und nach Anflösung des Systems:

$$w_\nu \mid A_{\lambda\mu} \mid (\lambda, \mu = 1, 2, \ldots m) = \qquad (22)$$
$$\tfrac{1}{2} \mid A_{1\mu} A_{2\mu} \ldots A_{\nu-1,\mu} B_\mu A_{\nu+1,\mu} \ldots A_{m\mu} \mid (\mu = 1, \ldots m)$$

und nach Gl. (12):

$$x_0 = \tfrac{1}{2} \sum_{\nu=1}^{m} x^{(\nu)} \mid A_{1\mu} \ldots A_{\nu-1,\mu} B_\mu A_{\nu+1,\mu} \ldots A_{m\mu} \mid : \mid A_{\lambda\mu} \mid \qquad (23)$$

mit obigen Werten von λ und μ in den respectiven Determinanten.

Der Radius der osculirenden runden $(m-1)$dehnung ist dann:

$$r_0 = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} x_0^2}$$

und die Coordinaten ihres Mittelpunkts in Bezug auf einen beliebigen Anfangspunkt

$$= x + x_0$$

Aus der resultirenden Formel (23) würde sich nur schwer herleiten lassen, dass der Mittelpunkt, wie es die Anschauung fordert und durch geometrische Schlüsse sich ergieht, auf der normalen linearen $(n-1)$ dehnung liegt. Doch folgt dies auch ganz einfach aus einigen vorhergehenden Formeln.

Auf der Rechten der Gl. (20) fehlt der Term $\mu = 1$. Hieraus, wie auch aus Gl. (18) erhellt, dass $B_1 = 0$ ist. Gl. (21) ergiht also:

$$\sum_{\lambda=1}^{m} w_\lambda A_{\lambda 1} = \sum_{\lambda=1}^{n} w_\lambda \sum_{k=1} x' x^{(\lambda)} = 0$$

Multiplicirt man Gl. (16) mit x' und summirt nach k, so erhält man (mit Vernachlässigung von R):

$$\sum_{k=1}^{n} x' x_0 = \sum_{\lambda=1}^{m} w_\lambda \sum_{k=1}^{n} x' x^{(\lambda)} = 0 \qquad (24)$$

und hiermit den Satz:

„Die Mittelpunkte der osculirenden runden $(1, 2, \ldots n-1)$-„dehnungen liegen sämtlich auf der normalen linearen $(n-1)$deh-„nung.“

Zugleich ergibt sich die Identität:

$$\sum_{k=1}^{n} x' \sum_{\nu=1}^{m} x^{(\nu)} \mid A_{1\mu} \ldots A_{\nu-1,\mu} B_\mu A_{\nu+1,\mu} \ldots A_{m\mu} \mid = 0 \qquad (25)$$

gültig für jede Richtung der Abscissenaxe.

§ 3. Lage des Mittelpunkts der osculirenden runden $(m-1)$dehnung in Bezug auf das Fundamentalaxensystem.

Sind $\xi_{10}, \xi_{20}, \ldots \xi_{m0}$ die Coordinaten eines beliebigen Punkts P_0 der osculirenden linearen m dehnung in Bezug auf die m ersten Fundamentalaxen, so ist

$$x_0 = \sum_{\mu=2}^{m} a_\mu \xi_{\mu 0} \qquad (26)$$

Hierdurch ist bereits die Bedingung (12) ersetzt, und damit P_0 Mittelpunkt der osculirenden runden $(m-1)$ dehnung sei, so braucht er nur noch die Bedingung (11) für $h = 1, 2, \ldots m$ zu erfüllen, welche nach Substitution der auf x_0 und x_h angewandten Werte (26) lautet:

$$\sum_{\mu=1}^{m} \xi_{\mu 0} \xi_{\mu h} = \tfrac{1}{2} r_h^2 = \tfrac{1}{2} \sum_{\mu=1}^{m} \xi_{\mu h}^2 \quad (h = 1, 2, \ldots m) \qquad (27)$$

Die Auflösung des Gleichungssystems ergibt:

$$\Delta \xi_{\nu 0} = \tfrac{1}{2}\Delta_\nu \tag{28}$$

wo

$$\Delta = |\,\xi_{\mu h}\,| \quad (\mu,\ h = 1,\ 2,\ .\ .\ .\ m)$$

$$\Delta_\nu = |\,\xi_{1h}\xi_{2h}\ .\ .\ .\ \xi_{\nu-1,h} r_h^2 \xi_{\nu+1,h}\ .\ .\ .\ \xi_{mh}\,| \quad (h = 1,\ 2\ .\ .\ .\ m)$$

Nach taylor'scher Entwickelung hat man:

$$x_h = \sum_{\mu=1}^{m} a_\mu \left\{ \sum_{\lambda=1}^{m} \frac{u_h^\lambda}{\lambda!} \xi_\mu^{(\lambda)} + u_h^{m+1} R_m \right\}$$

$$= \sum_{\mu=1}^{m-1} a_\mu \left\{ \sum_{\lambda=1}^{m-1} \frac{u_h^\lambda}{\lambda!} \xi_\mu^{(\lambda)} + u_h^m R_{m-1} \right\}$$

wo $\xi_\mu^{(\lambda)}$ den λten Differentialquotienten der Coordinate des laufenden Curvenpunktes in Bezug auf die als fest gedachte μte Fundamentalaxe des Punktes P, also für constante a_μ, bezeichnet. Subtrahirt man die zwei gleichen Ausdrücke, so kommt:

$$0 = a_m \left\{ \sum_{\lambda=1}^{m} \frac{u_h^\lambda}{\lambda!} \xi_m^{(\lambda)} + u_h^{m+1} R_m \right\}$$

$$+ \sum_{\mu=1}^{m-1} a_\mu \left\{ \frac{u_h^m}{m!} \xi_m^{(m)} + u_h^{m+1} R_m - u_h^m R_{m-1} \right\}$$

Alle Terme mit Ausnahme der Terme der ersten Summe für $\lambda = 1, 2, .\ .\ .\ m-1$ haben den Factor u_h^m, folglich sind die Coefficienten der letztern sämtlich null, und man hat:

$$\xi_\mu^{(\lambda)} = 0 \quad \text{für} \quad \lambda = 1,\ 2,\ .\ .\ .\ \mu-1$$

daher:

$$\xi_{\mu h} = \sum_{\lambda=\mu}^{m} \frac{u_h^\lambda}{\lambda!} \xi_\mu^{(\lambda)} \tag{29}$$

Führt man diese Werte in die Determinante Δ ein, so erkennt man leicht, dass von jeder Summe (29) nur der erste Term in Rechnung kommt, weil jeder folgende Term dem ersten Term einer folgenden Summe proportionirt ist. Folglich ist

$$\Delta = \left| \frac{u_h^\mu}{\mu!} \xi_\mu^{(\mu)} \right| = |\,u_h^\mu\,| \prod_{\pi=1}^{m} \frac{\xi_\pi^{(\pi)}}{\pi!} \quad (h,\ \mu = 1,\ 2,\ .\ .\ .\ m) \tag{30}$$

Auch Δ_ν bestimmt sich durch die gleiche Betrachtungsweise, wenn man zuvor r_h^2 nach Potenzen von u_h entwickelt. Nach Gl. (27) ist

$$r_h^2 = \sum_{\mu=1}^{m} \xi_{\mu h}^2 = \sum_{\lambda=2}^{m} C_\lambda \frac{u_h^\lambda}{\lambda!} \tag{31}$$

$$C_\lambda = \sum_{\mu=1}^{\frac{1}{2}\lambda} (\xi_\mu^2)^{(\lambda)} \tag{32}$$

Die Determinante Δ_ν zerfällt in eine Summe von Determinanten entsprechend den Termen der Summe (31). Jede Teildeterminante besteht wieder aus Determinanten entsprechend allen Combinationen derjenigen Exponenten von u_h, welche in irgend einer Folge die Werte 1, 2, ... m haben. Von diesen sind die Werte $\nu+1$, $\nu+2$, ... m bereits übereinstimmend mit Δ festgelegt. Für $\lambda = \nu$ geht die Teildeterminante von selbst in Δ, nur mit anderm Coefficienten über. Für $\lambda < \nu$ sind die Stellen der Exponenten 1, 2, ... $\lambda-1$ unersetzlich, bleiben also wie in Δ. Die übrigen Exponenten, welche in Δ ihre niedrigsten Werte

$$\lambda,\ \lambda+1,\ \ldots\ \nu-1 \tag{33}$$

hatten, sind durch Erhöhung in beliebiger Folge auf

$$\lambda+1,\quad \lambda+2,\ \ldots\ \nu$$

zu bringen, was auf $2^{\nu-\lambda}$ Weisen möglich ist. Das Vorzeichen der so erhaltenen Determinanten wechselt natürlich bei Vertauschung von je 2 Exponenten, die zur Herstellung der aufsteigenden Reihe derselben nötig ist. Sei α die Erhöhungszahl eines beliebigen Gliedes der Reihe (33), und beziehe sich das Summenzeichen S auf die verschiedenen Reihen der α, welche einem $\nu-\lambda$ zugehören; dann wird

$$\Delta_\nu = |\, u_h^\mu \,| \frac{1}{\xi_\nu^{(\nu)}} \sum_{\varkappa=2}^{\nu} C_k \prod_{\pi=1}^{m} \frac{\xi_\pi^{(\pi)}}{\pi 1} S(-1)^\varepsilon \prod_{\pi=\varkappa}^{\nu-1} \frac{\xi_\pi^{(\pi+\alpha)}}{\xi_\pi^{(\pi)}}$$

und nach Division durch 2Δ gemäss Gl. (28) (30)

$$\xi_{\nu o} = \frac{1}{2\xi_\nu^{(\nu)}} \sum_{\varkappa=2}^{\nu} C_k S(-1)^\varepsilon \prod_{\pi=\varkappa}^{\nu-1} \frac{\xi_\pi^{(\pi+\alpha)}}{\xi_\pi^{(\pi)}} \tag{34}$$

Hiermit ist die Aufgabe gelöst; denn $\xi_{\nu h}$ bezeichnet die Coordinate des Mittelpunkts der osculirenden runden $(m-1)$dehnung in Bezug auf die νte Fundamentalaxe.

Da $\xi_{\nu o}$ von m unabhängig ist, so ist der Wert (34) auf jede mehr als $(\nu-2)$fach gekrümmte Linie anwendbar. Zu jeder $(m-1)$-fach gekrümmten Linie in einer beliebig mehr als $(m-1)$fachen Mannigfaltigkeit erhält man also eine Reihe von Mittelpunkten osculirender runden $(1,\ 2,\cdot\cdot\cdot\ \nu-1)$dehnungen, indem man zu den $\nu-1$ Coordinaten aller vorausgehenden Mittelpunkte noch eine νte Coordinate in der hinzukommenden νten Richtung nach Gl. (31) hinzufügt. Demnach bilden der νte und $(\nu-1)$te Mittelpunkt mit

dem laufenden Punkte der Curve stets ein rechtwinkliges Dreieck, und die Mittelpunkte sind die Ecken einer orthogonalen gebrochenen Linie, zu deren Bestimmung man bloss die Längen der geraden Strecken $\xi_{10}, \xi_{20}, \ldots \xi_{m0}$ zu kennen braucht.

Zu ihrer Berechnung aus Gl. (34) bedarf man der Werte der nicht vollständigen Differentialquotienten von ξ_μ. Nach Definition hat man:

$$x^{(\lambda)} = \sum_{\mu=1}^{m} a_\mu \xi_\mu^{(\lambda)}$$

woraus:

$$\sum_{k=1}^{n} a_\nu x^{(\lambda)} = \xi_\nu^{(\lambda)}$$

Der Wert von C_λ ergibt sich aus dem von r_k^2; denn nach Reihenentwickelung von x_k^2 erhält man:

$$r_k^2 = \sum_{k=1}^{n} x_k^2 = \sum_{k=1}^{n} \sum_{\lambda=1}^{m} \frac{u_k^\lambda}{\lambda!} (x^2)^{(\lambda)}$$

Dies verglichen mit Gl. (31) giebt:

$$C_\lambda = \frac{1}{\lambda!} \sum_{k=1}^{n} (x^2)^{(\lambda)}$$

Es wird sich wol empfehlen, Tabellen für die Anfangswerte der in Gl. (34) vorkommenden Grössen aufzustellen.

(35)

$\nu-\lambda$	Reihen der α	ε
1	1	1
2	11	0
	20	1
3	111	1
	201	0
	300	1
	120	0
4	1111	0
	2011	1
	3001	0
	1201	1
	4000	1
	1300	0
	2020	0
	1120	1
5	11111	1
	20111	0
	30011	1
	12011	0
	40001	0
	13001	1
	20201	1
	11201	0
	50000	1
	14000	0
	20300	0
	11300	1
	30020	0
	12020	1
	20120	1
	11120	0

$\lambda =$	1	2	3	4	5
$\frac{1}{2}C_\lambda =$	0	1	0	$-p_1^2$	$-5p_1p_1'$

(36)

wo $p_1, p_2, \ldots$ die erste, zweite, ... Krümmung bezeichnet.

(37)

λ	$\xi_\lambda^{(\lambda)}$	$\xi_\lambda^{(\lambda+1)}$
1	1	0
2	p_1	p_1'
3	p_1p_2	$2p_2p_1'+p_1p_2'$
4	$p_1p_2p_3$	$3p_1'p_2p_3+2p_1p_2'p_3+p_1p_2p_3'$
5	$p_1p_2p_3p_4$	

λ	$\xi_\lambda^{(\lambda+2)}$
1	$-p_1^2$
2	$p_1''-p_1^3-p_1p_2^2$
3	$3p_1''p_2+3p_1'p_2'+p_1p_2''-p_1p_2p_3^3-p_1^3p_2-p_1p_2^3$

λ	$\xi_\lambda^{(\lambda+3)}$
1	$-3p_1p_1'$
2	$p_1'''-3p_1'p_2^2-6p_1^2p_1'-3p_1p_2p_2'$

$$\xi_\lambda^{(\lambda+4)} = -4p_1p_1''+p_1^4+p_1^2p_2^2-3p_3'^2$$

$$\xi_{10} = 0 \tag{38}$$

$$\xi_{20} = \frac{1}{p_1}$$

$$\xi_{30} = -\frac{p_1'}{p_1^2p_2}$$

$$\xi_{40} = \frac{1}{p_1p_2p_3}\left(\frac{2p_1'^2}{p_1^2}+\frac{p_1'p_2'}{p_1p_2}-\frac{p_1''}{p_1}+p_2^2\right)$$

$$\xi_{50} = \frac{1}{p_1p_2p_3p_4}\left(-\frac{p_1'''}{p_1}+\frac{6p_1'p_1''}{p_1^2}+\frac{2p_1''p_2'}{p_1p_2}+\frac{p_1''p_3'}{p_1p_3}-\frac{p_1'p_2''}{p_1p_2}\right.$$
$$-\frac{6p_1'^3}{p'^3}-\frac{4p_1'^2p_2'}{p_1^2p_2}-\frac{2p_1'p_2'^2}{p_1p_2^2}-\frac{p_1'p_2'p_3'}{p_1p_2p_3}-\frac{2p_1'^2p_3'}{p_1^2p_3}-\frac{p_1^2p_3'}{p_3}$$
$$\left.-\frac{p_1'p_2^2}{p_1}-p_2p_2'-\frac{p_2^2p_3'}{p_3}-\frac{p_1'p_3^2}{p_1}\right)$$

§ 4. Die Krümmungsaxen und ihre Coincidenzpunkte.

Die Axe des Krümmungskreises einer Raumcurve, gewöhnlich Krümmungsaxe genannt, ist bekanntlich parallel der dritten Fundamentalaxe und hat einen Coincidenzpunkt, der zugleich Mittelpunkt der Krümmungskugel ist.

Dies bietet Anlass zu dreifacher Erweiterung auf mehr als zweifach gekrümmte Linien.

Zunächst betrachten wir das Lot auf dem Raume der Krümmungskugel in ihrem Mittelpunkte errichtet. Dieses ist parallel der vierten Fundamentalaxe und geht durch den Mittelpunkt der osculirenden runden 4 dehnung. Jeder ihrer Punkte hat einen constanten Abstand von der Krümmungskugel, nämlich die Hypotenuse eines rechtwinkligen Dreiecks, dessen Katheten sein Abstand vom Fusspunkte und der Kugelradius sind. In diesem Sinne ist er Axe der Krümmungskugel, und wir können ihn zweite Krümmungsaxe nennen.

Alles dies ist von selbst oder aus dem Vorigen klar. Ob aber die 2. Krümmungsaxe die 2 andern Eigenschaften mit der ersten gemein hat, d. h. ob sie einen Coincidenzpunkt hat, und ob derselbe der Mittelpunkt der runden 5 dehnung ist, bleibt eine zu untersuchende Frage.

Die vorstehende Betrachtung lässt sich auf die ganze Reihe der osculirenden runden m dehnungen ausdehnen. Im Voraus ist bekannt, dass die Verbindungsgeraden der successiven Mittelpunkte Stücke der successiven Krümmungsaxen sind, und dass die $m$te Krümmungsaxe die Richtung der $(m+2)$ten Fundamentalaxe hat.

Die Bedingung, unter der eine beliebige variirende Gerade in n facher Mannigfaltigkeit

$$z = \alpha + au$$

wo a den Richtungscosinus bezeichnet, einen Coincidenzpunkt z hat, ist $\partial z = 0$, wird also gebildet durch die n Gleichungen:

$$0 = \partial\alpha + a\partial u + u\partial a$$

und nach Elimination von u und ∂u:

$$| \, a \;\; \partial a \;\; \partial x \, | = 0$$

gültig für alle Combinationen von 3 unter den n Coordinaten α und den zugehörigen a.

Die $(m-2)$te Krümmungsaxe hat die Gleichungen:

$$z = x + \sum_{h=1}^{m-1} a_h \xi_h + a_m u$$

daher lautet die obige Bedingung:

$$| a_m \; a_m' \; (x + \sum_{h=1}^{m-1} a_h \xi_h)' \, | = 0$$

Da nun $x' = a_1$ und nach T. XI. S. 446 Gl. (13)

$$a_h' = p_h a_{h+1} - p_{h-1} a_{h-1} \tag{39}$$

ist, so ergibt sich:

$$| a_m \; a_m' \; a_1 + \sum_{h=1}^{m-1} \{a_h \xi_h' + (p_h a_{h+1} - p_{h-1} a_{h-1}) \xi_h\} \, | = 0$$

oder (mit Beachtung, dass $p_0 = 0$, $\xi_0 = 0$, $a_{m+1} = 0$ ist):

$$| a_m \; a_{m-1} \; a_1 + \sum_{h=1}^{m-2} a_h (\xi_h' - p_h \xi_{h+1} + p_{h-1} \xi_{h-1}) \, | = 0$$

Diese Bedingung ist erfüllt, wenn

$$\xi_h' - p_h \xi_{h+1} + p_{h-1} \xi_{h-1} = \begin{cases} 0 \text{ für } h = 2, 3, \ldots m-2 \\ -1 \text{ für } h = 1 \end{cases}$$

Für $h = 1$ ist in der Tat

$$p_h \xi_{h+1} = 1; \quad \xi_h' = 0; \quad \xi_{h-1} = 0$$

Ferner ist ξ_{h0} ein Punkt auf der $(h-2)$ten Krümmungsaxe, folglich muss, damit ξ_{h0} Coincidenzpunkt der $(h-2)$ten Krümmungsaxe sei,

$$\xi_{h0}' - p_h \xi_{h+1,0} + p_{h-1} \xi_{h-1,0} = \text{für } h = 2, 3, \ldots m-2 \tag{40}$$

sein. Dieser Bedingung genügen identisch die Werte der letzten Tabelle von § 3. für $h = 2, 3, 4$. Daher haben die erste, 2te, 3te Krümmungsaxe zu Coincidenzpunkten die Mittelpunkte der osculirenden runden (2, 3, 4) dehnungen. Die identische Gültigkeit der Relation (40) für jedes k zu beweisen ist mir nicht gelungen. Findet sie statt, so dreht sich im Fortschritt der Curve das System der Krümmungsaxen momentan um deren Durchnittspunkte. Bewiesen

ist vor der Hand, dass die 2 genannten Eigenschaften der ersten Krümmungsaxe nicht auf diese beschränkt sind, sondern zunächst auch in 4 und 5 facher Mannigfaltigkeit für 3 und 4 fache Krümmung der 2ten und 3ten Krümmungsaxe zukommen. Darüber hinaus reducirt sich dann die Bedingung (40) auf ihre Gültigkeit für $h=5$, $6, \ldots m-2$

Mit Gl. (40) ist gleichbedeutend:

$$\sum_{k=1}^{n} a_h x_{ho}' = 0 \quad (h = 5, 6, \ldots m-2)$$

Bemerkenswert ist ferner, dass nach Gl. (39) und (40) die ξ_{ho} dieselbe Relation zu erfüllen haben wie die a_h.

XXI.

Miscellen.

1.

Eine räumliche Betrachtung der Dreieckspunkte.

In jedem Dreiecke lassen sich die Höhen desselben als die axonometrische Projection der drei zu einander orthogonalen Achsen des Raumes auffassen.

Es erscheint somit Fig. 1. das Dreieck xyz als Spurendreieck und sein Höhenschnittpunkt A als die axonom. Proj. des Achsenursprunges. m der Mittelpunkt der der körperlichen Ecke $Axyz$ umgeschriebenen Kugel, erscheint als Mittelpunkt des dem Spurendreiecke umgeschriebenen Kreises, und seine Projectionen sind die Mittelpunkte der Seiten desselben.

Die Projectionen der Seitensymmetralpunkte sind μ_1, μ_2, μ_3. Die Punkte A, m_1, m_2, m_3, μ_1, μ_2, μ_3, m sind also die Ecken eines Parallelepipedes, dessen umgeschriebene Kugel ihren Mittelpunkt in o dem Mittelpunkte des Steiner'schen Neunpunktkreises hat, mit Berücksichtigung der elementar geometrischen Auffassung des ganzen Gebildes. Die meisten Sätze des Parallelepipedes können also für diese Punkte in Anwendung gebracht werden. So folgt z. B. daraus der Satz:

In jedem Dreiecke ist die Entfernung des Mittelpunktes des umgeschriebenen Kreises von einer Seite gleich der Hälfte des zu dieser Seite gehörigen oberen Höhenabschnittes. o_1, o_2, o_3 die Proj. von o sind Mittelpunkte von Kreisen, die durch A und bezüglich m_1, m_2, m_3 gehend die Höhen über der anliegenden Seite des Spurendreieckes hälften.

s der Schwerpunkt des Spurendreieckes tritt als Ecke eines Parallelepipedes auf, das durch die Verbindung der Seitendiagonal-

schnittpunkte des Neunpunktkreisparallelepipedes mit den übrigen Ecken dieses erhalten wird. Seine Projectionen s_1, s_2, s_3 sind die Schwerpunkte der Projectionsdreiecke Axy, Axz und Ayz. s liegt also auf der Diagonale Am, und es ist sowol im Raume wie in der Proj. $Ao = om$, $os = \frac{1}{3}om$, $mz = \frac{1}{3}Am$, u. s. w.

Construiren wir Fig. 2. die Punkte c_1, c_2, c_3, die bezüglich der Proj. Ebenen symmetrisch liegen, also Mittelpunkte von Kugeln sind, die auch durch die Eckpunkte der Proj. Dreiecke gehen, so erhalten wir durch die Verbindung mit dem Punkte m eine Polarecke zu A und durch die gegenseitige Verbindung ein mit xyz congruentes Dreieck.

Der Höhenschnittpunkt und der Mittelpunkt des umgeschriebenen Kreises eines Dreieckes sind also keine so weit verwandten Punkte, sondern sie sind reciprok. Die beiden sich durchdringenden Vierflächner haben, zur Grundgestalt ein rechtwinkeliges Parallelepiped (in der gegebenen Betrachtung), bilden also einen sternförmigen Körper, dessen Einhüllende ein rhombisches Prisma $Ac_2zc_3yc_1xm$ ist. Die Kugel um m durch A ist gleich der Kugel um A durch m; nicht nur in der Proj., sondern auch im Raume ist x von m, c_1, c_2 u. s. w. gleich weit entfernt, und das Dreieck c_1mc_2 mit der Spitze x ebenso wie die analogen Dreiecke fordern eine Ergänzung zu Rechtecken und Pyramiden, die durch A oder m zu Oktaedern vervollständigt werden.

Von ganz ausserordentlicher Tragweite ist die elementare Betrachtung mit Bezugnahme eines Höhendreieckes z. B. $x_1y_1z_1$. Die projicirten Achsen sind Winkelhalbirende; ihr Schnittpunkt der Mittelpunkt des eingeschriebenen Kreises; ihre Schnitte mit den Seiten des Spurendreieckes Mittelpunkte der angeschriebenen Kreise, deren Radien durch die Schnittpunkte des Höhendreiseites mit den Verbindungslinien der reciproken Punkte A und m mit x, y, z bestimmt sind. Diese Schnittpunkte sind zugleich die Berührungspunkte der Kreise, und ihre Entfernung kann nach dem Satze von der Grösse der Tangenten an 2 Kreise und dem Dreiecke $x_1y_1z_1$ geprüft werden. mx muss z. B. senkrecht sein auf z_1y_1, weil dem Parallelismus der Linien zufolge Wkl. $mxy = Ac_3c_2 = zc_2c_3 = zyA = Axz = \ldots$ ist.

Die Unzahl der congruenten Dreiecke, der gleichen Winkel, der Bestimmungspunkte von Kreisperipherien und die ausgezeichnete Harmonie machen das Ganze zu einem wunderbaren Gebilde, das in seiner Proj. wie im Raume ähnliche Erscheinungen zeigt.

Diese erreichen eine interessante Höhe, wenn man die gegebene Betrachtung nicht bloss für ein Dreieck anwendet, sondern dieselbe

Betrachtung auch bei seinem Höhendreiecke ausführt. Dann erscheinen Winkelhalbirende als Höhen und umgekehrt, und die Vereinigung löst die Aufgabe: Man construire ein Dreieck aus einer Seite z. B. $\overline{xy}$, einem anliegenden Winkel, etwa Wkl. xyz und der Summe der Höhe aus diesem Winkel und ihrem unteren Abschnitt, also $\bar{s} = \bar{y}A + A\bar{y}_1$, wodurch die Dreiteilung des Winkels mit Hilfe von geraden Linien gelöst erscheint..

Wird der Winkel XAY durch die Geraden I und II in drei Teile geteilt, und zeichnet man mit einem beliebigen Radius um A einen Kreis, so wird $DB' = B'H$.

DH ist stets senkrecht auf II und trifft die Normale auf AX im Punkte B. Der Halbkreis über AB als Durchmesser geht durch B', und sein Schnittpunkt mit dem Strahle AY mit B verbunden, ergänzt AB und AB' zu einem Dreiecke, dessen Höhenschnittpunkt H ist.

Da Wkl. $XI = I\,II = II\,Y$, ist auch $\text{arc}\,AE = \text{arc}\,EB' = \text{arc}\,B'A'$. Ferner ist $AB = BD$. Wir kennen also vom Dreiecke ABC die Seite AB, den Winkel ABC, die Summe aus der Höhe BB' und dem untern Höhenabschnitt.

Graz. **Chladek Franz**, Techniker.

2.

Ueber gewisse Gleichungen und Constanten der mechanischen Quadratur und der Mechanik ebener Figuren.

Man kann die reducirte Pendellänge einer ebenen Figur für eine in ihrer Ebene liegende Aufhängungsachse $x = x_p$, wenn die Breite der Figur in der Entfernung x vom Coordinatenanfang $f(x)$ ist, ihrem mathematischen Ausdruck

$$\frac{\int (x - x_p)^2 f(x)\,dx}{\int (x - x_p)\; f(x)\,dx}$$

zufolge als Schwerpunktsabstand einer neuen Figur von der Aufhängungsachse ansehen, deren Breite $(x - x_p)\,f(x)$ ist. Hiernach verschwindet ebenso wie das statische Moment um die Schwerpunktsachse $x = x_s$

$$\int (x - x_s)\, f(x)\, dx = 0$$

auch das Integral:

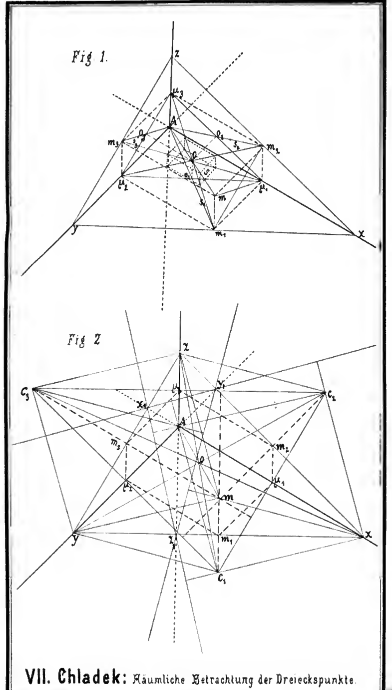
$$\int (x - x_p)(x - x_q) f(x)\, dx = 0;$$

wenn x_p und x_q die Coordinaten einer Aufhängungs- und zugehörigen Schwingungsachse sind. Aus dieser Gleichung ersieht man, dass die beiden Geraden $x = x_p$ und $x = x_q$ nicht nur unter einander (Reversionspendel), sondern auch mit jeder Geraden, deren Coordinate x die Gleichung $f(x) = 0$ erfüllt, vertauscht werden können, welches letztere der vorhergehenden Gleichung zufolge auch für die Schwerpunktsachse $x = x_s$ gilt.

Sind sämtliche Wurzeln der Gleichung $f(x) = 0$ reell, so verknüpft sie einerseits mit x_s, andererseits mit zwei zusammengehörigen x_p und x_q dieselbe Gleichung, welche die Abscissen in einem den Grenzen der ebenen Figur entsprechenden Intervall erfüllen müssen, damit vermittelst der zugehörigen Functionswerte über dasselbe mit einer um einen Grad höheren Genauigkeit mechanisch quadrirt wird, als die Zahl der Ordinaten erwarten lässt; eine Uebereinstimmung, welche man auch unmittelbar aus dem Genauigkeitsgrade dieser Quadraturformeln ableiten kann, indem man eben mit Hülfe dieser letzteren die zur Bestimmung des statischen und des Trägheitsmoments führenden Integrationen erledigt.

Berlin, d. 28. 10. 92.

Rudolf Skutsch.



VII. Chladek: Räumliche Betrachtung der Dreieckspunkte.

VIII.

Einige Bemerkungen über die Lamé'schen Functionen zweiter Art.

Von

Ulrich Bigler.

Schon der Umstand, dass Heine in seinem Handbuche der Kugelfunctionen, Bd. 1, Absatz c des § 87, die Differentialgleichung für die mit S und C bezeichneten Kugelfunctionen anruft, beweist, dass die in Gleichung (58, c) mit f bezeichneten Functionen zweier Variabeln (u, v) (mittelbar ε, ζ) einer Kugelfläche und nicht der Oberfläche eines Ellipsoides angehören. Die Gleichungen (58) und (58, a) werden im Verlaufe gar nicht mehr gebraucht, sondern der Leser hat sie durch $x = \varrho\cos\Theta$, $y = \varrho\sin\Theta\cos\psi$, $z = \varrho\sin\Theta\sin\psi$, verbunden mit dem System (58, b) zu ersetzen. Die drei Flächen, welche Herrn Heine einen Punkt des Raumes bestimmen, sind durch die drei Gleichungen

$$x^2+y^2+z^2 = \varrho^2; \quad \frac{x^2}{\mu^2}+\frac{y^2}{\mu^2-b^2}-\frac{z^2}{c^2-\mu^2} = 0$$

$$\frac{x^2}{\nu^2}-\frac{y^2}{b^2-\nu^2}-\frac{z^2}{c^2-\nu^2} = 0$$

bestimmt. Eine Schaar concentrischer Kugeln wird von zwei Schaaren confocaler Kegel geschnitten. Nur unter dieser Bedingung geht aus der Gleichung $\square V = 0$ (Differentialparameter 2. Ordnung) die Gleichung (58, c) hervor, indem man entweder

$$V = \sum_{n=0}^{\infty} \varrho^n f_n, \quad \text{oder} \quad V = \sum_{n=0}^{\infty} \varrho^{-n-1}.f_n$$

setzt, jenachdem das Potential V sich auf einen innerhalb der mit Masse belegten Kugelfläche befindlichen Punkt oder auf einen äussern Punkt bezieht. Wenn aber eine dreiaxige Ellipsoidfläche mit Masse belegt ist, so soll nach Lamé das Potential V für einen innern Punkt durch ein Aggregat von Producten wie $\overset{n}{\underset{m}{E}}(\varrho) \,.\, \overset{n}{\underset{m}{E}}(\mu) \,.\, \overset{n}{\underset{m}{E}}(\nu)$ und für einen äussern Punkt durch ein Aggregat von Producten wie $\overset{n}{\underset{m}{F}}(\varrho) \,.\, \overset{n}{\underset{m}{E}}(\mu) \,.\, \overset{n}{\underset{m}{E}}(\nu)$ dargestellt werden, wo F eine Function zweiter Art ist. Bei dem System von Flächen, das Heine hier im ersten Bande zu Grunde gelegt hat, hat er nur den Gegensatz von ϱ^n und $\frac{1}{\varrho^{n+1}}$, und man begreift nicht, wie er von der Vorstellung einer Potentialfunction V aus zu den Lamé'schen Functionen zweiter Art gelangt. In Bd. II hat Heine aber Potentialfunctionen, denen ein allgemeines System confocaler Flächen zu Grunde liegt.

In §. 101., Bd. I, versucht Heine, der Lamé'schen Function 2. Art eine andere Darstellung zu geben, die sich von $F(x)$ nur durch einen constanten Factor unterscheidet, gibt sich aber keine Mühe, denselben zu berechnen. Er tut Unrecht, diese Constante eine numerische zu nennen, da sie doch bei ihm eine algebraische Function von b^2 und c^2 ist. Ich habe mich nun daran gemacht, diese Constante zu bestimmen und erlaube mir, meine Resultate hier zu veröffentlichen.

Ich erkläre ausdrücklich, dass ich als erste Flächenschaar nicht concentrische Kugeln, sondern confocale Ellipsoide voransetze. Die Halbaxenquadrate eines solchen seien $x-a$, $x-b$, $x-c$, wo $a < b < c < x$. Die Lamé'sche Function erster Art ist $P(x) = (x-a)^\alpha . (x-b)^\beta (x-c)^\gamma \times Q(x)$, [wo $Q(x) = x^\nu - d_1 x^{\nu-1} + d_2 x^{\nu-2} - d_3 x^{\nu-3} + \ldots + (-1)^\nu d_\nu$ eine ganze Function νten Grades von x, und durch keines der drei Halbaxenquadrate teilbar ist], welche, wenn

$$dt = \frac{dx}{2\sqrt{(x-a)\,(x-b)\,)x-c)}}$$

gesetzt wird, der Bedingung, dass

$$\frac{1}{P(x)} \cdot \frac{\partial^2 P(x)}{\partial^2 t}$$

eine ganze Function von x sei, genügt. Es werde noch beigefügt, dass jede der drei Zahlen 2α, 2β, 2γ entweder null oder eine ganze positive Zahl sein soll, damit

$$n = 2(\alpha + \beta + \gamma + v)$$

Es ergiht sich dann, dass

$$\frac{1}{P(x)} \cdot \frac{\partial^2 P(x)}{\partial t^2} = n(n+1)x + E,$$

$$E = (4n-2)(d_1 + \alpha a + \beta b + \gamma c) - n^2(a+b+c)$$

die Exponenten α, β, γ sind keiner andorn Werte, als 0 nnd $\frac{1}{2}$ fähig. Der Coefficient $d\lambda$ in der Fnnct. Q erscheint als ganze Fnnction λten Grades von d_1 mit reellen Coefficienten; d_1 ist Wnrzel einer Gleichnng $(v+1)$ton Grades, die lauter reelle und verschiedene Wnrzeln hat; jeder Wurzel d_1 entspricht ein Polinom $Q(x)$. Die Gleichung $Q(x) = 0$ hat unr reelle uud ungleiche Wnrzeln, die für jeden andern Wert d_1 auf andere Weiso in die zwei Intervalle $a < x < b$, $b < x < c$ verteilt sind.

Es sei nun $T(x)$ ein zweites Iutegral derselben Differentialgl., welcher $P(x)$ genügt, das sich von diesem nicht nur durch einen constanten Factor nnterscheidet. Dann ergibt sich durch Subtraction beider Differentialgleichungen, derjenigen für T nnd derjenigen für P, die Gleichung

$$\frac{1}{T} \cdot \frac{\partial^2 T}{\partial t^2} - \frac{1}{P} \frac{\partial^2 P}{\partial t^2} = 0$$

das heisst

$$P \frac{\partial T}{\partial t} - T \frac{\partial P}{\partial t} = P^2 \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{T}{P} \right) = \text{const.}$$

oder

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{T}{P} \right) = \text{const.} \frac{1}{2\sqrt{\Pi(x-a)} \times P^2}.$$

Heine verlangt nnn, dass in der Entwicklung von T nach fallenden Potenzen von x der Coefficient der höchsten Potenz von x gleich 1 sei. Denkt man sich x sehr gross, so ist

$$P = x^{\frac{n}{2}}: \quad \frac{1}{P^2} = x^{-n}; \quad \frac{1}{2\sqrt{\Pi(x-a)} \times P^2} = \tfrac{1}{2} x^{-n-3/2}$$

folglich

$$\frac{T}{P} = -\frac{\text{const.}}{2n+1} \times x^{-n-1/2}; \quad T = -\frac{\text{const.}}{2n+1} \times x^{-1/2(n+1)}$$

also

$$\text{const.} = -(2n+1)$$

Es ist somit

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{T(x)}{P(x)}\right) = -\frac{2n+1}{2\sqrt{\Pi(x-a)} \times P^2(x)}$$

also

$$\text{I.} \qquad T(x) = (2n+1) \cdot P(x) \int_x^\infty \frac{dz}{2\sqrt{\Pi(z-a)}\, P^2(z)}$$

Heine behauptet nun in seinem Lehrbuch der Kugelfunctionen Bd. I, Seite 386, mit Recht, dass diese Lamé'sche Function zweiter Art elliptische Integrale nur der ersten und zweiten, nicht aber der dritten Gattung enthalte, weist aber diese Behauptung nur für die Exponentengruppe $(\alpha, \beta, \gamma) = (0, 0, 0)$ nach und stellt auch hier unfertige Ausdrücke auf. Ich will nun diesen Satz ohne jegliche Beschränkung nachweisen, und zwar erstens dadurch, dass ich zeige, dass in T keine logarithmischen Unstetigkeiten vorhanden sind und zweitens will ich T wirklich für alle Exponentengruppen in elliptische Integrale umsetzen.

Es ist:

$$P(x) = \Pi(x-a)^\alpha Q(x)$$

also

$$T(x) = (2n+1) \cdot P(x) \cdot \int_x^\infty \frac{dz}{2\,\Pi(z-a)^{2\alpha+\frac{1}{2}} Q^2(z)}.$$

Die Pole dieses Integrals liegen in $z = a, b, c, x_1, x_2, \ldots x_\nu$, wenn die x die Wurzeln der Gleichung $Q(x) = 0$ sind. In der Nähe von a setze man $z = a + u^2$, dann ist

$$\frac{1}{Q^2(z)} = \frac{1}{Q^2(a)}\left(1 - 2\frac{Q'(a)}{Q(a)} \cdot u^2 + \ldots\right);$$

$$\frac{dz}{2\Pi(z-a)^{2\alpha+\frac{1}{2}}} = \text{const.}\ \frac{du}{u^{4\alpha}}$$

also

$$\frac{dz}{2\Pi(z_1-a_1)^{2\alpha+\frac{1}{2}} \cdot Q^2(z)} = A \cdot \frac{du}{u^{4\alpha}} + B \cdot \frac{du}{u^{4\alpha-2}} + C \cdot \frac{du}{u^{4\alpha-4}} + \ldots$$

Ist nun $\alpha = 0$, so kommen nur die Integrale $\int du$, $\int u^2 du$, $\int u^4 du$ und so fort vor; ist aber $a = \frac{1}{2}$, so hat man $\int \frac{du}{u^2}$, $\int du$, $\int u^2 du$ u. s. f.; es ist also nur die rationale Unstetigkeit $\frac{\text{const.}}{\sqrt{z-a}}$

möglich. Aehnlich verhält sich das Integral in der Nähe der beiden andern Pole b nnd c. Im Bereiche einer Wurzel x_1 der Gleichnng $Q(x) = 0$ setzo man $x = x_1 + w$, nnd eutwicklo nur zweigliedrig. Dann ist

$$Q(x) - Q' \cdot w + \tfrac{1}{2} Q'' \cdot w_2 + \ldots;$$

$$\frac{1}{Q^2} = \frac{1}{Q'^2 w^2}\left(1 + \tfrac{1}{2}\frac{Q''}{Q'} \cdot w + \ldots\right)^{-2} = \frac{1}{Q'^2 w^2} - \frac{Q''}{Q'^3} \cdot \frac{1}{w} + \text{const.}\, w + \ldots.$$

Ferner ist

$$\tfrac{1}{2}\Pi(x-a)^{-2\alpha-1/2} = \tfrac{1}{2}\Pi(x_1-a)^{-2\alpha-1/2}\left(1 - \tfrac{1}{2}\Sigma\frac{4\alpha+1}{x_1-a} \cdot w + \ldots\right)$$

somit

$$\frac{1}{2\Pi(x-a)^{2\alpha+1/2} \cdot Q^2(x)} = \frac{1}{2\Pi(x_1-a)^{2\alpha+1/2} \cdot Q'^2(x_1)} \cdot \left(\frac{1}{w^2} - \left(\frac{Q''}{Q'} + \tfrac{1}{2}\Sigma\frac{4\alpha+1}{x_1-a}\right)\frac{1}{w} + \ldots\right)$$

Nnn ist bekanntlich

$$2\frac{Q''(x)}{Q(x)} + \frac{Q'(x)}{Q(x)} \cdot \Sigma\frac{4\alpha+1}{x-a} + \Sigma\frac{2(\beta+\gamma)^2}{(x-b)(x-c)} = \frac{n(n+1)x+E}{2\Pi(x-a)},$$

also für $x = x_1$ erhält man

$$2Q''(x_1) + Q'(x_1) \cdot \Sigma\frac{4\alpha+1}{x_1-a} = 0$$

Wendet man diese Relation oben an, so folgt

$$\frac{1}{2\Pi(x-a)^{2\alpha+1/2} \cdot Q^2(x)} = \frac{1}{2\Pi(x_1-a)^{2\alpha+1/2} \cdot Q'^2(x_1)} \cdot \left(\frac{1}{w^2} + \text{const.} + \text{const.}\, w + \ldots\right)$$

und man erkennt, dass nur Integrale wie $\int\frac{dw}{w^2}$, $\int dw$, $\int w\, dw$ etc. vorkommen. Es ist also auch hier nur die rationale Unstetigkeit $\frac{\text{const.}}{x-x_1}$ vorhanden und ähnlich verhält sich das Integral in der Nähe der andern Wnrzeln. Das Integral T enthält also nur rationale Unstetigkeiten, wodnrch der Ausschluss elliptischer Integrale 3. Art schon klar gelegt wird.

Nun soll aber T wirklich in elliptische Integrale umgesetzt werden. Wenn der Kürze wegen

$$p = \Pi(z-a)^{-2\alpha-1/2}$$

gesetzt wird, so ist

$$T(x) = \frac{(2n+1)}{2} \cdot P(x) \cdot \int_x^N \frac{p\,dz}{Q^2(z)}$$

und man hat $Q^2(z)$ in Partialbrüche zu zerlegen. Wenn $z = x_1 + h$, h sehr klein, so werde ich während der Rechnung das Argument x_1 der Functionen Q', Q'', . . . nicht schreiben. Da

$$Q(x_1+h) = Q' \cdot h + \tfrac{1}{2} Q'' \cdot h^2 + \ldots$$

so ist

$$\frac{1}{Q^2(z)} = \frac{1}{Q'^2 h^2}\left(1 - \frac{Q''}{Q'} \cdot h + \ldots\right)$$

wo

$$-\frac{Q''}{Q'} = \tfrac{1}{2} \cdot \Sigma \frac{4\alpha+1}{x_1 - a}$$

also allgemein

$$\frac{1}{Q^2(z)} = S \frac{1}{Q'^2(x_1)} \cdot \left[\frac{1}{(z-x_1)^2} + \tfrac{1}{2} \cdot \Sigma \frac{4\alpha+1}{x_1 - a} \cdot \frac{1}{z - x_1}\right]$$

wo das Summenzeichen S sich auf alle Wurzeln $x_1, x_2, \ldots, x_\nu$ erstreckt. Setzt man

$$L_1 = \Pi(x_1 - a) \int_x^N p\left[\frac{1}{(z-x)^2} + \tfrac{1}{2} \cdot \Sigma \frac{4\alpha+1}{x_1 - a} \cdot \frac{1}{z - x_1}\right] dz$$

so ist

$$T(x) = \frac{2n+1}{2} \cdot P(x) \cdot S \frac{L_1}{\Pi(x_1 - a) \cdot Q'^2(x_1)}$$

Es ist nun $\int \frac{p\,dz}{(z-x_1)^2}$ aus dem Ausdrucke für L_1 weg zu bringen.

$$\frac{\partial}{\partial z} \frac{\Pi(z-a)^{1/2-2\alpha}}{z - x_1} = \frac{p}{(z-x_1)^2}\Big[-\Pi(z-a) + (z-x_1) \cdot \Sigma \frac{1-4\alpha}{2}(z-b)(z-c)\Big]$$

Wenn man innerhalb der Klammer alles nach Potenzen von $z - x_1$ ordnet, statt a, b, c die Elemente $x_1 - a$, $x_1 - b$, $x_1 - c$ gebraucht und beachtet, dass

$$\Sigma \frac{1-4\alpha}{2}\left[(x_1 - b) + (x_1 - c)\right] = \Sigma(1 - 2(\beta+\gamma))(x_1 - a)$$

so findet man

$$\frac{\partial}{\partial z} \cdot \frac{\Pi(z-a)^{1/2-2\alpha}}{z-a} = p\Big[-\frac{\Pi(x_1-a)}{(z-x)^2}$$

$$-\Sigma\frac{1+4\alpha}{2}(x_1-b)(x_1-c)\cdot\frac{1}{z-x_1}$$

$$-2\Sigma(\beta+\gamma)(x_1-a)+\tfrac{1}{2}(1-4\Sigma\alpha)(z-x_1)\Big]$$

Es ist also

$$L_1 = \lim_{(N=\infty)}\cdot\Big[\Big\{-\frac{\Pi(z-a)^{1/2-2\alpha}}{z-x_1}\Big\}_x^N$$

$$+\int_x^N p\Big(\frac{1-4\Sigma\alpha}{2}(z-x_1)-2\Sigma(\beta+\gamma)(x_1-a)\Big)\,dz\Big]$$

$\Sigma\alpha$ ist der Werte 0, $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{2}$, 1 fähig. Im ersten Falle wird der Functionsunterschied gross wie $-N^{1/2}$ und das Integral wie

$$\int^N \tfrac{1}{2}z^{-1/2}\,dz = N^{1/2}$$

Man kann also nicht unmittelbar $N=\infty$ setzen, sondern es muss vorher eine (die Symmetrie) Ausgleichung zwischen dem Functionsunterschiede und dem Integrale Statt finden. In den übrigen Fällen dagegen hat man sogleich

$$L_1 = \frac{\Pi(x-a)^{1/2-2\alpha}}{x-x_1}$$

$$+\int_x^\infty p\Big(\frac{1-4\Sigma\alpha}{2}(z-x_1)-2\Sigma(\beta+\gamma)(x_1-a)\Big)\,dz$$

Im Falle (0, 0, 0) ist

$$L_1 = \lim_{(N=\infty)}\cdot\Big[\Big\{-\frac{\sqrt{\Pi(z-a)}}{z-x_1}\Big\}_x^N+\tfrac{1}{2}\int_x^N\frac{z-x_1}{\sqrt{\Pi(z-a)}}\,dz\Big]$$

Um die Unstetigkeiten an der obern Grenze aufzuheben, schreibe man

$$L_1 = \left\{\frac{\sqrt{(z-b)(z-c)}}{\sqrt{z-a}} - \frac{\sqrt{\Pi(z-a)}}{z-x_1}\right\}_x^N$$

$$+ \tfrac{1}{2}\int_x^N \left(\frac{z-x_1}{\sqrt{\Pi(z-a)}} - 2\frac{\partial}{\partial z}\frac{\sqrt{(z-b)(z-c)}}{\sqrt{z-a}}\right)dz$$

Der Functionsunterschied wird

$$\left\{-\frac{x_1-a}{z-x_1}\cdot\frac{\sqrt{(z-b)(z-c)}}{\sqrt{z-x}}\right\}_x^N = \frac{x_1-a}{x-x_1}\frac{\sqrt{(x-b)(x-c)}}{\sqrt{x-a}}$$

und unter dem Integrationszeichen wird der eingeklammerte Ausdruck gleich

$$\frac{1}{\sqrt{\Pi(z-a)}}\left(z-x_1+\frac{(z-b)(z-c)}{z-a}-(z-c)-(z-b)\right)$$

wo

$$(z-x_1)-(z-c) = c-x_1$$

und

$$\frac{(z-b)(z-c)}{z-a}-(z-b) = -(c-a)\cdot\frac{z-b}{z-a}$$

Der eingeklammerte Ausdruck ist also

$$\frac{c-x_1}{\sqrt{\Pi(z-a)}} - (c-a)\cdot\frac{\sqrt{z-b}}{(z-a)^2\cdot\sqrt{z-c}}$$

Endlich ist

$$L_1 = \frac{x_1-a}{x-x_1}\cdot\frac{\sqrt{(x-b)(x-e)}}{\sqrt{x-a}} + \frac{c-x_1}{2}\int_x^N \frac{dz}{\sqrt{\Pi(z-a)}}$$

$$- \frac{c-a}{2}\int_x^N \frac{\sqrt{z-b}\,.\,dz}{(z-a)^2\cdot\sqrt{z-c}}$$

wo $N = \infty$ zu setzen ist. In keinem Falle kommen logarithmische Unstetigkeiten vor. Alle Integrationen, die man zu vollziehen hat, führen nur auf elliptische Integrale erster und zweiter Art. Ich habe mich gewöhnt, beim zweischaligen Hyperboloid, wo x zwischen a und b hin und her geht,

$$k^2 = \frac{b-a}{c-a}, \quad x-a = (c-a)k^2 S^2 u,$$
$$b-x = (c-a)k^2 C^2 u; \quad c-x = (c-a)D^2 u$$

zu setzen, so dass

$$dt = \frac{du}{\sqrt{c-a}}$$

wird. Beim Ellipsoid ist aber $x-a > c-a$, folglich $k^2 S^2 u > 1$. Man kann sich also das Argument u zwischen $K+L$ und L befindlich denken und $u = L - w$ setzen,

$$dt = -\frac{dw}{\sqrt{(c-a)}},$$

wo w positiv ist. Die Halbaxen des Ellipsoides sind dann

$$\sqrt{x-a} = \frac{\sqrt{c-a}}{Sw}, \quad \sqrt{x-b} = \sqrt{c-a} \cdot \frac{Dw}{Sw},$$
$$\sqrt{x-c} = \sqrt{c-a} \cdot \frac{Cw}{Sw}$$

ferner ist

$$\tfrac{1}{2}\int_x^N \frac{dz}{\sqrt{\Pi(z-a)}} = \frac{w}{\sqrt{c-a}};$$

$$\tfrac{1}{2}\int_x^N \frac{\sqrt{(z-b)}\,.\,dz}{(z-a)^{3/2}\sqrt{z-c}} = \frac{E\,\mathrm{am}\,w}{\sqrt{(c-a)}}$$

und somit

$$L_1 = \frac{x_1-a}{x-x_1}\,\frac{\sqrt{(x-b)(x-c)}}{\sqrt{x-a}} + \frac{1}{\sqrt{c-a}}((c-x_1)w-(c-a)E\,\mathrm{am}\,w)$$

folglich

$$T(x) = \frac{2n+1}{2} \times P(x) \times S\,\frac{1}{\Pi(x_1-a)\,Q'(x_1)}$$
$$\cdot\left[\frac{x_1-a}{x-x_1}\cdot\frac{\sqrt{(x-b)(x-b)}}{\sqrt{x-a}} + \frac{1}{\sqrt{c-a}}\Big((c-x_1)w-(c-a)E\,\mathrm{am}\,w\Big)\right]$$

Weil

$$x - x_1 = x - a - (x_1 - a) = (c - a) \cdot \frac{S^2 w' - S^2 w}{S^2 w - S^2 w'},$$

so ist auch

$$T(x) = \frac{2n+1}{2} \times P(x) \times \int \frac{\sqrt{c-a}}{\Pi(x_1 - a) \cdot Q'(x_1)}$$

$$\cdot \frac{1}{S^2 w'} \left[\frac{Sw'_1 Cw Dw}{S^2 w' - S^2 w} \cdot S^2 w' - C^2 w' \times w - S^2 w' \times E\,\mathrm{am}\, w \right]$$

wenn

$$x_1 - a = \frac{c-a}{S^2 w_1}, \quad x_1 - b = (c-a) \cdot \frac{D^2 w_1}{S^2 w_1},$$

$$x_1 - c = (c-a) \cdot \frac{C^2 w_1}{S^2 w_1}$$

gesetzt wird.

Was die übrigen 7 Fälle betrifft, so kann eine Unstetigkeit der in L_1 vorkommenden Integrale nur in $z = a$, b, c gesucht werden. In $z = c$ z. B. sind wegen des Factors p nur die Unstetigkeiten $\frac{dz}{\sqrt{z-c}}$, $\frac{dz}{(z-c)^{3/2}}$ möglich. Die erste ist nur scheinbar, weil

$$\frac{dz}{\sqrt{z-c}} = 2d\sqrt{z-c}$$

Bei der zweiten denke man sich

$$z = c + u^2$$

gesetzt; dann ist alles andere, womit $\frac{dz}{(z-c)^{3/2}}$ multiplicirt ist, nach 1, u^2, u^4, . . . entwickelbar;

$$\frac{dz}{(z-c)^{3/2}} = 2\frac{du}{u^2}$$

es kommen also nur die Integrale $\int \frac{du}{u^2}$, $\int du$, $\int u^2 du$, ... vor, und folglich ist nur die rationale Unstetigkeit $\frac{\text{const.}}{\sqrt{z-c}}$ möglich. Ich will nun die andern 7 Fälle der Reihe nach durchgehen.

I) $(\alpha, \beta, \gamma) = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})$

In diesem Falle ist

$$L_1 = \frac{1}{(x-x_1)\sqrt{\Pi(x-a)}} + \int_x^\infty (-5(z-x_1)-4\Sigma(x_1-a))\frac{dz}{2\Pi(z-a)^{3/2}}$$

die Klammer unter dem Integrationszeichen kann durch

$$-5(z-a)-7x_1+4(b+c)-a$$

ersetzt werden. Dann ist

$$L_1 = \frac{1}{(x-x_1)\sqrt{\Pi(x-a)}} - 5\int_x^\infty \frac{1}{(z-b)(z-c)} \cdot \frac{dz}{2\sqrt{\Pi(z-a)}}$$
$$+(4(b+c)-a-7x_1)\int_x^\infty \frac{1}{\Pi(z-a)} \cdot \frac{dz}{2\sqrt{\Pi(z-a)}}$$

Das erste Integral ist $\frac{1}{(c-a)^{5/2}} \cdot \int_0 \frac{S^4 u}{C^2 u \,.\, D^2 u}\,du$; weil

$$l^2 S^2 = D^2 - C^2$$

so ist

$$\frac{l^2 S^4}{C^2 D^2} = \frac{S^2}{C^2} - \frac{S^2}{D^2} = \frac{S^2}{C^2} - \frac{1}{k^2}\left(\frac{1}{D^2}-1\right)$$

und also

$$\frac{k^2 l^4 S^4}{C^2 \,.\, D^2} = k^2 \,.\, \frac{l^2 S^2}{C^2} - \frac{l^2}{D^2} + l^2 = -k^2\left(D^2 + \frac{\partial}{\partial u}\left(-\frac{SD}{C}\right)\right)$$
$$-\left(D^2 + \frac{\partial}{\partial u}\left(-\frac{k^2 SC}{D}\right)\right) + l^2$$

folglich

$$\int_x^\infty \frac{1}{(z-b)(z-c)} \cdot \frac{dz}{2\sqrt{\Pi(z-a)}} = \frac{1}{(c-a)^{5/2}} \cdot \frac{1}{k^2 l^4}$$
$$\cdot \left[l^2 w - (1+k^2)\,\mathrm{Eam}\,w + k^2\frac{Sw \,.\, Dw}{Cw} + k^2\frac{Sw \,.\, Cw}{Dw}\right]$$
$$= \frac{1}{(c-a)^{5/2}} \cdot \frac{1}{k^2 l^4} \cdot G$$

ferner ist

$$\int_x^\infty \frac{1}{\Pi(z-a)} \cdot \frac{dz}{2\sqrt{\Pi(z-a)}} = \frac{1}{(c-a)^{7/2}} \int_0^w \frac{S^6 u \, . \, du}{C^2 u \, . \, D^2 u}$$

Weil

$$\frac{k^2 l^4 S^4}{C^2 \, . \, D^2} = k^2 l^2 \frac{S^2}{C^2} - \frac{l^2}{D^2} + l^2$$

so hat mau nur noch mit

$$k^2 S^2 = k^2(1-C^2) = 1 - D^2$$

zu multipliciren, um

$$k^4 l^4 \frac{S^6}{C^2 \, . \, D^2} = k^4 \, . \, \frac{l^2 S^2}{C^2} - k^4 l^2 S^2 - \frac{l^2}{D^2} + l^2 + k^2 l^2 S^2$$

$$= k^4 \, . \, \frac{l^2 S^2}{C^2} - \frac{l^2}{D^2} - l^4 D^2 + l^2(1+l^2)$$

$$= l^2(1+l^2) - 2(1-k^2+k^4) D^2$$

$$+ \frac{\partial}{\partial u}\left(k^4 \frac{SD}{C} + k^2 \frac{SC}{D}\right)$$

zu finden. Also ist

$$\int_x^\infty \frac{1}{\Pi(z-a)} \cdot \frac{dz}{2\sqrt{\Pi(z-a)}}$$

$$= \frac{1}{(c-a)^{7/2} k^4 l^4}\Big[l^2(1+l^2) w - 2(1-k^2+k^4) E \operatorname{am} w$$

$$+ k^4 \frac{Sw \, . \, Dw}{Cw} + k^2 \frac{Sw \, . \, Cw}{Dw}\Big] = \frac{1}{(c-a)^{7/2} k^4 l^4} \cdot F$$

und somit

$$L_1 = \frac{1}{(x-x_1)\sqrt{\Pi(x-a)}} - \frac{1}{(c-a)^{7/2} k^4 l^4}$$

$$. \, ((4(b+c) - a - 7x_1) F - 5(c-a) k^2 G)$$

II) $(\alpha, \beta, \gamma) = (\frac{1}{2}, 0, 0)$

In diesem Falle ist

$$L_1 = \frac{\sqrt{(x-b)(x-c)}}{(x-x_1)\sqrt{(x-a)}}$$

$$+ \int_x^\infty (-(z-x_1) + 2(b+c) - 4x_1) \frac{dz}{2(z-a)\sqrt{\Pi(z-a)}}$$

Wird die Klammer unter dem Integrationszeichen durch

$$-(z-a)+2(b+c)-a-3x_1$$

ersetzt, so findet man

$$L_1 = \frac{\sqrt{(x-b)(x-c)}}{(x-x_1)\sqrt{(x-a)}} - \frac{1}{2}\int_x^\infty \frac{dz}{\sqrt{\Pi(z-a)}}$$
$$+ (2(b+c)-a-3x_1)\frac{1}{2}\int_x^\infty \frac{dz}{(z-a)\sqrt{\Pi(z-a)}}$$

und weil

$$\frac{1}{2}\int_x^\infty \frac{dz}{\sqrt{\Pi(z-a)}} = \frac{w}{\sqrt{(c-a)}};$$

$$\frac{1}{2}\int_x^\infty \frac{dz}{(z-a)\sqrt{\Pi(z-a)}} = \frac{1}{(c-a)^{3/2}}\int_0^w S^2u \,.\, du$$
$$= \frac{1}{(c-a)^{3/2}} \cdot \frac{1}{k^2}(w - E\,\mathrm{am}\,u)$$

so hat man

$$L_1 = \frac{\sqrt{(x-b)(x-c)}}{(x-x_1)\sqrt{(x-a)}} - \frac{1}{2\sqrt{(c-a)}} \,.\, w$$
$$+ \frac{2(b+c)-a-3x_1}{(c-a)^{3/2}} \frac{1}{k^2}(w - E\,\mathrm{am}\,w)$$

III) $(\alpha, \beta, \gamma) = (0, \frac{1}{2}, 0)$

Weil

$$L_1 = \frac{\sqrt{(x-a)(x-c)}}{(x-x_1)\sqrt{(x-b)}} - \frac{1}{2}\int_x^\infty \frac{dz}{\sqrt{\Pi(z-a)}}$$
$$+ (2(a+c)-b-3x_1)\frac{1}{2}\int_x^\infty \frac{dz}{(z-b)\sqrt{\Pi(z-a)}},$$

$$\frac{1}{2}\int\limits_x^\infty \frac{dz}{(z-b)\sqrt{\Pi(z-a)}} = \frac{1}{(c-a)^{3/2}}\int\limits_0^w \frac{S^2u}{D^2u}\,du$$

$$= \frac{1}{(c-a)^{3/2}\,.\,k^2}\int\limits_0^w \frac{k^2 S^2u}{D^2u}\,du$$

und

$$\frac{k^2 S^2u}{D^2u} = \frac{1}{l^2}\left(\frac{l^2}{D^2u} - l^2\right) = \frac{1}{l^2}\left(D^2u - \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{k^2\,SC}{D}\right) - l^2\right)$$

so ist

$$\frac{1}{2}\int\limits_x^\infty \frac{dz}{(z-b)\sqrt{\Pi(z-a)}}$$

$$= \frac{1}{(c-a)^{3/2}}\cdot\frac{1}{k^2 l^2}\left(-l^2 w + E\,\mathrm{am}\,w - k^2\frac{Sw\,Cw}{Dw}\right)$$

und demnach

$$L_1 = \frac{\sqrt{(x-a)(x-c)}}{(x-x_1)\sqrt{(x-b)}} - \frac{1}{\sqrt{a-c}}\,.\,w$$

$$+ \frac{2(a+c)-b-3x_1}{(c-a)^{3/2}}\cdot\frac{1}{k^2 l^2}\left[-l^2 w + E\,\mathrm{am}\,w - k^2\frac{Sw\,Cw}{Dw}\right]$$

IV) $(\alpha, \beta, \gamma) = (0, 0, \tfrac{1}{2})$

Unter dieser Annahme ist nun

$$L_1 = \frac{\sqrt{(x-a)(x-b)}}{(x-x_1)\sqrt{(x-c)}} - \frac{1}{2}\int\limits_x^\infty \frac{dz}{\sqrt{\Pi(z-a)}}$$

$$+(2(a+b)-c-3x_1)\,\frac{1}{2}\int\limits_x^\infty \frac{dz}{(z-c)\sqrt{\Pi(z-a)}}$$

und weil

$$\frac{1}{2}\int\limits_x^\infty \frac{dz}{(z-c)\sqrt{\Pi(z-a)}} = \frac{1}{(c-a)^{3/2}}\int\limits_0^w \frac{S^2u}{C^2u}\,du$$

$$= \frac{1}{(c-a)^{3/2}}\,\frac{1}{l^2}\int_0^w\left(\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{Su\,Du}{Cu}\right)-D^2u\right)du$$

$$= \frac{1}{(c-a)^{3/2}}\cdot\frac{1}{l^2}\left(\frac{Sw\,.\,Dw}{Cw}-E\,\mathrm{am}\,w\right)$$

so ist

$$L_1=\frac{\sqrt{(x-a)\,(x-b)}}{(x-x_1)\sqrt{(x-c)}}-\frac{1}{\sqrt{(c-a)}}\,w$$
$$+\frac{2(a+b)-c-3x_1}{(c-a)^{3/2}}\cdot\frac{1}{l^2}\left[-E\,\mathrm{am}\,w+\frac{Sw\,.\,Dw}{Cw}\right]$$

folglich

$$T(x)=\frac{2n+1}{2}\times P(x)=\int\frac{L_1}{\Pi(x_1-a)\,Q'^2(x_1)}$$

V) $(\alpha,\beta,\gamma)=(\frac{1}{2},\frac{1}{2},0)$

Setzt man diese Werte von α, β, γ in L_1 ein, so erhält man aus demselben folgenden Ausdruck:

$$L_1=\frac{\sqrt{(x-c)}}{(x-x_1)\sqrt{(x-a)(x-b)}}$$
$$+\int_x^\infty(-3(z-b)+2a-b+c-5x_1)\frac{dz}{2(z-a)\,(z-b)\sqrt{\Pi(z-a)}}$$
$$=\frac{\sqrt{(x-c)}}{(x-x_1)\sqrt{(x-a)\,(x-b)}}-\frac{3}{2}\int_x^\infty\frac{dz}{(z-a)\sqrt{\Pi(z-a)}}$$
$$+(2a-b+c-5x_1)\int_x^\infty\frac{dz}{2(z-a)(z-b)\sqrt{\Pi(z-a)}}.$$

Nun ist aber nach früherem

$$\frac{1}{2}\int_x^\infty\frac{dz}{(z-a)\sqrt{\Pi(z-a)}}=\frac{1}{(c-a)^{3/2}}\cdot\frac{1}{k^2}(w-E\,\mathrm{am}\,w)$$

und ferner ist

$$\tfrac{1}{2}\int_x^\infty \frac{dz}{(z-a)(z-b)\sqrt{\Pi(z-a)}} = \frac{1}{(c-a)^{5/2}}\int_0^w \frac{S^4(u)\,du}{D^2(u)}$$

weil nun aber

$$\frac{S^4u}{D^2u} = \frac{1}{l^2k^4}\left(\frac{l^2}{D^2u} - 2l^2 + l^1 D^2u\right)$$

$$= \frac{1}{l^2k^4}\left(-2l^2 + (1+l^2)D^2u - \frac{\partial}{\partial u}\frac{k^2 S\,C}{D}\right)$$

so ist auch

$$\tfrac{1}{2}\int_x^\infty \frac{dz}{(z-a)(z-b)\sqrt{\Pi(z-a)}}$$

$$= \frac{1}{(c-a)^{5/2}}\cdot\frac{1}{l^2k^4}\left(-2l^2w + (1+l^2)E\,\mathrm{am}\,w - k^2\frac{Sw\,Cw}{Dw}\right)$$

$$= \frac{1}{(c-a)^{5/2}}\cdot\frac{1}{l^2k^3}\cdot J$$

somit

$$L_1 = \frac{\sqrt{(x-c)}}{(x-x_1)\sqrt{(x-a)(x-b)}} - \frac{3}{(c-a)^{3/2}}\cdot\frac{1}{k^2}(w - E\,\mathrm{am}\,w)$$

$$+ \frac{2a-b+c-5x_1}{(c-a)^{5/2}}\cdot\frac{1}{k^4l^2}\cdot J$$

VI) $(\alpha,\beta,\gamma) = (\tfrac{1}{2}, 0, \tfrac{1}{2})$

In diesem Falle ist

$$L_1 = \frac{\sqrt{(x-b)}}{(x-x_1)\sqrt{(x-a)(x-c)}} - \tfrac{3}{2}\int_x^\infty \frac{dz}{(z-a)\sqrt{\Pi(z-a)}}$$

$$+ (2a+b-c-5x_1)\int_x^\infty \frac{dz}{2(z-a)(z-c)\sqrt{\Pi(z-a)}}.$$

Weil nun aber

$$\tfrac{1}{2}\int_x^\infty \frac{dz}{(z-a)(z-c)\sqrt{\Pi(z-a)}} = \frac{1}{(c-a)^{5/2}}\int_0^w \frac{S^4u}{C^2u}\,du$$

und

$$\frac{S^2 u}{C^2 u} = \frac{1}{k^2 l^2}\left(k^2 \cdot \frac{l^2 S^2 u}{C^2 u} + l^2 D^2 u - l^2\right)$$
$$= \frac{1}{k^2 l^2}\left(\frac{\partial}{\partial u}\left(k^2 \frac{SD}{C}\right) - l^2 + (l^2 - k^2) D^2 u\right)$$

also

$$\frac{1}{2}\int_x^\infty \frac{dz}{(z-a)(z-c)\sqrt{\Pi(z-a)}}$$
$$= \frac{1}{(c-a)^{5/2}} \cdot \frac{1}{k^2 l^2}\left[-l^2 w + (1-2k^2) E\,\mathrm{am}\, w + k^2 \frac{Sw \cdot Dw}{Cw}\right],$$
$$= \frac{1}{(c-a)^{5/2}} \cdot \frac{1}{k^2 l^2} \cdot H$$

so ist

$$L_1 = \frac{\sqrt{x-b}}{(x-x_1)\sqrt{(x-a)(x-c)}} - \frac{3}{(c-a)^{3/2}} \cdot \frac{1}{k^2}(w - E\,\mathrm{am}\, w)$$
$$+ \frac{2a+b-c-5x_1}{(c-a)^{5/2}} \cdot \frac{1}{k^2 l^2} \cdot H$$

VII) $(\alpha, \beta, \gamma) = (0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})$.

Man erhält sogleich

$$L_1 = \frac{\sqrt{x-a}}{(x-x_1)\sqrt{(x-b)(x-c)}} - \frac{3}{2}\int_x^\infty \frac{dz}{(z-c)\sqrt{\Pi(z-a)}}$$
$$+ (a-b+2c-5x_1)\frac{1}{2}\int_x^\infty \frac{dz}{(z-b)(z-c)\sqrt{\Pi(z-a)}}.$$

Nun ist nach früherem

$$\frac{1}{2}\int_x^\infty \frac{dz}{(z-c)\sqrt{\Pi(z-a)}} = \frac{1}{(c-a)^{3/2}} \cdot \frac{1}{l^2}\left(\frac{Sw \cdot Dw}{Cw} - E\,\mathrm{am}\, w\right)$$

und

$$\frac{1}{2}\int_x^\infty \frac{dz}{(z-b)(z-c)\sqrt{\Pi(z-a)}} = \frac{1}{(c-a)^{5/2}} \cdot \frac{1}{k^2 l^4} \cdot G$$

somit

$$L_1 = \frac{\sqrt{(x-a)}}{(x-x_1)\sqrt{(x-b)(x-c)}} - \frac{3}{(c-a)^{3/2}} \cdot \frac{1}{l^2}\left(\frac{Sw \cdot Dw}{Cw} - E\mathrm{am}w\right) + \frac{(a-b+2c-5x_1)}{(c-a)^{5/2}} \cdot \frac{1}{k^2 l^4} \cdot G$$

Heine gibt in seinem mehr erwähnten Lehrbuche der Kugelfunctionen Bd. 2, §. 100 nicht durchweg fertig gerechnete Werte für $T(x)$ für die Fälle $n = 0$ und $n = 1$ an. Weil ich später die ausgerechneten Werte von $T(x)$ für $n = 0, 1, 2, 3$ nötig habe, so will ich schon hier die Rechnung durchführen und gehe dabei von der Formel

$$T(x) = (2n+1) \cdot P(x) \cdot \int_x^\infty \frac{dz}{2\sqrt{\Pi(z-a)} \times P^2(z)}$$

aus, wo

$$P(x) = \Pi(x-a)^\alpha \times Q(x), \quad Q(x) = x^v - d_1 x^{v-1} + d_2 x^{v-2} + \\ + \ldots + (-1)^v dv$$

und

$$2(\alpha+\beta+\gamma+v) = n$$

st.

I. $n = 0$, also $v = 0$, $(\alpha, \beta, \gamma) = (0, 0, 0)$.

In diesem Falle ist $P(x) = 1$ und die Formel für $T(x)$ gibt sogleich

$$T(x) = \int_x^\infty \frac{dz}{2\sqrt{\Pi(z-a)}} = \frac{w}{\sqrt{(c-a)}}.$$

II. $n = 1$, also $v = 0$.

1) $(\alpha, \beta, \gamma) = (\frac{1}{2}, 0, 0)$.

Setzt man diese Werte in die Ausdrüke für $P(x)$ und $T(x)$ ein, ein, so erhält man

$$P(x) = \sqrt{x-a} = \sqrt{c-a} \times \frac{1}{S(w)}$$

und

$$T(x) = 3\sqrt{x-a}\int_x^\infty \frac{dz}{2(z-a)\sqrt{\Pi(z-a)}}$$

$$= \frac{3}{(c-a)} \times \frac{1}{S(w)} \int_0^w S^2(u) \times du = \frac{3}{(c-a)} \cdot \frac{1}{k^2 S(w)}[w - E\,\mathrm{am}\,w]$$

2) $(\alpha, \beta, \gamma) = (0, \frac{1}{2}, 0)$.

Man findet

$$P(x) = \sqrt{x-b} = \sqrt{c-a} \times \frac{D(w)}{S(w)},$$

und

$$T(x) = 3\sqrt{(x-b)} \int_x^{\infty} \frac{dz}{2(z-b)\sqrt{\Pi(z-a)}}$$

$$= \frac{3}{(c-a)} \cdot \frac{D(w)}{S(w)} \cdot \int_0^w \frac{S^2 u}{D^2 u} du = \frac{3}{(c-a)} \cdot \frac{1}{k^2 l^2}$$

$$\cdot \left[\frac{D(w)}{S(w)}(-l^2 w + E \operatorname{am} w) - k^2 C(w)\right]$$

3) $(\alpha, \beta, \gamma) = (0, 0, \frac{1}{2})$.

In diesem Falle ist

$$P(x) = \sqrt{(x-c)} - \sqrt{(c-a)} \times \frac{C(w)}{S(w)}$$

und

$$T(x) = 3\sqrt{(x-c)} \int_x^{\infty} \frac{dz}{2(z-c)\sqrt{\Pi(z-a)}}$$

$$= \frac{3}{(c-a)} \cdot \frac{C(w)}{S(w)} \cdot \int_0^w \frac{S^2(u)}{C^2(u)} du$$

$$= \frac{3}{(c-a)} \cdot \frac{1}{l^2}\left[D(w) - \frac{C(w)}{S(w)} \cdot E \operatorname{am} w\right]$$

III. $n = 2$, also v entweder 0 oder 1.

1) $(\alpha, \beta, \gamma) = (0, 0, 0)$, $v = 1$.

Es ist nun

$$P(x) = x - d$$

wo d vermöge der Relation

$$(\lambda+1)(2n-2\lambda-1)d_{\lambda+1} = [(2n-1)d_1 - 2\lambda(n-\lambda) \cdot \Sigma a$$
$$+ 4\lambda \cdot \Sigma(\alpha a)]d_\lambda + (v-\lambda+1)[(2v-2\lambda+1) \times$$
$$\times \Sigma(bc + 4\Sigma(\alpha bc)] \cdot d_{\lambda-1} + 2(v-\lambda+1)abc \times d_{\lambda-2} \times (v-\lambda+2)$$

durch die quadratische Gleichung

$$3d^2 - 2\Sigma a \times d + \Sigma bc = 0$$

oder

$$\frac{1}{d-a} + \frac{1}{d-b} + \frac{1}{d-c} = 0$$

bestimmt wird. Die letztere Formel offenbart sogleich, dass die beiden Wurzeln d und d_1 zwischen a und c liegen müssen. Ich setze nun

$$d - a = (c-a) \cdot \frac{1}{S^2 \varepsilon}, \quad d - b = (c-a) \cdot \frac{D^2 \varepsilon}{S^2 \varepsilon},$$

$$d - c = (c-a) \cdot \frac{C^2 \varepsilon}{S^2 \varepsilon}$$

und die Gleichung für d gibt

$$S^2(\varepsilon) \left(1 + \frac{1}{D^2(\varepsilon)} + \frac{1}{C^2(\varepsilon)}\right) = 0$$

und weil $S^2(\varepsilon) = 0$ das Unstatthafte $d = \infty$ verlangen würde, so hat man

$$1 + \frac{1}{D^2(\varepsilon)} + \frac{1}{C^2(\varepsilon)} = 0$$

Diese Gleichung führt auf

$$\varrho^2 = 1 - k^2 + k^4$$

ϱ sei positiv verstanden. Zu ϱ, $-\varrho$ gehören resp. ε und ε'; man kann

$$S(\varepsilon) = \frac{1}{k} \cdot \sqrt{1 + k^2 + \varrho}; \quad C(\varepsilon) = \frac{i}{k} \cdot \sqrt{1 + \varrho};$$

$$D(\varepsilon) = i\sqrt{1 + k^2}$$

ε zwischen $-L$ und $K - L$

$$S(\varepsilon') = \frac{1}{k} \cdot \sqrt{1 + k^2 - \varrho}; \quad C(\varepsilon') = \frac{i}{k} \cdot \sqrt{1 - \varrho};$$

$$D(\varepsilon') = i\sqrt{-\varrho + k^2}$$

ε' zwischen K und $K - L$ annehmen. Aus diesen Gleichungen ergibt sich, dass

$$S(\varepsilon) \cdot S(\varepsilon') = \frac{\sqrt{3}}{k}, \quad C(\varepsilon) \cdot C(\varepsilon') = -\frac{l}{k}, \quad D(\varepsilon) \cdot D(\varepsilon') = il$$

Nun ist

$$P(x) = x - d = x - a - (d - a) = (c-a) \cdot \frac{S^2(\varepsilon) - S^2(w)}{S^2(\varepsilon) \cdot S^2(w)}$$

und

$$T(x) = 5(x-d)\int_x^\infty \frac{dz}{2(z-d)^2\sqrt{\Pi(z-a)}}$$

$$= \frac{5}{(c-a)^{3/2}} S^2(\varepsilon) \cdot \frac{S^2(\varepsilon)-S^2(w)}{S^2(w)} \cdot \int_0^w \frac{S^4(u)\,du}{(S^2(\varepsilon)-S^2(u))^2}.$$

Setzt man

$$p = S^2(u) - S^2(\varepsilon)$$

so ist

$$\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{S(u)\,.\,C(u)\,.\,D(u)}{p}\right) = p\,\frac{\partial}{\partial p}\left(\frac{Su\,.\,Cu\,.\,Du}{p}\right)^2$$

$$= k^2 p - \frac{1-2(1+k^2)S^2(\varepsilon)+3k^2S^4(\varepsilon)}{p} - 2\frac{S^2(\varepsilon)\,C^2(\varepsilon)\,D^2(\varepsilon)}{p^2}$$

und weil

$$\frac{S^4 u}{(S^2(u)-S^2(\varepsilon))^2} = 1 + 2\frac{S^2(\varepsilon)}{p} + \frac{S^4(\varepsilon)}{p^2}$$

so findet man

$$2C^2(\varepsilon)\,.\,D^2(\varepsilon)\,.\,\frac{S^4(u)}{p^2} + S^2(\varepsilon)\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{S(u)\,.\,C(u)\,.\,D(u)}{p}\right)$$

$$= k^2S^2(\varepsilon)p + 2C^2(\varepsilon)\,.\,D^2(\varepsilon) + 2\frac{S^2(\varepsilon)}{p}\left[3-(1+k^2)S^2\varepsilon + k^2S^4\varepsilon\right]$$

Vermöge der Gleichung für $S^2(\varepsilon)$ wird aber der Coefficient von $\frac{1}{p}$ zu null gemacht, wodurch die elliptischen Integrale dritter Art wegfallen. Man hat daher

$$T(x) = \frac{5}{2(c-a)^{3/2}} \cdot \frac{S^4(\varepsilon)}{C^2(\varepsilon)\,D^2(\varepsilon)}$$

$$\cdot \left[\frac{C_1(w)\,.\,D(w)}{S(w)} - \frac{S^2(\varepsilon)-S^2(w)}{S^2(\varepsilon)\,S^2(w)}(C^2(\varepsilon)\,.\,w + S^2(\varepsilon)\,.\,E\text{am}\,w)\right.$$

und eine gleiche Formel mit ε'.

2) $(\alpha, \beta, \gamma) = (0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}),\ v = 0$.

Es ist

$$P(x) = \sqrt{(x-b)(x-c)} = (c-a)\,.\,\frac{C(w)\,.\,D(w)}{S^2(w)}$$

und

$$T(x) = 5\sqrt{(x-b)\,(x-c)}\;\tfrac{1}{2}\int\limits_{x}^{\infty}\frac{dz}{(z-b)\,(z-c)\,\sqrt{\Pi(z-a)}}$$

$$= \frac{5}{(c-a)^{3/2}}\cdot\frac{C(w)\,.\,D(w)}{S^2(w)}\cdot\int\limits_0^w\frac{S^4(u)}{C^2u\,.\,D^2u}\,du$$

Da ich dieses Integral schon auf Seite 129 ausgewertet habe, so kann der Wert unmittelbar hingesetzt werden und man bekommt

$$T(x) = \frac{5}{(c-a)^{3/2}}\cdot\frac{1}{l^4}\left[\frac{C^2(w)+D^2(w)}{S(w)} - \frac{1}{k^2}\,\frac{C(w)\,D(w)}{S^2(w)}\left((1+k^2)\,E\,\mathrm{am}\,w - l^2 w\right)\right]$$

3) $(\alpha,\ \beta,\ \gamma) = (\tfrac{1}{2},\ 0,\ \tfrac{1}{2}),\ v = 0.$

Man findet

$$P(x) = \sqrt{(x-a)\,(x-c)} = (c-a)\,\frac{C(w)}{S^2(w)}$$

und

$$T(x) = 5\sqrt{(x-a)\,(x-c)}\int\limits_{x}^{\infty}\frac{dz}{2(z-a)\,(z-c)\,\sqrt{\Pi(z-a)}}$$

$$= \frac{5}{(c-a)^{3/2}}\quad\frac{C(w)}{S^2(w)}\int\limits_0^w\frac{S^4(u)}{C^2(u)}\,du$$

also nach Seite 129 ist somit

$$T(x) = \frac{5}{(c-a)^{3/2}\,l^2}\left[\frac{D(w)}{S(w)} - \frac{1}{k^2}\cdot\frac{C(w)}{S^2(w)}\left(l^2 w - (1-2k^2)\,E\,\mathrm{am}\,w\right)\right]$$

4) $(\alpha,\ \beta,\ \gamma) = (\tfrac{1}{2},\ \tfrac{1}{2},\ 0),\ v = 0.$

In diesem Falle ist

$$P(x) = \sqrt{(x-a)\,(x-b)} = (c-a)\cdot\frac{D(w)}{S^2(w)}$$

und

$$T(x) = 5\sqrt{(x-a)(x-2)}\int\limits_x^\infty \frac{dz}{2(z-a)\,(z-c)\,\sqrt{\Pi(z-a)}}$$

$$= \frac{5}{(c-a)^{3/2}}\cdot\frac{D(w)}{S^2(w)}\cdot\int\limits_0^w \frac{S^4(u)}{D^2(u)}\,du,$$

also nach Seite 128 findet man

$$T(x) = \frac{5}{(c-a)^{3/2}}\cdot\frac{1}{l^2 k^2}\left[-\frac{C(w)}{S(w)} + \frac{1}{k^2}\cdot\frac{D(w)}{S^2(w)}\left((2-k^2)\,E\,\mathrm{am}\,w - 2l^2 w\right)\right]$$

IV. $n = 3,\ v = 1.$

1) $(\alpha, \beta, \gamma) = (\frac{1}{2}, 0, 0);\ v = 1.$

In diesem Falle ist

$$P(x) = (x-d)\sqrt{x-a}$$

$$= (c-a)^{3/2}\cdot\frac{d-a}{c-a}\cdot\frac{x-a}{c-a}\left(\frac{c-a}{d-a} - \frac{c-a}{x-a}\right)\frac{\sqrt{x-a}}{\sqrt{c-a}}$$

$$= (c-a)^{3/2}\cdot\frac{1}{S^3(w)}\cdot\frac{d-a}{c-a}\left(\frac{c-a}{d-a} - S^2(w)\right)$$

und d wird durch die Gleichung

$$\frac{3}{d-a} + \frac{1}{d-b} + \frac{1}{d-c} = 0$$

bestimmt. Wenn

$$d-a = (c-a)\frac{1}{S^2(\varepsilon)},\qquad d-b = (c-a)\frac{D^2(\varepsilon)}{S^2(\varepsilon)},$$

$$d-c = (c-a)\frac{C^2(\varepsilon)}{S^2(\varepsilon)}$$

gesetzt wird, so genügt $S^2(\varepsilon)$ der Gleichung

$$3 + \frac{1}{D^2(\varepsilon)} + \frac{1}{C^2(\varepsilon)} = 0$$

oder auch

$$3k^2 S^4(\varepsilon) - 4(1+k^2)S^2(\varepsilon) + 5 = 0$$

Diese Gleichung führt auf

$$\varrho^2 = 4 - 7k^2 + 4k^4 = 4l^4 + k^2,$$

wo ϱ positiv verstanden wird, und man hat

$$S(\varepsilon) = \frac{1}{k\sqrt{3}} \cdot \sqrt{2(1+k^2)+\varrho}, \quad C(\varepsilon) = \frac{i}{k\sqrt{3}} \cdot \sqrt{2-k^2+\varrho},$$

$$D(\varepsilon) = \frac{i}{\sqrt{3}} \cdot \sqrt{\varrho - 1 + 2k^2}$$

$$\frac{1}{S(\varepsilon)} = \frac{1}{\sqrt{5}} \quad \sqrt{2(1+k^2)^2 - \varrho}, \quad \frac{1}{C(\varepsilon)} = \frac{i}{l} \cdot \sqrt{2-k^2-\varrho};$$

$$\frac{1}{D(\varepsilon)} = \frac{i}{l} \cdot \sqrt{\varrho + 1 - 2k^2}$$

und ebenso

$$S(\varepsilon') = \frac{1}{k\sqrt{3}} \cdot \sqrt{2(1+k^2)-\varrho}, \quad C(\varepsilon') = \frac{i}{k\sqrt{3}} \cdot \sqrt{2-k^2-\varrho},$$

$$D(\varepsilon') = \frac{i}{\sqrt{3}} \cdot \sqrt{-\varrho - 1 + 2k^2}$$

$$\frac{1}{S(\varepsilon')} = \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \sqrt{2(1+k^2)+\varrho}, \quad \frac{1}{C(\varepsilon')} = \frac{i}{l} \cdot \sqrt{2-k^2+\varrho},$$

$$\frac{1}{D(\varepsilon')} = \frac{i}{l} \cdot \sqrt{-\varrho + 1 - 2k^2}$$

folglich

$$S(\varepsilon) \cdot S(\varepsilon') = \frac{\sqrt{5}}{k\sqrt{3}}; \quad C(\varepsilon) \cdot C(\varepsilon') = -\frac{l}{k\sqrt{3}};$$

$$D(\varepsilon) D(\varepsilon') = -\frac{il}{\sqrt{3}}$$

Es ist nun

$$P(x) = (c-a)^{3/2} \frac{S^2(\varepsilon) - S^2(w)}{S^2(\varepsilon) \cdot S^2(w)}$$

und ebenso wird

$$T(x) = 7(x-d)\sqrt{x-a} \int_x^\infty \frac{dz}{2(z-d)^2(z-a)\sqrt{\Pi(z-a)}}$$

$$= \frac{7}{(c-a)^2} \cdot S^2(\varepsilon) \frac{S^2(\varepsilon) - S^2(w)}{S^3(w)} \cdot \int_0^w \frac{S^6(u)}{(S^2(\varepsilon) - S^2(u))^2} du$$

Um dieses Integral zu bestimmen, setze ich wieder

$$p = S^2(u) - S^2(\varepsilon)$$

dann ist nach Seite 133

$$\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{Su\,.\,Cu\,.\,Du}{p}\right) = k^2 p - \frac{1-2(1+k^2)S^2(\varepsilon)+3k^2 S^4(\varepsilon)}{p} - 2\,\frac{S^2(\varepsilon)\,C^2(\varepsilon)\,D^2(\varepsilon)}{p}$$

ferner ist

$$\frac{S^6(u)}{(S^2(\varepsilon)-S^2(u))^2} = 3\,S^2(\varepsilon)+p+3\,\frac{S^4(\varepsilon)}{p}+\frac{S^6(\varepsilon)}{p^2}$$

Wird diese letzte Gleichnng mit $2C^2(\varepsilon)\,D^2(\varepsilon)$ und die vorhergehende mit $S^4(\varepsilon)$ mnltipl., so gibt ihre Summe

$$\begin{aligned}2C^2(\varepsilon)\,.\,D^2(\varepsilon)\,.\,\frac{S^6(u)}{S^2(\varepsilon)-S^2(u)^2}+S^4(\varepsilon)\,\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{Su\,.\,Cu\,.\,Du}{p}\right)\\ = 6S^2(\varepsilon)\,C^2(\varepsilon)\,D^2(\varepsilon)+(2(C^2(\varepsilon)\,D^2(\varepsilon)+k^2 S^4(\varepsilon))\,p\\ +\frac{S^4(\varepsilon)}{p}(6C^2(\varepsilon)\,D^2(\varepsilon)-1+2(1+k^2)\,S^2(\varepsilon)-3k^2 S^4(\varepsilon))\end{aligned}$$

wo aber vermöge der Relation

$$3k^2 S^4(\varepsilon)-4(1+k^2)\,S^2(\varepsilon)+5=0$$

auch

$$6C^2(\varepsilon)\,D^2(\varepsilon)-1+2(1+k^2)\,S^2(\varepsilon)-3k^2 S^4(\varepsilon)=0$$

ist, wodurch die Integrale dritter Art wegfallen. Es ist somit

$$\begin{aligned}T(x) = \frac{7}{(c-a)^2}\cdot\frac{S^2(\varepsilon)}{2k^2 C^2(\varepsilon)\,D^2(\varepsilon)}\Big[k^2\,S^4(\varepsilon)\,.\,\frac{C(w)\;D(w)}{S^2(w)}\\ +\frac{S^2(\varepsilon)-S^2(w)}{S^3(w)}((3-2(1+k^2)\,S^2(\varepsilon^2)E\,\mathrm{am}\,w-(3-(2+k^2)\,S^2(\varepsilon)\,w)\Big]\end{aligned}$$

und eine ähnliche Formel erhält man für ε'.

2) $(\alpha,\ \beta,\ \gamma) = (0,\ \frac{1}{2},\ 0),\ v = 1.$

Es ist

$$\begin{aligned}P(x) &= (x-d)\sqrt{x-b}\\ &= (c-a)^{3/2}\cdot\frac{d-b}{c-a}\cdot\frac{x-b}{c-a}\left(\frac{c-a}{d-b}-\frac{c-a}{x-b}\right)\frac{\sqrt{(x-b)}}{\sqrt{(c-a)}}\end{aligned}$$

oder

$$P(x) = (c-a)^{3/2}\cdot\frac{D(w)}{S^2(\varepsilon)\,S^3(w)}\cdot(S^2(\varepsilon)-S^2(w))$$

Die Constante d wird in diesem Falle durch die quadratische Gleichung

$$\frac{1}{d-a}+\frac{3}{d-b}+\frac{1}{d-c}=0$$

bestimmt. Führt man hier die elliptischen Functionen ein, so erhält man für $S^2(\varepsilon)$ die Gleichung

$$1+\frac{3}{D^2(\varepsilon)}+\frac{1}{C^2(\varepsilon)}=0$$

oder

$$5-2(2+k^2)S^2(\varepsilon)+k^2S^4(\varepsilon)=0$$

Diese Gleichung führt auf

$$\varrho^2=4-k^2+k^4,$$

wo ϱ positiv verstanden wird, und man hat

$$S(\varepsilon)=\frac{1}{k}\cdot\sqrt{2+k^2+\varrho};\quad C(\varepsilon)=\frac{i}{k}\cdot\sqrt{2+\varrho};$$

$$D(\varepsilon)=i\,.\sqrt{1+k^2+\varrho};$$

$$\frac{1}{S(\varepsilon)}=\frac{k}{l\sqrt{3}}\cdot\sqrt{\varrho-1-k^2};\quad \frac{1}{C(\varepsilon)}=\frac{i}{l}\cdot\sqrt{2-\varrho};$$

$$\frac{1}{D(\varepsilon)}=\frac{1}{l\sqrt{3}}\cdot\sqrt{1+k^2-\varrho}$$

für ε' hat man die Formeln

$$S(\varepsilon')=\frac{1}{k}\cdot\sqrt{2+k^2-\varrho};\quad C(\varepsilon')=\frac{i}{k}\cdot\sqrt{2-\varrho};$$

$$D(\varepsilon)=i\sqrt{1+k^2-\varrho};$$

$$\frac{1}{S(\varepsilon')}=\frac{k}{l\sqrt{3}}\cdot\sqrt{-\varrho-1-k^2};\quad \frac{1}{C(\varepsilon')}=\frac{i}{l}\cdot\sqrt{2+\varrho};$$

$$\frac{1}{D(\varepsilon')}=\frac{1}{l\sqrt{3}}\cdot\sqrt{1+k^2+\varrho}$$

aus diesen Formeln folgt, dass

$$S(\varepsilon)\,.\,S(\varepsilon')=\frac{\sqrt{5}}{k};\quad C(\varepsilon)\,C(\varepsilon')=-\frac{l}{k};\quad D(\varepsilon)\,.\,D(\varepsilon')=-i\sqrt{3}\,l$$

Für die Lamé'sche Function $T(x)$ erhält man in diesem Falle den Ausdruck

$$T(x)=7(x-d)\sqrt{x-b}\,.\,\tfrac{1}{2}\int_x^\infty\frac{dz}{(z-d)^2\,(z-b)\sqrt{\Pi(z-a)}}$$

$$-\frac{7}{(c-a)^2}\cdot\frac{S^2(\varepsilon)\,D(w)}{S^3(w)}\cdot(S^2(\varepsilon)-S^2(w))\int_0^w\frac{S^6(u)\,du}{D^2(w)(S^2(\varepsilon)-S^2(w))^2}$$

Um dieses Integral auszuwerten, setze man wie früher

$$p = S^2(u) - S^2(\varepsilon)$$

dann ist

$$\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{S(u) \, . \, C(u) \, . \, D(u)}{p}\right) = k^2 p - \frac{1 - 2(1+k^2) S^2(\varepsilon) + 3k^2 S^4(\varepsilon)}{p}$$
$$- 2 \, . \, \frac{S^2(\varepsilon) \, . \, C^2(\varepsilon) \, . \, D^2(\varepsilon)}{p^2}$$

und weil

$$\frac{S^6(u)}{D^2(u)\,(S^2(\varepsilon) - S^2(u))^2} = -\frac{1}{k^2} + \frac{1}{k^2 D^4(\varepsilon)} \cdot \frac{1}{D^2(u)}$$
$$+ \frac{S^4(\varepsilon)(1 + 2D^2(\varepsilon))}{D^4(\varepsilon)} \cdot \frac{1}{p} + \frac{S^6(\varepsilon)}{D^2(\varepsilon)} \cdot \frac{1}{p^2}$$

so hat man

$$2C^2(\varepsilon)\, D^4(\varepsilon) \cdot \frac{S^6(u)}{D^2(u) \, . \, (S^2(\varepsilon) - S^2(u))^2} + S^4(\varepsilon) \cdot \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{Su \, . \, Cu \, . \, Du}{p}\right)$$
$$= k^2 S^4(\varepsilon) p - 2\frac{C^2(\varepsilon) \, . \, D^4(\varepsilon)}{k^2} + 2\,\frac{C^2(\varepsilon)}{k^2} \cdot \frac{1}{D^2(u)}$$
$$+ \frac{S^4(\varepsilon)}{p}\,(5 - 2(2+k^2) S^2(\varepsilon) + k^2 S^4(\varepsilon))$$

Ersetzt man hier $\frac{l^2}{D^2(u)}$ durch $D^2(u) - k^2 \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{Su \, . \, Cu}{Du}\right)$ und wendet die Relation

$$5 - 2(2+k^2) + k^2 S^4(\varepsilon) = 0$$

mehrfach an, so erhält man

$$2C^2(\varepsilon) \, . \, D^4(\varepsilon) \cdot \frac{S^6(u)}{D^2(u) \, . \, (S^2(\varepsilon) - S^2(u))^2} + S^4(\varepsilon)\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{Su \, . \, Cu \, . \, Du}{p}\right)$$
$$= \frac{D^2(\varepsilon)}{k^2}\,(3 - 2S^2(\varepsilon)) + \frac{1}{k^2 l^2}\,(7 - 5k^2 - 2(3 - k^2 - k^4)\, S^2(\varepsilon))\, D(u)$$
$$-2\frac{C^2(\varepsilon)}{l^2}\,\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{Su \, . \, Cu}{Du}\right)$$

und somit ist

$$T(x) = \frac{7}{2(c-a)^2 k^2 l^2} \cdot \frac{S^2(\varepsilon)}{C^2(\varepsilon) \, . \, D^4(\varepsilon)} \cdot \frac{D(w)}{S^3(w)}$$
$$. \, (S^2(\varepsilon) - S^2(w))\Big[k^2 l^2 \, . \, S^4(\varepsilon) \, . \, \frac{Sw \, . \, Cw \, . \, Dw}{S^2(\varepsilon) - S^2(w)} - k^2\, C^2(\varepsilon)\,\frac{Sw \, . \, Cw}{Dw}$$
$$+ l^2 D^2(\varepsilon))(3 - 2S^2(\varepsilon)) \times w + (7 - 5k^2 - 2(3 - k^2 - k^4)\, S^2(\varepsilon))\, E \operatorname{am} w\Big]$$

3) $(\alpha, \beta, \gamma) = (0, 0, \frac{1}{2}), v = 1.$

In diesem Falle ist

$$P(x) = (x-d)\sqrt{x-c}$$
$$= (c-a)^{3/2} \cdot \frac{d-c}{c-a} \cdot \frac{x-c}{c-a} \cdot \left(\frac{c-a}{d-c} - \frac{c-a}{x-c}\right)\sqrt{\frac{x-c}{c-a}}$$

führt man hier die elliptischen Functionen ein, so erhält man

$$P(x) = (c-a)^{3/2} \frac{C(w)}{S_1^2(\varepsilon) \cdot S^3(w)} (S^2(\varepsilon) - S^2(w))$$

für die Constante d hat man in diesem Falle die quadratische Gleichung

$$\frac{1}{d-a} + \frac{1}{d-b} + \frac{3}{d-c} = 0$$

die nun für $S^2(\varepsilon)$ folgende Relation liefert:

$$1 + \frac{3}{C^2(\varepsilon)} + \frac{1}{D^2(\varepsilon)} = 0$$

oder auch

$$5 - 2(1+2k^2) S^2(\varepsilon) + k^2 S^4(\varepsilon) = 0$$

Setzt man hier

$$\varrho^2 = 1 - k^2 + 4k^4$$

und versteht ϱ positiv, so folgt

$$S(\varepsilon) = \frac{1}{k} \cdot \sqrt{1+2k^2+\varrho}; \quad C(\varepsilon) = \frac{i}{k} \cdot \sqrt{1+k^2+\varrho};$$
$$D(\varepsilon) = i\sqrt{2k^2+\varrho};$$

$$\frac{1}{S(\varepsilon)} = \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \sqrt{1+2k^2-\varrho}; \quad \frac{1}{C(\varepsilon)} = -\frac{i}{\sqrt{3}} \cdot \sqrt{1+k^2-\varrho};$$
$$\frac{1}{D(\varepsilon)} = -\frac{1}{l} \cdot \sqrt{2k^2-\varrho};$$

$$S(\varepsilon') = \frac{1}{k} \cdot \sqrt{1+2k^2-\varrho}; \quad C(\varepsilon') = \frac{i}{k} \cdot \sqrt{1+k^2-\varrho};$$
$$D(\varepsilon') = i\sqrt{2k^2-\varrho};$$

$$\frac{1}{S(\varepsilon')} = \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \sqrt{1+2k^2+\varrho}; \quad \frac{1}{C(\varepsilon')} = -\frac{i}{\sqrt{3}} \cdot \sqrt{1+k^2+\varrho};$$
$$\frac{1}{D(\varepsilon')} = -\frac{1}{l} \cdot \sqrt{2k^2+\varrho};$$

$$S(\varepsilon)\,.\,S(\varepsilon') = \frac{\sqrt{5}}{k}; \quad C(\varepsilon)\,.\,C(\varepsilon') = -\frac{l}{k}\,.\,\sqrt{3};$$
$$D(\varepsilon)\,.\,D(\varepsilon') = -il$$

Nun soll die Lamé'sche Function zweiter Art dargestellt werden.

Es ist

$$T(x) = 7\,(x-d)\sqrt{x-c}\;\tfrac{1}{2}\int_x^\infty \frac{dz}{(z-d)^2(z-c)\;\sqrt{\Pi\,(z-a)}}$$

$$-\frac{7}{(c-a)^2}\,.\,\frac{S^2(\varepsilon)\,.\,C(w)}{S^3(w)}\,(S^2(\varepsilon)-S^2(w))\,.\int_0^w \frac{S^6(u)\,.\,du}{C^2(u)\,.\,(S^2(u)-S^2(\varepsilon))^2}$$

Weil nach früherem

$$\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{Su\,.\,Cu\,.\,Du}{p}\right) = k^2 p - \frac{1-2(1+k^2)S^2(\varepsilon)+3k^2 S^4(\varepsilon)}{p}$$
$$-2\,.\,\frac{S^2 2(\varepsilon)\,.\,C^2(\varepsilon)\,.\,D^2(\varepsilon)}{p^2}$$

und da

$$\frac{S^6(u)}{C^2(u)\,.\,(S^2(\varepsilon)-S^2(u))} = -1+\frac{1}{C^4(\varepsilon)\,.\,C^2(u)}$$
$$+\frac{S^4(\varepsilon)}{C^4(\varepsilon)}(1+2C^2(\varepsilon))\frac{1}{p}+\frac{S^6(\varepsilon)}{C^4(\varepsilon)}\,.\,\frac{1}{p^2}$$

so erhält man

$$2C^4(\varepsilon)\,.\,D^2(\varepsilon)\,.\,\frac{S^6(u)}{C^2(u)\,.\,(S^2(\varepsilon)-S^2(u))^2}+S^4(\varepsilon)\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{Su\,.\,Cu\,.\,Du}{p}\right)$$
$$= k^2p\,.\,S^4(\varepsilon) - 2C^4(\varepsilon)\,.\,D^2(\varepsilon)+2\,\frac{D^2(\varepsilon)}{C^2(u)}$$
$$+\frac{S^4(\varepsilon)}{p}(5-2(1+2k^2)S^2(\varepsilon)+k^2 S^4(\varepsilon))$$

Wird $\frac{l^2}{C^2(\varepsilon)}$ durch $\frac{\partial}{du}\left(\frac{Su\,.\,Du}{C(u)}\right)+l^2-D^2(u)$ ersetzt, so kann man diesem Ausdrucke mit Hülfe der Relation

$$5-2(1+2k^2)S^2(\varepsilon)+k^2S^4(\varepsilon) = 0$$

auch folgende Form geben:

$$2C^4(\varepsilon)\,.\,D^2(\varepsilon)\,.\,\frac{S^6(u)}{C^2(u)\,.\,(S^2(\varepsilon)-S^2(u))^2}+S^4(\varepsilon)\,\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{Su\,.\,Cu\,.\,Du}{p}\right)$$
$$= D^2(\varepsilon)\,S^2(\varepsilon)(4-S^2(\varepsilon))+\frac{1}{k^2 l^2}(5-7k^2-2(1+k^2-3k^4)S^2(\varepsilon))\,.\,D^2(u)$$
$$+2\frac{D^4(\varepsilon)}{l^2}\,.\,\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{Su\,.\,Du}{Cu}\right)$$

Schliesslich wird

$$T(x) = \frac{7}{2(c-a))^2 k^2 l^2} \cdot \frac{S^2(\varepsilon)}{C^4(\varepsilon) \, . \, D^2(\varepsilon)} \cdot \frac{C(w)}{S^3(w)}$$

$$. \, (S^2(\varepsilon) - S^2(w)) \Big[k^2 l^2 (S^4(\varepsilon)) \, . \, \frac{Sw \, . \, Cw \, . \, Dw}{S^2\varepsilon - S^2(w)}$$

$$+ k^2 l^2 D^2(\varepsilon) S^2(\varepsilon) (4 - S^2(\varepsilon)) w + (5 - 7k^2 - 2(1 + k^2 - 3k^4) S^2(\varepsilon)) E \operatorname{am} w$$

$$+ 2k^2 D^2(\varepsilon) \, . \, \frac{Sw \, . \, Dw}{Cw} \Big]$$

4) $(\alpha, \beta, \gamma) = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}), \ v = 1.$

Man hat sogleich

$$P(x) = \sqrt{(x-a)(x-b)(x-c)} = (c-a)^{3/2} \, . \, \frac{C(w) \, . \, D(w)}{S^3(w)}$$

und

$$T(x) = 7 \sqrt{(x-a)(x-b)(x-c)} \, \tfrac{1}{2} \int_x^\infty \frac{dz}{(z-a)(z-b)(z-c) \sqrt{\Pi(z-a)}}$$

$$= \frac{7}{(c-a)^2} \cdot \frac{C(w) \, . \, D(w)}{S^3(w)} \int_0^w \frac{S^6 u}{C^2 u \, . \, D^2 u} \, . \, du$$

Nun ist

$$k^4 l^4 \frac{S^6 u}{C^2 u \, . \, D^2 u} = l^2 (1 + l^2) - k^4 \left(- \frac{l^2 S^2 u}{C^2 u} \right) - \frac{l^2}{D^2 u} - l^4 D^2$$

folglich

$$T(x) = \frac{7}{(c-a)^2 k^4 l^4} \cdot \Big\{ \frac{C(w) \, . \, D(w)}{S^3(w)} [l^2 (1 + l^2) w - 2(1 - k^2 + k^4) E \operatorname{am} w]$$

$$+ k^2 \frac{D^2(w)}{S^2(w)} + k^2 \frac{C^2(w)}{S^2(w)} \Big\}$$

Die Lamé'sche Function zweiter Art soll eine andere Darstellung erhalten, die sich von $T(x)$ nur durch einen constanten Factor unterscheidet.

Es sei

$$P(x) = \Pi (x-a)^{1/2 - \alpha} f(x)$$

dann ist

$$f(x) = \Pi (x-a)^{2\alpha - 1/2} Q(x)$$

und wird in der Nähe von $x = a$, wenn $\alpha = 0$, gross von der Ordnung $\frac{1}{\sqrt{x-a}}$; wenn $\alpha = \frac{1}{2}$, klein wie $\sqrt{x-a}$; ähnlich wie bei b und c. Daher convergiren die zwei Integrale

$$\int_a^b f(x)\,dx, \quad \int_b^c f(x)\,dx$$

Nun soll die Differentialgleichung für $P(x)$ in eine solche für $f(x)$ verwandelt werden. Bekanntlich genügt $P(x)$ der Gleichung:

$$\frac{1}{P(x)} \cdot \frac{\partial^2 P}{\partial t^2} = n(n+1)x + D$$

Es ist

$$\frac{\partial P}{\partial t} = 2\Pi(x-a)^{1-\alpha} \cdot \frac{\partial f(x)}{\partial x} + \Pi(x-a)^{1-\alpha} \times \Sigma \frac{1-2\alpha}{x-a} \cdot f(x)$$

Statt mit $\frac{1}{P} \cdot \frac{\partial}{\partial t}$ behandle man den Ausdruck mit

$$\frac{f}{4P} \cdot \frac{\partial}{\partial t} = \frac{1}{2}\Pi(x-a)^{\alpha} \cdot \frac{\partial}{\partial x} = \text{Op.}$$

Op. (erster Term)

$$= \Pi(x-a)\frac{\partial^2 f(x)}{\partial x^2} + \Pi(x-a) \cdot \Sigma\frac{1-\alpha}{x-a} \cdot \frac{\partial f}{\partial x}$$

Der zweite Term des Ausdruckes für $\frac{\partial P}{\partial t}$ sei $M \cdot f(x)$. Um Op. M zu finden, schreibe man

$$\begin{aligned} M = {} & (1-2\alpha)(x-a)^{-\alpha}(x-b)^{1-\beta}(x-c)^{1-\gamma} \\ & + (1-2\beta)(x-a)^{1-\alpha}(x-b)^{-\beta}(x-c)^{1-\gamma} \\ & + (1-2\gamma)(x-a)^{1-\alpha}(x-b)^{1-\beta}(x-c)^{-\gamma} \end{aligned}$$

vollständig hin. In Op. M bekommt $(x-a)^{-1}(x-b)(x-c)$ den Coeff.

$$-\tfrac{1}{2}\alpha(1-2\alpha) = 0$$

$x - a$ den Coeff.

$$\tfrac{1}{2}(1-2\beta)(1-\gamma) + \tfrac{1}{2}(1-2\gamma)(1-\beta) = 1 - \tfrac{3}{2}(\beta+\gamma) + 2\beta\gamma$$

Weil

$$-\tfrac{3}{2}(\beta+\gamma) = -2(\beta+\gamma) + \tfrac{1}{2}(\beta+\gamma) = -2(\beta+\gamma) + \beta^2 + \gamma^2$$

so ist der Coeff. von $x - a$ gleich

$$1-2(\beta+\gamma)+\beta^2+2\beta\gamma+\gamma^2=-(1-\beta-\gamma)^2$$

also ist

$$\text{Op. } M=\Sigma(1-\beta-\gamma)^2(x-a)$$

folglich

Op. (zweiter Term)

$$=\tfrac{1}{2}\Pi(x-a)\,.\,\Sigma\frac{1-2\alpha}{x-a}\,.\,\frac{\partial f(x)}{\partial x}+\Sigma(1-\beta-\gamma^2(x-a)\,.\,f(x)$$

Daher ist

$$\frac{f}{4P}\cdot\frac{\partial^2 P}{\partial t^2}=\Pi(x-a)\,.\,\frac{\partial^2 f(x)}{\partial x^2}+\tfrac{1}{2}\Pi(x-a)\Sigma\frac{3-4\alpha}{x-a}\,.\,\frac{\partial f(x)}{\partial x}$$
$$+\Sigma(1-\beta-\gamma)^2(x-a)\,.\,f(x)=\tfrac{1}{4}(n(n+1)x+E)\,.\,f(x)$$

Man hat nun für f als Function der unabhängigen Variabeln x eine homogene Differentialgl. zweiter Ordnung gewonnen, worin die Coefficienten der Abgeleiteten ganze Functionen resp. dritten, zweiten, ersten Grades von x sind. Bezeichnet man die drei Coeff der Kürze wegen mit

$$\varphi(x)=\Pi(x-a);\quad \chi(x)=\tfrac{1}{2}\Pi(x-a)\,.\,\Sigma\frac{3-4\alpha}{x-a};$$
$$\psi(x)=\Sigma(1-\beta-\gamma)^2(x-a)-\tfrac{1}{4}(n(n+1)x+E)$$

so genügt $f(x)$ der Gleichung:

$$\nabla f=\varphi(x)\,.\,\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\chi(x)\,.\,\frac{\partial f}{\partial x}+\psi(x)\,.\,f=0$$

Es sei nun

$$V=\int\frac{f(z)}{x-z}\,dz$$

mit constanten Grenzen, die nicht von x abhangen, und vorläufig mit keinem der drei Punkte a, b, c zusammen fallen sollen. Man will $\nabla V(x)$ berechnen. Weil

$$\frac{\partial}{\partial x}\,.\,\frac{1}{x-z}=-\frac{\partial}{\partial z}\,.\,\frac{1}{x-z}$$

so ist

$$\frac{\partial V(x)}{\partial x}=\int-\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{x-z}\right).f(z)\,dz=-\left\{\frac{f(z)}{x-z}\right\}+\int\frac{f'(z)}{x-z}\,dz$$

Weil auch

$$\frac{\partial}{\partial x}\,.\int\frac{f'(z)}{x-z}\,dz=-\left\{\frac{f'(z)}{x-z}\right\}+\int\frac{f''(z)}{x-z}\,dz$$

so ist

$$\frac{\partial^2 V(x)}{\partial x^2} = \left\{\frac{f(z)}{(x-z)^2} - \frac{f'(z)}{x-z}\right\} + \int \frac{f''(z)}{x-z}\,dz$$

Wenn man nun ∇V hinschreibt, so setze man, um die Differentialgl. anwenden zu können, unter dem Integrationszeichen

$$\varphi(x) = \varphi(z) + (\varphi(x) - \varphi(z)), \text{ etc.}$$

und beachte, dass

$$\int (\varphi(z) f''(z) + \chi(z)\,.\,f'(z) + \psi(z) f(z))\frac{dz}{x-z} = 0$$

Dann findet man:

$$\nabla V(x) = \left\{\frac{\varphi(x)\,.\,f(z)}{(x-z)^2} - \frac{\varphi(x)\,.\,f'(z) + \chi(x)\,.\,f(z)}{x-z}\right\}$$
$$+ \int \frac{\varphi(x) - \varphi(z)}{x-z}\,.\,f''(z)\,dz + \int \frac{\chi(x) - \chi(z)}{x-z}\,.\,f'(z)\,dz$$
$$+ \int \frac{\psi(x) - \psi(z)}{x-z}\,.\,f(z)\,dz, \quad (\text{sei} = (0) + (\mathrm{I}) + (\mathrm{II}) + (\mathrm{III})).$$

Die Brüche unter den Integrationszeichen sind der Reihe nach ganze Functionen zweiten, ersten Grades und eine Constante. Daher sind

$$\frac{\partial^2}{\partial z^2}\,.\,\frac{\varphi(x) - \varphi(z)}{x-z}, \quad \frac{\partial}{\partial z}\,.\,\frac{\chi(x) - \chi(z)}{x-z}$$

Constante. Verwandelt man (I) durch zweimalige, (II) durch einmalige partielle Integration, so ergeben sich die Gleichungen:

$$(\mathrm{I}) = \left\{\frac{\varphi(x) - \varphi(z)}{x-z}\,.\,f'(z) - \frac{\varphi(x) - \varphi(z)}{(x-z)^2}\,.\,f(z) + \frac{\varphi'(z)\,.\,f(z)}{x-z}\right\}$$
$$+ \frac{\partial^2}{\partial z^2}\left(\frac{\varphi(x) - \varphi(z)}{x-z}\right)\,.\int f(z)\,dz;$$

$$(\mathrm{II}) = \left\{\frac{\chi(x) - \chi(z)}{x-z}\,.\,f(z)\right\} - \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\chi(x) - \chi(z)}{x-z}\right)\,.\int f(z)\,dz$$

Also ist

$$\nabla V(x) = \left\{\frac{\varphi'(z)\,.\,f(z)}{(x-z)^2} - \frac{\varphi(z) f'(z) + (\chi(z) - \varphi'(z)) f(z)}{x-z}\right\}$$
$$+ \left[\frac{\partial^2}{\partial z^2}\,\frac{\varphi(x) - \varphi(z)}{x-z} - \frac{\partial}{\partial z}\,\frac{\chi(x) - \chi(z)}{x-z} + \frac{\psi(x) - \psi(z)}{x-z}\right]\,.\int f(z)\,dz$$

Der Factor des Integrals ist eine Constante und werde mit M bezeichnet. Man untersuche den Functionsunterschied $\{\,.\;.\;.\,\}$ in $z = a$, um zu sehen, ob hier vielleicht eine passende Grenze sich

findet. Man wird dann sogleich erfahren, was aus $\{\,.\;.\;.\,\}$ in $z = b$, c wird. Der Wunsch ist, diesen Functionsunterschied zu null zu machen. Welchen Wert hat also der Ausdruck

$$\frac{\varphi(z)\,.\,f(z)}{(x-z)^2} - \frac{\varphi(z)\,.\,f'(z) + (\chi(z) - \varphi'(z))\,.\,f(z)}{x-z}$$

in $z = a$? Es sei $z = a + h$, h sehr klein. Weil

$$\varphi(z)\,.\,f(z) = \Pi(z-a)^{2\alpha+\frac{1}{2}}\,.\,Q(z)$$

so verschwindet $\varphi(z)\,.\,f(z)$ jedenfalls. 1°. Wenn $\alpha = 0$, so ist

$f(z) = Ah^{-1|2} + Bh^{1|2} + \ldots$, $f'(z) = -\frac{1}{2}Ah^{-3|2} + \ldots$,
$\varphi(z) = (b-a)(c-a)h + \ldots$, $\varphi'(z) = (b-a)(c-a) + \ldots$,
$\chi(z) = \frac{3}{2}(b-a)(c-a) + \ldots$; also
$\varphi(z)\,f'(z) = -\frac{1}{2}A(b-a)(c-a)h^{-1|2} + \ldots$,
$\chi(z) - \varphi'(z) = \frac{1}{2}(b-a)(c-a) + \ldots$,
$[\chi(z) - \varphi'(z)]\,f(z) = \frac{1}{2}A(b-a)(c-a)h^{-1|2} + \ldots$.

Der zweite Term ist daher mindestens klein von der Ordnung $h^{1|2}$, verschwindet also in $z = a$. 2°. Wenn $\alpha = \frac{1}{2}$, so ist

$$f(z) = Ah^{1|2} + \ldots,\quad f'(z) = \tfrac{1}{2}Ah^{-1|2} + \ldots,$$
$$\chi(z) = \tfrac{1}{2}(b-a)(c-a) + \ldots,$$

$\varphi(z)\,.\,f'(z)$ verschwindet,

$$\chi(z) - \varphi'(z) = -\tfrac{1}{2}(b-a)(c-a) + \ldots,$$

ist endlich, $f(z)$ verschwindet. Der Ausdruck verschwindet demnach auch in $z = a$: er verschwindet somit überhaupt in $z = a$, b, c. Die passenden Grenzen, für welche der Functionsunterschied wegfällt, sind gefunden; das eine Mal integrire man über $a < z < b$, das andere Mal über $b < z < c$. Man setze nun

$$V_1 = \int_a^b \frac{f(z)}{x-z}\,dz,\qquad V_2 = \int_b^c \frac{f(z)}{x-z}\,dz,$$

$$U_1 = \int_a^b f(z)\,dz,\qquad U_2 = \int_b^c f(z)\,dz$$

Dann gelten die zwei Differentialgl.

$$\nabla V_1(x) = M\,.\,U_1;\quad \nabla V_2(x) = M\,.\,U_2,$$

die nicht mehr homogen sind, sondern eine Constante als rechte Seite haben. Noch ist M zu berechnen. Weil

$$\frac{x^3 - z^3}{x - z} = x^2 + xz + z^2$$

so ist

$$\frac{\partial^2}{\partial z^2} \cdot \frac{\varphi(x) - \varphi(z)}{x - z} = 2$$

Der höchste Term in $\chi(x)$ ist

$$\left(\frac{9}{2} - 2\Sigma\alpha\right) . x^2, \qquad \frac{x^2 - z^2}{x - z} = x + z$$

folglich

$$-\frac{\partial}{\partial z} \cdot \frac{\chi(x) - \chi(z)}{z - z} = -\frac{9}{2} + 2\Sigma\alpha$$

Endlich ist

$$\frac{\psi(x) - \psi(z)}{x - z} = \Sigma(1 - \beta - \gamma)^2 + \tfrac{1}{4}n(n+1) = 3 - 4\Sigma\alpha + 2\Sigma\alpha^2 + 2\Sigma\beta\gamma$$
$$- \tfrac{1}{4}n(n+1) = 3 - \tfrac{7}{2} . \Sigma\alpha + (\Sigma\alpha)^2 - \tfrac{1}{4}n(n+1)$$

Daher

$$M = \tfrac{1}{2} - \tfrac{3}{2} . \Sigma\alpha + (\Sigma\alpha)^2 - \tfrac{1}{4}n(n+1) = \tfrac{1}{2}(1 - \Sigma\alpha)(1 - 2\Sigma\alpha) - \tfrac{1}{4}n(n+1)$$

Weil

$$\frac{n}{2} = v + \Sigma\alpha$$

also

$$\frac{n(n+1)}{4} = (v + \Sigma\alpha)(v + \Sigma\alpha + \tfrac{1}{2})$$

so ist

$$M = -(v+1)(v + 2\Sigma\alpha - \tfrac{1}{2})$$

und es bestehen die zwei Differentialgleichnngen

$$\varphi(x)\frac{\partial^2 V_1}{\partial x^2} + \chi(x) . \frac{\partial V_1}{\partial x} + \psi(x) V_1 = MU_1,$$

$$\varphi(x)\frac{\partial^2 V_2}{\partial x^2} + \chi(x) . \frac{\partial V_2}{\partial x} + \psi(x) V_2 = MU_2$$

Mnltiplicirt man dieselben und addirt, so sieht man, dass $U_1 V_2(x) - U_2 V_1(x)$ derselhen Differentialgl. wie $f(x)$, folglich

II. $$W(x) = \Pi(z - a)^{1/2 - \alpha}(U_1 V_2(x) - U_2 V_1(x))$$

derselhen Differentialgl. wie $P(x)$ genügt, dass nämlich

$$\frac{\partial^2 W}{\partial t^2} = (n(n+1)x + E) W$$

denkt man sich z sehr gross, so ist

$$V_1(x) = \frac{U_1}{x} + \frac{1}{x^2}\int_a^b z f(z)\, dz + \ldots,$$

$$V_2(x) = \frac{U_2}{x} + \frac{1}{x^2}\int_b^c z f(z)\, dz + \ldots,$$

also $U_1 V_2(x) - U_2 V_1(x)$ mindestens von der Ordnung $\frac{1}{x^3}$ des sehr kleinen. Da aher der Exponent $\frac{3}{2} - \Sigma\alpha$ nur der Werte $\frac{3}{2}$, 1, $\frac{1}{2}$, 0 fähig ist, so ist $W(x)$ mindestens von der Ordnüng $x^{-1/2}$ der Kleinheit. Die Fnnction $W(x)$ kann daher nicht mit

$$P(x) = x^{\frac{n}{2}} + \ldots$$

znsammenfallend gedacht werden, sondern sie nnterscheidet sich von der Lamé'schen Fnnction $T(x)$ zweiter Art nnr dnrch einen constanten Factor nnd ist in Wirklichkeit von der Ordnnng $x^{-1/2(n+1)}$ der Kleinheit, wenn x sehr gross wird. Heine hezeichnet diese Constante mit k und nennt sie eine nnmerisehe, sagt aher in seinen Arbeiten über die Art ihrer Berechnnng kein Wort. Ich habe schon ohen bemerkt, dass diese Benennung Heines nicht zutreffend ist, da sie in Wirklichkeit bei ihm eine algebraische Funct. von b^2 nnd c^2 ist. Will man nun nach Formel II. din Fnnction $W(x)$ in elliptische Integrale umsetzen, um durch Vergleichung mit den entsprechenden Ausdrücken von $T(x)$ die fragliche Constaute zu erkennen, so wird die Rechnnng je weilen durch das Auftreten der beiden Perioden des elliptischen Integrales dritter Art sehr erschwert. Ich will nnn der Fnnetion $W(x)$ noch eine andere Gestalt gehen, welche die Umsetznng in elliptische Integrale in so fern erleichtert, als man nicht genötigt wird, beide Perioden des ellipt. Integrales dritter Art zn herechnen.

Stellt man im Ausdrucke für $W(x)$ den Factor $\Pi(z-a)^{1/2-\alpha}$ bei Seite, so kann man den Multiplicand $U_1 V_2(x) - U_2 V_1(x)$ als Doppelintegral auffassen. Es gilt, dieses Doppelintegral in die Form eines einfachen Integrales zu hringen. Statt der Integrale U_1, U_2 mit geradlinigem Wege habe ich solche mit krummlinigem geschlossenen Wege, die sieh resp. in eine Doppelgerade von a his b nnd zurück, von b nach c nnd zurück, verwandeln lassen. Da ich über eine entsprechende Integrationsfuuction mlt heweglicher obern Grenze verfügen muss, so setze ich

$$\frac{\partial U(z)}{\partial z} = \tfrac{1}{2} f(z) = \tfrac{1}{2} \Pi (z-a)^{\alpha - 1|2} \,.\, P(z) = \tfrac{1}{2} \Pi (z-a)^{2\alpha - 1|2} \,.\, Q(z)$$

Da 2α, 2β, 2γ ganze Zahlen (0 oder 1) sind, folglich $\Pi(z-a)^{2\alpha}$. $Q(z)$ eine ganze Function ist, so ist alle Irrationalität in der einzigen Quadratwurzel $\sqrt{(z-a)(z-b)(z-c)}$ vereinigt; daher reicht ein zweiblättriges Feld, in dem eine Uebergangslinie von $-N$ nach a, eine andere von b nach c gezogen ist, zur Aufnahme der Function $U(z)$ hin, und U_1, U_2 erscheinen als die zwei Perioden derselben. Wo sie verschwinde ist gleichgültig; man kann allenfalls $z = c$ als untere Grenze des Integrals $U(z)$ annehmen, damit, wenn z sich nur in der Realitätslinie des ersten Blattes von c gegen N hin bewegt, $\frac{\partial U(z)}{\partial z}$, folglich auch $U(z)$ stets positiv seien. (Denn $Q(z)$ ist dann pos., weil alle Wurzeln der Gleichung

$$Q(z) = 0$$

unterhalb c liegen). Die Variabele x liege weit östlich von c in der Realitätslinie und es sei

$$dZ = \tfrac{1}{2}\Pi(x-a)^{1|2-\alpha} dV = \Pi(x-a)^{1|2-\alpha} \frac{dU}{x-z}$$

$$= \tfrac{1}{2}\Pi\left(\frac{x-a}{z-a}\right)^{1|2-\alpha} \frac{P(z)}{x-z} dz$$

Man betrachte das Integral $\int UdZ$ (Weg wie in Fig. 2).

Ich habe den Weg geschlossen, weil U wirklich auf denselben Wert zurückkehrt, was sogleich gezeigt werden soll, und weil es sich von $\frac{\partial Z}{\partial z}$ von selbst versteht. Man denke sich nämlich den Weg auf die Realitätslinie und um die Punkte a und c zusammengezogen. Die Punkte C, C' des ersten Blattes zwischen a und b fallen dann zusammen, und, weil die durchgehenden Wegesteile entgegengesetzte Richtung haben, so heben die ihnen entsprechenden Incremente der Function U einander auf; dasselbe gilt von den zwei Wegesteilen ab im unteren Blatte. Der Punkt B des ersten Blattes ist mit dem Punkte B' des zweiten Blattes durch die Uebergangslinie hindurch in unmittelbare Verbindung gesetzt, die Incremente der Function U, die den entgegengesetzt gerichteten Wegesteilen bc durch B und B' entsprechen, heben einander auf; und dasselbe gilt von den zwei noch übrigen Wegesteilen bc. Der Weg ist also geschlossen. In der Figur 1. habe ich den Integrationsweg entfernt von der Reali-

tätslinie gezeichnet, nur um die Vorzeichen von $\frac{1}{\sqrt{(z-a)(z-b)(z-c)}}$ jeweilen an der Aussenseite der Wegesteile anbringen zu können, denke mir aber den Weg, wie gesagt, auf die Realitätslinie zusammen gedrängt. Für die halben Perioden

$$\tfrac{1}{2}U_1 = \int_{z=a}^{z=b} dU, \quad \tfrac{1}{2}V_1 = \int_{z=a}^{z=b} \frac{dU}{x-z}$$

sei der Weg $a\zeta b$ (Vorzeichen 1) massgebend und für

$$\tfrac{1}{2}U_2 = \int_{z=b}^{z=c} dU, \quad \tfrac{1}{2}V_2 = \int_{z=b}^{z=c} \frac{dU}{x-z}$$

der Weg $b\beta c$ (Vorzeichen i). Auf dem Wege von b über ε und ζ zurück nach b (natürlich westlich von a durch die Uebergangslinie hindurch; ich werde später kurz „Weg $b\varepsilon\zeta b$" sagen, womit zugleich die Richtung des Weges angezeigt ist) gewinnt die Function $U(z)$ die ganze Periode U_1; wenn ihr Wert in α mit u bezeichnet wird, so beträgt derselbe in β nun U_1+u. In β ist das Wegelement dz positiv, in α negativ. Daher fällt auf bc für die zwei durch α und β gehenden Strecken als Teil des Integrals $\int UdZ$ der Betrag

$$\Pi(x-a)^{1/2-\alpha} \cdot \frac{U_1 V_2}{2}$$

In ε hat die Function U das Vorzeichen -1; sie gewinnt daher auf dem Wege $b\eta\theta b$ die entgegengesetzte Periode $-U_1$; wenn sie in γ den Wert u' hatte, so bekommt sie in δ den Wert $-U+u'$. Auch $\frac{\partial Z}{\partial z}$ hat in γ und δ das frühere Vorzeichen i mit $-i$ vertauscht; daher fällt auf bc für die zwei Wegstrecken durch γ und δ wieder der Betrag

$$\Pi(x-a)^{1/2-\alpha} \cdot \tfrac{1}{2}U_1 V_2$$

für alle vier Strecken bc der Betrag

$$\Pi(x-a)^{1/2-\alpha} \cdot U_1 V_2$$

Wenn z den Weg $b\alpha\delta b$ (natürlich frei um c herum) zurück legt, so gewinnt die Function U die Periode U_2; wenn sie in ε den Wert u hatte, so bekommt sie in θ den Wert U_2+u. Weil in ε und θ für $\frac{\partial Z}{\partial z}$ das Vorzeichen -1 gilt, so entfällt

$$-\Pi(x-a)^{1/2-\alpha}\,.\,\tfrac{1}{2}U_2V_1$$

als Anteil des Integrals $\int UdZ$ auf die zwei durch ε und θ geführten Strecken ab. Auf dem Wege $b\beta\gamma b$ wird U_2 von der Function U_2 gewonnen; wenn ihr Wert in η mit u' bezeichnet wird, so beträgt derselbe in ζ nur $-U_1+u'$. In beiden Punkten, ζ und η, hat $\frac{\delta Z}{\partial z}$ das zugehörige Vorzeichen 1; daher fällt auf die zwei durch η und ζ gehenden Strecken

$$-\Pi(x-a)^{1/2-\alpha}\,.\,\tfrac{1}{2}U_2V_1$$

als Anteil des Integrals $\int UdZ$; für alle vier Strecken ab, somit

$$-\Pi(x-a)^{1/2-\alpha}\,.\,U_2V_1$$

Also ist

$$\int UdZ \text{ (Weg in Fig. 1)} = \Pi(x-a)^{1/2-\alpha}\,.\,(U_1V_2 - U_2V_1)$$

Wird nun der in Fig. 1. dargestellte Integrationsweg in die Ebene hinaus erweitert, so lässt sich derselbe in folgende drei geschlossene Wege zerlegen: der erste ist ein doppelter, rückläufiger Kreis um das endliche Gebiet, der also zweimal die westliche Uebergangslinie passirt; der zweite ist ein kleiner, rechtläufiger Kreis, der im ersten Blatte x umschliesst, und der dritte ein eben solcher im zweiten Blatte. Beim ersten Wege kann man nach fallenden Potenzen von z entwickeln. Der Anfangsterm von $\frac{\partial U}{\partial z}$ ist $\frac{1}{2}z^{n-\nu-3/2}$, derjenige von U also $\frac{1}{2(n+\nu)-1}z^{n-\nu-1/2}$. Die Exponenten befolgen eine arithmetische Differenz -1, wenn nicht eine allfällige Integrationsconstante A hinzutritt. Da es sich aber, wenn man den Factor $\Pi(x-a)^{1/2-\alpha}$ weg lässt, nur um das Integral $-\int\frac{U}{z-x}dU$ (Weg ein negativer, doppelter Kreis um das endliche Gebiet) handelt, und da die Exponenten in den mit dem Factor A behafteten Termen lauter ungerade Zahlen sind, so dass die bezüglichen Integrale sämtlich null werden, so ist A für den Wert des Integrals von keiner Bedeutung. Nimmt man daher $A=0$ an und erwägt, dass die Reihe für U so lange convergirt, als x absolut grösser denn c ist, so hat, wenn man vom Horizonte herkommt, U in beiden Blättern entgegengesetzte Werte und muss daher, wenn man z. B. von Osten her der Realitätslinie folgt, in c den Wert 0 annehmen. (Der allgemeine Wert in diesem Punkte ist dann $\lambda U_1+\mu U_2$, wenn μ und λ

ganze Zahlen bedeuten.) Da nun $A = 0$ ist, so hat $\frac{1}{z-x} U \frac{\partial U}{\partial z}$ ausserhalb eines Kreises um 0, der a, b, c und x umschliesst, den Charakter einer ganzen Function von z; der zweite Umlauf gibt daher dem Integrale denselben Wert wie der erste. Lässt man z nur ein Mal in positivem Sinne umlaufen, so wird das Integral zu

$$\int \frac{1}{z-x} \cdot 2U dU = \int \left(\frac{U}{z-x}\right)^2 dz$$ (Weg ein rechtläufiger Kreis um das endliche Gebiet)

Der Wert ist also das $(2i\pi)$ fache des Coefficienten von $\frac{1}{z}$ in der Entwicklung von

$$\left(\frac{U(z)}{z-x}\right)^2 = \sum_{\lambda=0}^{\lambda=\infty} a_\lambda z^{2(n-\nu)-1-\lambda} \times \sum_{\mu=0}^{\mu=\infty} (\mu+1) \cdot \frac{x^\mu}{z^{2+\mu}}$$

wo

$$a_0 = \frac{1}{(2(n-\nu)-1))^2}$$

ist. Damit der Exponent von z gleich -1 werde, muss

$$\lambda + \mu = 2(n-\nu-1)$$

sein. Jenes Integral ist also

$$\int \left(\frac{U(z)}{z-x}\right)^2 dz$$ (Weg ein pos. Kreis um das endliche Gebiet)

$$= 2i\pi \cdot \sum_{\lambda=0}^{\lambda=2(n-\nu-1)} (2n-2\nu-1-\lambda)\, a_\lambda x^{2n-2\nu-2-\lambda}$$

und ist eine ganze Function, deren höchster Term

$$\frac{2i\pi}{2n-2\nu-1} \cdot x^{2n-2\nu-2}$$

beträgt. Diese Function ist noch mit $\Pi(x-a)^{1|2-\alpha}$ zu multipliciren, wodurch der höchste Term des Integrals $\int U dZ$ (Weg wie oben) zu

$$\frac{2i\pi}{2n-2\nu-1} \cdot x^{\frac{3n-1}{2}-\nu}$$

gemacht wird. Wir suchen den Wert des Integrals des zweiten Weges. Es ist

$\int UdZ$ (Weg ein kleiner, rechtläufiger Kreis um x im ersten Blatte)

$$= -\tfrac{1}{2}\int U(z)\Pi\left(\frac{x-a}{z-a}\right)^{1/2-\alpha} \times P(z)\frac{dz}{z-x} \quad \text{(Weg wie vorhin)}$$

also nach Cauchy

$$\int UdZ = -i\pi P(x)\, U(x_1)$$

Ebenso ist

$\int UdZ$ (Weg ein kleiner, pos. Kreis um x im zweiten Blatte)

$$= i\pi P(x)\,.\,U(x_2)$$

wenn für die Function $P(x)$ ihr Wert im ersten Blatte gilt. $U(x_1)$ und $U(x_2)$ bezeichnen die Werte, welche die Function $U(z)$ im Punkte x des ersten und des zweiten Blattes annimmt. Der Wert des Integrals $\int UdZ$ längs des zweiten und dritten Weges ist somit

$$-i\pi P(x)\left[U(x_1) - U(x_2)\right]$$

Nun ist aber

$$U(x_1) - U(x_2) = \int d\,U(z)$$

Der Weg dieses Integrals ist eine rückläufige Schlinge, die aus dem Punkte x des zweiten Blattes um die Verzweigungspunkte a, b, c geworfen ist, die westliche Uebergangslinie durchdringt und im Punkte x des ersten Blattes endigt. Diese Schlinge zerfällt aber in eine nur die Punkte a und b einschliessende Curve, welche die östliche und westliche Uebergangslinie durchdringt, und in eine nur den Punkt b umgebende Schlinge, die allein die östliche Uebergangslinie zwischen b und c passirt. Der Wert des Integrales auf dem ersten Wege ist bekanntlich $-U_1$, und auf dem zweiten

$$\int_c^x \Pi(z-a)^{\alpha-1/2} P(z)\,dz, \quad \text{so ist}$$

$$U(x_1) - U(x_2) = \int_c^x \Pi(z-a)^{\alpha-1/2} P(z)\,dz - U_1$$

Weil

$$\Sigma(\alpha - \tfrac{1}{2}) = \frac{n}{2} - \nu - {}^3/_2$$

so ist $z^{n-\nu-3/2}$ der höchste Term in

$$\Pi(z-a)^{\alpha-1/4} \cdot P(z)$$

folglich $\frac{2}{2n-2\nu-1} x^{n-\nu-1/2}$ der höchste in

$$U(x_1) - U(x_2)$$

und daher $\frac{-2i\pi}{2n-2\nu-1} x^{\frac{3n-1}{2}-\nu}$ der höchste in

$$-i\pi P(x)\,(U(x_1) - U(x_2))$$

und wird daher vom höchsten Terme in

$\int UdZ$ (Weg ein pos. Kreis um das endliche Gebiet)

aufgehoben. Da aber $W(x)$ nur die Ordnung $x^{-\frac{n+1}{2}}$ erreicht, so müssen $n-\nu$ Terme zerstört werden. Es ist somit

II. $W(x) = 2i\pi \times$ Coeff. von $\frac{1}{2}$ in der Entwicklung

$$\frac{U^2(z)}{(z-x)^2} \times \Pi(x-a)^{1/2-\alpha} - \left[\int_c^x \Pi(z-a)^{\alpha-1/2} \times P(z)\,dz - U_1\right] . i\pi P(x)$$

Diese Formel eignet sich allerdings viel weniger zur Auffindung des Coeff. von $x^{-\frac{n+1}{2}}$, als der Ausdruck I, offenbart aber sogleich, dass keine elliptischen Integrale dritter Art vorkommen. Nun soll die Function $W(x)$ für die Fälle $n = 0.\ 1,\ 2,\ 2$ mittelst der Formel II. in elliptische Integrale umgesetzt werden.

Bern, den 9. März 1888.

IX.

Zur Complanation des dreiachsigen Ellipsoides mittelst elliptischer Coordinaten.

Von

Ferd. Jos. Obenrauch,

Professor an der L.-Oberrealschule in Brünn.

Bekanntlich hat zuerst J. Liouville [1]) in einem seiner an P. H. Blanchet gerichteten Briefe die Oberfläche des dreiachsigen Ellipsoides durch elliptische Coordinaten dargestellt.

Liouville geht in seiner Abhandlung von dem homofocalen Flächensysteme zweiter Ordnung

$$(1) \qquad \left. \begin{aligned} \frac{x^2}{\varrho^2}+\frac{y^2}{\varrho^2-b^2}+\frac{z^2}{\varrho^2-c^2}&=1 \\ \frac{x^2}{\mu^2}+\frac{y^2}{\mu^2-b^2}-\frac{z^2}{c^2-\mu^2}&=1 \\ \frac{x^2}{\nu^2}-\frac{y^2}{b^2-\nu^2}-\frac{z^2}{c^2-\nu^2}&=1 \end{aligned} \right\}$$

aus.

Unter den Voraussetzungen

$$b<c<\varrho, \quad b<\mu<c, \quad \nu>b>0$$

1) „Lettres sur diverses questions d'analyse et de physique mathématique concernant l'ellipsoïde," adressées à M. P. H. Blanchet; Paris, 29. mai 1846. S.: Journal de mathématiques pures et appliquées, publié par Joseph Liouville, Tome onzième, Paris 1846, pag. 217—236.

erhalten wir eine Schaar dreiachsiger Ellipsoide mit den Halbachsen ϱ, $\sqrt{\varrho^2-b^2}$, $\sqrt{\varrho^2-c^2}$, geschnitten durch eine Schaar homofocaler oder confocaler einteiliger Hyperboloide und eine Schaar confocaler zweiteiliger Hyperboloide, von welcher die ersteren μ, $\sqrt{\mu^2-b^2}$, $\sqrt{c^2-\mu^2}$, die letzteren ν, $\sqrt{b^2-\nu^2}$, $\sqrt{c^2-\nu^2}$ zu Halbachsen haben.

Dieses System confocaler Flächen zweiter Ordnung hat zuerst Lamé [1]) in seinem „Mémoire sur les surfaces isothermes dans les corps solides homogènes en équilibre de température" im V. Bande der Mémoires présentés par divers savans à l'Académie des sciences de l'institut de France, Paris 1837 in die analytische Geometrie eingeführt und gab den veränderlichen Parametern ϱ, μ, ν, welche den Raumpunkt $M(x, y, z)$ bestimmen, den Namen elliptische Coordinaten.

Lamé gelangte in diesem Mémoire u. a. zu dem die Oberfläche eines Kugeloctanten vom Halbmesser $r = 1$ darstellenden Doppelintegral

$$(2) \qquad \int_0^b \int_b^c \frac{\nu^2-\varrho^2}{\sqrt{\nu^2-b^2}\,\sqrt{c^2-\nu^2}\,\sqrt{b^2-\varrho^2}\,\sqrt{c^2-\varrho^2}}\,d\nu\,d\varrho = \frac{\pi}{2}$$

$$c > b > 0$$

dessen Wert Herr Hofrath Dr. Ant. Winckler [2]) durch Specialisirung eines durch Gamma-Functionen ausgedrückten Doppelintegrales von allgemeinerer Form bestimmte.

Liouville weist auf pag. 218 seiner Abhandlung auf die von Jacobi [3]) verwendeten und für die Complanation des dreiachsigen Ellipsoides nicht so bequemen Integrationsvariabeln φ und ψ [4]) hin und gelangte auf pag. 219 zu dem Differential dw der Oberfläche des durch die Gleichung

---

1) S. a.: „Journal de mathématiques pures et appliquées, publié par Joseph Liouville, tome II, Paris 1837, pag. 147—183."

2) „Allgemeine Transformation der bestimmten Doppelintegrale". Von Dr. Ant. Winckler. Denkschriften der kais. Akademie der Wissenschaften, XX. Bd., vorgelegt in der Sitzung vom 7. Januar 1859.

3) „De transformatione et determinatione integralium duplicium". Crelle's Journal Bd. X, Berlin 1833, pag. 101.

4) Winkel der Normalen mit den Coordinatenachsen.

$$\frac{x^2}{\varrho^2} + \frac{y^2}{\varrho^2 - b^2} + \frac{z^2}{\varrho^2 - c^2} = 1$$

bestimmten dreiachsigen Ellipsoides

$$dw = \frac{(\mu^2 - \nu^2)\sqrt{\varrho^2 - \mu^2}\sqrt{\varrho^2 - \nu^2}}{\sqrt{\mu^2 - b^2}\sqrt{c^2 - \mu^2}\sqrt{b^2 - \nu^2}\sqrt{c^2 - \nu^2}}\, d\mu\, d\nu.$$

Die Oberfläche S des Octanten eines dreiachsigen Ellipsoides mit den Halbachsen ϱ, $\sqrt{\varrho^2 - b^2}$, $\sqrt{\varrho^2 - c^2}$ ist demnach dargestellt durch das Doppelintegral

(3) $$S(\varrho, \sqrt{\varrho^2 - b^2}, \sqrt{\varrho^2 - c^2}) = \int_b^c \int_0^b \frac{(\mu^2 - \nu^2)\sqrt{\varrho^2 - \mu^2}\sqrt{\varrho^2 - \nu^2}}{\sqrt{\mu^2 - b^2}\sqrt{c^2 - \mu^2}\sqrt{b^2 - \nu^2}\sqrt{c^2 - \nu^2}}\, d\mu\, d\nu$$

Den Gegenstand der vorliegenden Abhandlung bildet die Bestimmung der Oberfläche des Octanten $S(a, b, c)$ eines dreiachsigen Ellipsoides mit Hilfe des confocalen Flächensystemes zweiter Ordnung:

(4) $$\left.\begin{aligned} \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} &= 1 \\ \frac{x^2}{a^2 - \mu^2} + \frac{y^2}{b^2 - \mu^2} + \frac{z^2}{c^2 - \mu^2} &= 1 \\ \frac{x^2}{a^2 - \nu^2} + \frac{y^2}{b^2 - \nu^2} + \frac{z^2}{c^2 - \nu^2} &= 1 \end{aligned}\right\}$$

Unter den Voraussetzungen

$$a > b > c > 0, \quad a > \mu > b, \quad b > \nu > c$$

erhält man ein dreiachsiges Ellipsoid mit den Halbachsen a, b, c, geschnitten durch eine confocale Schaar zweiteiliger Hyperboloide mit den Halbachsen $\sqrt{a^2 - \mu^2}$, $\sqrt{\mu^2 - b^2}$, $\sqrt{\mu^2 - c^2}$ und eine confocale Schaar einteiliger Hyperboloide mit den Halbaxen $\sqrt{a^2 - \nu^2}$, $\sqrt{b^2 - \nu^2}$, $\sqrt{\nu^2 - c^2}$.

Durch Auflösung dieses Gleichungssystemes ergeben sich für die orthogonalen Coordinaten x, y, z eines Punktes des Ellipsoides die Werte:

$$(5)\qquad \left.\begin{aligned} x &= \frac{a}{\varepsilon_2\varepsilon_3}\sqrt{a^2-\mu^2}\,\sqrt{a^2-\nu^2} \\ y &= \frac{b}{\varepsilon_1\varepsilon_3}\sqrt{\mu^2-b^2}\,\sqrt{b^2-\nu^2} \\ z &= \frac{c}{\varepsilon_1\varepsilon_2}\sqrt{\mu^2-c^2}\,\sqrt{\nu^2-c^2} \end{aligned}\right\}$$

wobei zur Abkürzung gesetzt wurde

$$\varepsilon_1 = \sqrt{b^2-c^2},\quad \varepsilon_2 = \sqrt{a^2-c^2},\quad \varepsilon_3 = \sqrt{a^2-b^2}$$

Die Oberfläche des Octanten eines dreiachsigen Ellipsoides kann nun unter Benutzung des Gleichungssystemes (5) aus der allgemeinen Complanationsformel oder mit Benutzung der unter rechten Winkeln sich schneidenden Bogenelemente $d\sigma$, $d\sigma_1$ der Krümmungslinien beider Arten in elliptischen Coordinaten direct dargestellt werden.

Wählen wir die letztere Methode, so erhalten wir mit Rücksicht auf die Gleichungen

$$(6)\qquad \left.\begin{aligned} \frac{dx}{d\mu} &= -\frac{a\mu}{\varepsilon_2\varepsilon_3}\frac{\sqrt{a^2-\nu^2}}{\sqrt{a^2-\mu^2}}, & \frac{dx}{d\nu} &= -\frac{a\nu}{\varepsilon_2\varepsilon_3}\frac{\sqrt{a^2-\mu^2}}{\sqrt{a^2-\nu^2}} \\ \frac{dy}{d\mu} &= \frac{b\mu}{\varepsilon_1\varepsilon_3}\frac{\sqrt{b^2-\nu^2}}{\sqrt{\mu^2-b^2}}, & \frac{dy}{d\nu} &= -\frac{b\nu}{\varepsilon_1\varepsilon_3}\frac{\sqrt{\mu^2-b^2}}{\sqrt{b^2-\nu^2}} \\ \frac{dz}{d\mu} &= \frac{c\mu}{\varepsilon_1\varepsilon_2}\frac{\sqrt{\nu^2-c^2}}{\sqrt{\mu^2-c^2}}, & \frac{dz}{d\nu} &= \frac{c\nu}{\varepsilon_1\varepsilon_2}\frac{\sqrt{\mu^2-c^2}}{\sqrt{\nu^2-c^2}} \end{aligned}\right\}$$

für die Bogenelemente $d\sigma$, $d\sigma_1$ der Krümmungslinien der ersten und zweiten Art die Werte:

$$(7)\qquad \left.\begin{aligned} d\sigma &= \frac{\mu^2\sqrt{\mu^2-\nu^2}}{\sqrt{a^2-\mu^2}\,\sqrt{\mu^2-b^2}\,\sqrt{\mu^2-c^2}}\,d\mu \\ d\sigma_1 &= \frac{\nu^2\sqrt{\mu^2-\nu^2}}{\sqrt{a^2-\nu^2}\,\sqrt{b^2-\nu^2}\,\sqrt{\nu^2-c^2}}\,d\nu \end{aligned}\right\}$$

folglich mit Rücksicht auf das Dupin'sche Theorem für das von den Bogenelementen $d\sigma$, $d\sigma_1$ begrenzte Flächenelement dF des Ellipsoides (a, b, c) einen, dem Liouville'schen Ausdruck analogen Ausdruck

$$dF = \frac{\mu^2\nu^2(\mu^2-\nu^2)}{\sqrt{a^2-\mu^2}\sqrt{\mu^2-b^2}\sqrt{\mu^2-c^2}\sqrt{a^2-\nu^2}\sqrt{b^2-\nu^2}\sqrt{\nu^2-c^2}}\,d\mu\,d\nu$$

Lassen wir μ alle Werte von b bis a und ν alle Werte von c bis b durchlaufen, so erhalten wir die Oberfläche $S(a. b, c)$ des Octanten eines dreiachsigen Ellipsoides dargestellt durch das Doppelintegral

$$(8)\quad S(a, b, c) = \int_b^a \int_c^b \frac{\mu^2\nu^2(\mu^2-\nu^2)}{\sqrt{a^2-\mu^2}\sqrt{\mu^2-b^2}\sqrt{\mu^2-c^2}\sqrt{a^2-\nu^2}\sqrt{b^2-\nu^2}\sqrt{\nu^2-c^2}}\,d\mu\,d\nu$$

welches somit im Sinne der Complanations-Theorie als eine stereometrische Erweiterung des Lamé'schen Doppelintegrales betrachtet werden kann.

Um das vorliegende Doppelintegral, welches auch in der Form

$$(9)\quad \int_b^a \int_c^b \frac{\mu^2\nu^2(\mu^2-\nu^2)}{\sqrt{a^2-\mu^2}\sqrt{\mu^2-b^2}\sqrt{\mu^2-c^2}\sqrt{a^2-\nu^2}\sqrt{b^2-\nu^2}\sqrt{\nu^2-c^2}}\,d\mu\,d\nu$$

$$= \int_b^a \frac{\mu^4}{\sqrt{a^2-\mu^2}\sqrt{\mu^2-b^2}\sqrt{\mu^2-c^2}}\,d\mu \cdot \int_c^b \frac{\nu^2}{\sqrt{a^2-\nu^2}\sqrt{b^2-\nu^2}\sqrt{\nu^2-c^2}}\,d\nu$$

$$- \int_b^a \frac{\mu^2}{\sqrt{a^2-\mu^2}\sqrt{\mu^2-b^2}\sqrt{\mu^2-c^2}}\,d\mu \cdot \int_c^b \frac{\nu^4}{\sqrt{a^2-\nu^2}\sqrt{b^2-\nu^2}\sqrt{\nu^2-c^2}}\,d\nu$$

geschrieben werden kann, auf den bekannten Legendre'schen Ausdruck zu reduciren, führen wir in das erste und dritte Integral, beziehungsweise in das zweite und vierte Integral, statt μ und ν die neuen Integrationsvariabeln θ und φ mittelst der Gleichungen

$$(10)\qquad \frac{\mu^2-b^2}{a^2-\mu^2} = \cotg^2\theta, \quad \frac{\nu^2-c^2}{b^2-\nu^2} = \operatorname{tg}^2\varphi$$

ein, und erhalten wegen

$$d\mu = -\frac{ak^2\sin\theta\cos\theta}{\sqrt{1-k^2\sin^2\theta}}\,d\theta, \quad k = \frac{\varepsilon_3}{a} < 1$$

$$d\nu = \frac{bk_1^2\sin\varphi\cos\varphi}{\sqrt{1-k_1^2\cos^2\varphi}}\,d\varphi, \quad k_1 = \frac{\varepsilon_1}{b} < 1$$

$$(11)\int_b^a\int_c^b \frac{\mu^2\nu^2(\mu^2-\nu^2)}{\sqrt{a^2-\mu^2}\sqrt{\mu^2-b^2}\sqrt{\mu^2-c^2}\sqrt{a^2-\nu^2}\sqrt{b^2-\nu^2}\sqrt{\nu^2-c^2}}d\mu\, d\nu$$

$$=\frac{a^3 b}{\varepsilon_2^2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{(1-k^2\sin^2\theta)^2}{\sqrt{1-k^2\sin^2\theta}\sqrt{1-\varkappa^2\sin\theta}}d\theta\cdot\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{(1-k_1^2\cos^2\varphi}{\sqrt{1-k_1^2\cos^2\varphi}\sqrt{1-\varkappa_1^2\sin^2\varphi}}d\varphi$$

$$-\frac{ab^3}{\varepsilon_2^2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{(1-k^2\sin^2\theta)}{\sqrt{1-k^2\sin^2\theta}\sqrt{1-\varkappa^2\sin^2\theta}}d\theta\cdot\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{(1-k_1^2\cos^2\varphi)^2}{\sqrt{1-k_1^2\cos^2\varphi}\sqrt{1-\varkappa_1^2\sin^2\varphi}}d\varphi$$

wobei

$$\varkappa=\frac{\varepsilon_3}{\varepsilon_2}=\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{\sqrt{a^2-c^2}}<1,\quad \varkappa_1=\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}=\frac{\sqrt{b^2-c^2}}{\sqrt{a^2-c^2}}<1,\quad \varkappa^2+\varkappa_1^2=1$$

Wenden wir auf die nunmehr erhaltenen einfachen Integrale die bekannten Reductionsformeln an, so gelangen wir schliesslich zu dem von Legendre[1]) durch elliptische Integrale der ersten und zweiten Art dargestellten Ausdruck

$$(12)\int_b^a\int_c^b \frac{\mu^2\nu^2(\mu^2-\nu^2)}{\sqrt{a^2-\mu^2}\sqrt{\mu^2-b^2}\sqrt{\mu^2-c^2}\sqrt{a^2-\nu^2}\sqrt{b^2-\nu^2}\sqrt{\nu^2-c^2}}d\mu\, d\nu$$

$$=\frac{\pi}{4}c^2+\frac{\pi}{4}\frac{b}{\varepsilon_2}\cdot\{c^2F(k,\varphi)+\varepsilon_2^2E(k,\varphi)\}$$

wobei

$$k=\frac{a\varepsilon_1}{b\varepsilon_2}=\frac{a\sqrt{b^2-c^2}}{b\sqrt{a^2-c^2}}$$

$$\varphi=\arcsin\frac{\varepsilon_2}{a}=\arcsin\frac{\sqrt{a^2-c^2}}{a}$$

Lassen wir c gegen die null convergiren, so geht der Ellipsoid-octant in einen Ellipsenquadranten über, und wir erhalten wegen

$$E(k,\varphi)=1$$

den Wert eines mit dem Lamé'schen Doppelintegral

1) „Exercices de calcul intégral, tome Ier, Paris 1811, pag. 191" und „Traité des fonctions elliptiques, tome Ier, Paris 1825, pag. 357".

$$(2) \qquad \int_b^a \int_0^b \frac{\mu^2 - \nu^2}{\sqrt{a^2-\mu^2}\sqrt{\mu^2-b^2}\sqrt{a^2-\nu^2}\sqrt{b^2-\nu^2}}\, d\mu\, d\nu = \frac{\pi}{2}$$

$$a > b > 0$$

verwandten Doppelintegrales, nämlich

$$(13) \qquad \int_b^a \int_0^b \frac{\mu\nu(\mu^2 - \nu^2)}{\sqrt{a^2-\mu^2}\sqrt{\mu^2-b^2}\sqrt{a^2-\nu^2}\sqrt{b^2-\nu^2}}\, d\mu\, d\nu = \frac{\pi}{4}\, ab$$

$$a > b > 0$$

Um das vorliegende Doppelintegral (8) in das Liouville'sche Doppelintegral zu transformiren, setzen wir statt der constanten Parameter a b, c beziehungsweise ϱ_1, $\sqrt{\varrho_1^2-b_1^2}$, $\sqrt{\varrho_1^2-c_1^2}$, wobei $\varrho_1 > c_1 > b_1$ und führen statt μ, ν die neuen Integrationsvariabeln μ_1, ν_1 mittelst der simultanen Substitution

$$(14) \qquad \left.\begin{aligned} \sqrt{\varrho_1^2-\mu^2}\sqrt{\varrho_1^2-\nu^2} &= \mu_1\nu_1 \\ \sqrt{\mu^2-(\varrho_1^2-b_1^2)}\sqrt{(\varrho_1^2-b_1^2)-\nu^2} &= \sqrt{\mu_1^2-b_1^2}\sqrt{b_1^2-\nu_1^2} \end{aligned}\right\}$$

ein.

Die Auflösung dieser beiden Gleichungen nach μ und ν liefert

$$(15) \qquad \mu^2 = \varrho_1^2 - \nu_1^2, \quad \nu^2 = \varrho_1^2 - \mu_1^2$$

Folglich ist

$$c_1 > \mu_1 > b_1, \quad b_1 > \nu_1 > 0$$

Für die Euler'sche Functionsdeterminante

$$\Omega = \begin{vmatrix} \frac{d\mu}{d\mu_1}, & \frac{d\mu}{d\nu_1} \\ \frac{d\nu}{d\mu_1}, & \frac{d\nu}{d\nu_1} \end{vmatrix}$$

erhalten wir wegen

$$\mu\frac{d\mu}{d\mu_1} = 0, \quad \mu\frac{d\mu}{d\nu_1} = -\nu_1, \quad \nu\frac{d\nu}{d\mu_1} = -\mu_1, \quad \nu\frac{d\nu}{d\nu_1} = 0$$

$$\Omega = \frac{\mu_1\nu_1}{\sqrt{\varrho_1^2-\mu_1^2}\sqrt{\varrho_1^2-\nu_1^2}}$$

Die Oberfläche des Octanten eines dreiachsigen Ellipsoides mit den Halbachsen ϱ_1, $\sqrt{\varrho_1^2-b_1^2}$, $\sqrt{\varrho_1^2-c_1^2}$, beziehungsweise ϱ, $\sqrt{\varrho^2-b^2}$,

$\sqrt{\varrho^2-c^2}$, ist somit dargestellt durch das zuerst von Liouville angegebene Doppelintegral

$$(16)\quad S(\varrho, \sqrt{\varrho^2-b^3}, \sqrt{\varrho^2-c^2})$$

$$=\int_0^b\int_b^c \frac{(\mu^2-\nu^2)\sqrt{\varrho^2-\nu^2}\sqrt{\varrho^2-\nu^2}}{\sqrt{\mu^2-b^2}\sqrt{c^2-\mu^2}\sqrt{b^2-\nu^2}\sqrt{c^2-\nu^2}}\,d\mu\,d\nu$$

welches in einfache Integrale zerlegt, die Gleichung liefert

$$(17)\quad S(\varrho, \sqrt{\varrho^2-b^2}, \sqrt{\varrho^2-c^2})$$

$$=\int_0^b \frac{\mu^2\sqrt{\varrho^2-\mu^2}}{\sqrt{\mu^2-b^2}\sqrt{c^2-\mu^2}}\,d\mu \cdot \int_b^c \frac{\sqrt{\varrho^2-\nu^2}}{\sqrt{b^2-\nu^2}\sqrt{c^2-\nu^2}}\,d\nu$$

$$-\int_0^b \frac{\sqrt{\varrho^2-\mu^2}}{\sqrt{\mu^2-b^2}\sqrt{c^2-\mu^2}}\,d\mu \cdot \int_b^c \frac{\nu^2\sqrt{\varrho^2-\nu^2}}{\sqrt{b^2-\nu^2}\sqrt{c^2-\nu^2}}\,d\nu$$

wobei

$$c > \mu > b, \quad b > \nu > 0 \quad \text{ist.}$$

Führen wir in das vorliegende Doppelintegral (8) statt μ und ν die neuen Integrationsvariabeln u und v mittelst der Gleichungen

$$\mu^2 = u, \quad \nu^2 = v$$

ein und ersetzen die neuen Grenzenpaare b^2, a^2; c^2, b^2 durch b, a; c, b, so erhalten wir für die Oberfläche des Octanten eines dreiachsigen Ellipsoides mit den Halbaxen $\sqrt{a}$, $\sqrt{b}$, $\sqrt{c}$ den Ausdruck

$$(18)\quad S(\sqrt{a}, \sqrt{b}, \sqrt{c})$$

$$=\tfrac{1}{4}\int_b^a\int_c^b \frac{(u-v)\sqrt{uv}}{\sqrt{a-u}\sqrt{u-b}\sqrt{u-c}\sqrt{a-v}\sqrt{b-v}\sqrt{v-c}}\,dv\,dv$$

Zerlegen wir das letzte Doppelintegral in seine einfachen Integrale, so erhalten wir für die Oberfläche eines Octanten des dreiachsigen Ellipsoides

$$\frac{x^2}{a}+\frac{y^2}{b}+\frac{z^2}{c}=1$$

den Ausdruck

(19) $S(\sqrt{a},\ \sqrt{b},\ \sqrt{c})$

$$= \tfrac{1}{4}\int_b^a \frac{u\sqrt{u}}{\sqrt{a-u}\,\sqrt{u-b}\,\sqrt{u-c}}\,du \cdot \int_c^b \frac{\sqrt{v}}{\sqrt{a-v}\,\sqrt{b-v}\,\sqrt{v-c}}\,dv$$

$$- \tfrac{1}{4}\int_b^a \frac{\sqrt{u}}{\sqrt{a-u}\,\sqrt{u-b}\,\sqrt{u-c}}\,du \cdot \int_c^b \frac{v\sqrt{v}}{\sqrt{a-v}\,\sqrt{b-v}\,\sqrt{v-c}}\,dv$$

welchen K. H. Schellbach in seinor „Lehre von den elliptischen Integralen und den Theta-Functionen"Berlin 1864, pag. 310—315" auf anderem Wege, jedoch mit dem entgegengesetzten Vorzeichen gefunden hat.

Schellbach geht nämlich bei Bestimmung der Oberfläche des dreiachsigen Ellipsoides mit den Halbachsen $\sqrt{a},\ \sqrt{b},\ \sqrt{c}$ von der bekannten Complanationsformel

$$dS = \sqrt{X^2+Y^2+Z^2}\,du\,dv$$

aus, wobei $X,\ Y,\ Z$ dio Determinanten der partiellen Differeutialquotienten

$$X = \begin{vmatrix} \frac{dy}{du}, & \frac{dy}{dv} \\ \frac{dz}{du}, & \frac{dz}{dv} \end{vmatrix},\quad Y = \begin{vmatrix} \frac{dz}{du}, & \frac{dz}{dv} \\ \frac{dx}{du}, & \frac{dx}{dv} \end{vmatrix},\quad Z = \begin{vmatrix} \frac{dx}{du}, & \frac{dx}{dv} \\ \frac{dy}{du}, & \frac{dy}{dv} \end{vmatrix}$$

sind, und führt als neue Integrationsvariabelo die variabelen Parameter u, v des Flächensystems zweiter Ordnung

$$(20)\qquad \left.\begin{aligned} \frac{x^2}{a} + \frac{y^2}{b} + \frac{z^2}{c} &= 1 \\ \frac{x^2}{a(a-u)} + \frac{y^2}{b(b-u)} + \frac{z^2}{c(c-u)} &= 0 \\ \frac{x^2}{a(a-v)} + \frac{y^2}{b(b-v)} + \frac{z^2}{c(c-v)} &= 0 \end{aligned}\right\}$$

ein, und gelangt unter den Voraussetzungen

$$a > b > c,\quad a > u > b,\quad b > v > c$$

zu folgendem Ausdruck

$$(21)\quad o=\int_c^b \frac{2v\sqrt{v}}{\sqrt{a-v}\sqrt{b-v}\sqrt{v-c}}dv \cdot \int_b^a \frac{\sqrt{u}}{\sqrt{a-u}\sqrt{u-b}\sqrt{u-c}}du$$
$$-\int_c^b \frac{2\sqrt{v}}{\sqrt{a-v}\sqrt{b-v}\sqrt{v-c}}dv \cdot \int_b^a \frac{u\sqrt{u}}{\sqrt{a-u}\sqrt{u-b}\sqrt{u-c}}du$$

durch welchen in seinem Werke auf pag. 315 die Oberfläche des ganzen Ellipsoides ausgedrückt erscheint.

Von der Richtigkeit des die Oberfläche eines Ellipsoidoctanten ($\sqrt{a}$, $\sqrt{b}$, $\sqrt{c}$) darstellenden Doppelintegrales (19) kann man sich auch mit Hilfe des Dupin'schen Theoremes überzeugen, wenn man das Flächenelement der Krümmungslinien, welche durch den Schnitt der beiden Strahlenflächen

$$(20)\quad \left.\begin{aligned} \frac{x^2}{a(a-u)}+\frac{y^2}{b(b-u)}+\frac{z^2}{c(c-u)}=0 \\ \frac{x^2}{a(a-v)}+\frac{y^2}{b(b-v)}+\frac{z^2}{c(c-v)}=0 \end{aligned}\right\}$$

mit dem dreiachsigen Ellipsoide

$$(20)\quad \frac{x^2}{a}+\frac{y^2}{b}+\frac{z^2}{c}=1$$

entstehen, direct ableitet.

Durch Auflösung des letzten Gleichungssystemes (20) erhalten wir

$$(22)\quad \left.\begin{aligned} x&=\frac{\sqrt{a-u}\sqrt{a-v}}{\sqrt{a-b}\sqrt{a-c}}\sqrt{a} \\ y&=\frac{\sqrt{u-b}\sqrt{b-v}}{\sqrt{a-b}\sqrt{b-c}}\sqrt{b} \\ z&=\frac{\sqrt{u-c}\sqrt{v-c}}{\sqrt{a-c}\sqrt{b-c}}\sqrt{c} \end{aligned}\right\}$$

und für die Bogenelemente $d\sigma$, $d\sigma_1$ der Krümmungslinien der ersten und zweiten Art

$$d\sigma=\frac{1}{2}\frac{\sqrt{u-v}\sqrt{u}}{\sqrt{a-u}\sqrt{u-b}\sqrt{u-c}}du$$

$$d\sigma_1 = \tfrac{1}{2} \frac{\sqrt{u-v}\,\sqrt{v}}{\sqrt{a-v}\,\sqrt{b-v}\,\sqrt{v-c}}\,dv$$

Das von den Bogenelementen $d\sigma$, $d\sigma_1$ der Krümmungslinien begrenzte Flächenelement dF des Ellipsoides ($\sqrt{a}$, $\sqrt{b}$, $\sqrt{c}$) ist somit bestimmt durch die Gleichung

$$dF = \tfrac{1}{4} \frac{(u-v)\sqrt{uv}}{\sqrt{a-u}\,\sqrt{u-b}\,\sqrt{u-c}\,\sqrt{a-v}\,\sqrt{b-v}\,\sqrt{v-c}}\,du\,dv$$

Lassen wir u alle Werte von b bis a und v alle Werte von c bis b durchlaufen, so durchläuft die Doppelschaar der Krümmungslinien sämtliche Punkte des Ellipsoidoctanten, dessen Oberfläche somit durch das Doppelintegral

(18) $S(\sqrt{a}, \sqrt{b}, \sqrt{c})$

$$= \tfrac{1}{4}\int_b^a\int_c^b \frac{(u-v)\sqrt{uv}}{\sqrt{a-u}\,\sqrt{u-b}\,\sqrt{u-c}\,\sqrt{a-v}\,\sqrt{b-v}\,\sqrt{v-c}}\,du\,dv$$

ausgedrückt erscheint.

Um von den Lamé'schen Coordinaten auf elliptische Coordinaten in trigonometrischer Form überzugehen, führen wir in das vorliegende Doppelintegral (8) die neuen Integrationsvariabeln ϑ, φ mittelst des simultanen Gleichungssystemes

$$(24) \qquad \left.\begin{aligned} \sqrt{a^2-\mu^2}\,\sqrt{a^2-\nu^2} &= \varepsilon_2\varepsilon_3 \sin\vartheta\,\sqrt{1-\varkappa_1\sin^2\varphi} \\ \sqrt{\mu^2-b^2}\,\sqrt{b^2-\nu^2} &= \varepsilon_1\varepsilon_2\cos\vartheta\cos\varphi \end{aligned}\right\}$$

ein, wobei

$$\varkappa = \frac{\varepsilon_3}{\varepsilon_2}, \quad \varkappa_1 = \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}, \quad \varkappa^2 + \varkappa_1^2 = 1$$

und erhalten den von F. Joachimsthal [1]) gefundenen Ausdruck

(25)

$$\int_b^a\int_c^b \frac{\mu^2\nu^2(\mu^2-\nu^2)}{\sqrt{a^2-\mu^2}\,\sqrt{\mu^2-b^2}\,\sqrt{\mu^2-c^2}\,\sqrt{a^2-\nu^2}\,\sqrt{b^2-\nu^2}\,\sqrt{\nu^2-c^2}}\,d\mu\,d\nu$$

---

1) S: F. Joachimsthal: „Anwendung der Differential- und Integralrechnung auf die allgemeine Theorie der Flächen und der Linien doppelter Krümmung, Leipzig 1872, pag. 127". (III. Auflage, Leipzig 1890, pag. 149).

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sqrt{a^2\cos^2\vartheta + b^2\sin^2\vartheta}\ \sqrt{b^2\sin^2\varphi + c^2\cos^2\varphi}}{\sqrt{1-\varkappa^2\sin^2\vartheta}\ \sqrt{1-\varkappa_1{}^2\sin^2\varphi}}$$

$$\times\ (\varkappa^2\cos^2\vartheta + \varkappa_1{}^2\sin^2\vartheta)\, d\vartheta\, d\varphi$$

Setzen wir

$$(26)\quad \lambda^2 = \frac{\mu^4\nu^4(\mu^2-\nu^2)^2}{(a^2-\mu^2)(\mu^2-b^2)(\mu^2-c^2)(a^2-\nu^2)(b^2-\nu^2)(\nu^2-c^2)}$$

und betrachten wir in geometrischer Auffassung u. zw. im Sinne der Cubaturen-Theorie die Werte der elliptischen Coordinaten als orthogonale Coordinaten, so drückt das vorliegende Doppelintegral (8) das Volumen eines Körpers aus, welcher von den Ebenen $\lambda = 0$, $\mu = a$, $\mu = b$, $\nu = b$, $\nu = c$ und von der Fläche (26) der vierzehnten Ordnung begrenzt wird. Die das Volumen begrenzende krumme Fläche hat acht reelle Asymptotenebenen, davon vier an den Grenzen des Integrationsgebietes. Vier reelle und vier imaginäre Asymptotenebenen liegen ausserhalb des Integrationsgebietes.

Wird $c = 0$, so geht das Doppelintegral (8) in das Doppelintegral (13) über. Die zu diesem Doppelintegral zugehörige Fläche

$$(27)\qquad \lambda^2 = \frac{\mu^2\nu^2(\mu^2-\nu^2)^2}{(a-\mu^2)(\mu^2-b^2)(a^2-\nu^2)(b^2-\nu^2)}$$

ist eine Fläche der zehnten Ordnung und hat sechs reelle Asymptotenebenen, davon vier an den Grenzen des Integrationsgebietes. Zwei reelle und zwei imaginäre Asymptotenebenen liegen ausserhalb der Grenzen des Integrationsgebietes. Das Volumen des zu diesem Doppelintegral gehörigen Körpers ist gleich dem vierten Teil des Volumens eines elliptischen Cylinders, welcher das Ellipsoid (a, b, c) längs des Hauptschnittes (a, b) berührt und die Masseinheit zur Höhe hat.

Zum Schlusse können wir mit Rücksicht auf die Untersuchungen von Tortolini [1]) und Roberts [2]) nicht unerwähnt lassen, dass das

1) „Nuove applicazioni del calcolo integrale relative alla quadratura delle superficie, curve e cubature de solidi, dal D. B. Tortolini". Crelle's Journal, 1846, Bd. XXXI, pag. 12—39.

2) „Note sur l'évaluation de l'aire de la surface nommée dans l'optique surface d'élasticité, par William Roberts". Journal de math. 1846, t. XI, pag. 81—86.

vorliegende Doppelintegral (8), sowie alle mit demselben geometrisch verwandten, d. h. die Oberfläche eines Ellipsoidoctanten mit den Halbachsen a, b, c darstellenden Doppelintegrale gleichzeitig die Oberfläche eines Octanten der zu dem Ellipsoid

$$\frac{x^2}{(\sqrt{bc})^2} + \frac{y^2}{(\sqrt{ac})^2} + \frac{z^2}{(\sqrt{ab})^2} = 1 \tag{28}$$

gehörigen Fusspunktfläche vierter Ordnung

$$(x^2 + y^2 + z^2)^2 = bc\,x^2 + ac\,y^2 + ab\,z^2 \tag{29}$$

mit dem Coordinatenursprung als Projectionscentrum darstellen. Diese Fusspunktfläche zog zuerst Fresnel[1]) bei seinen Untersuchungen über die doppelte Strahlenbrechung in den Kreis seiner analytischen Forschungen und gab ihr den Namen Elasticitätsfläche (la surface d'élasticité).

1) „Mémoire sur la double réfraction. I, II". Paris 1821. (Recueil des savants étrangers.)

X.

Osculirende Parabel.

Von

R. Hoppe.

Ein Punkt P einer Curve s sei Anfang der Coordinaten x, y, z eines variabeln Curvenpunkts in Bezug auf Axen von beliebiger fester Richtung und zugleich Anfang der Coordinaten u, u_1 eines variabeln Punkts auf einer Parabel in den Richtungen ihrer Axe Scheiteltangente, überdies $u = m$ und $u_1 = n$ die ihres Scheitels. Die Gleichung der Parabel ist also:

$$(n+u_1)^2 = 2p(m+u) \tag{1}$$

Es sollen nun die Constanten m, n, p und die Lage der Parabel so bestimmt werden, dass die Punkte (uu_1) und (xyz) nebst ihren unendlich kleinen Verrückungen bis auf die zur Bestimmung hinreichende Ordnung bei Verschwinden einer gemeinsamen Unabhängigen zusammenfallen.

Die Wahl der Unabhängigen, als deren gleichzeitig verschwindende Functionen die 5 Coordinaten zu denken sind, hat wie leicht erhellt, auf das Resultat keinen Einfluss; doch eignet sich hinsichtlich der Einfachheit der Rechnung keine besser als der Krümmungswinkel der Curve, weil durch dessen Annahme alle Differentiation von Brüchen vermieden wird. Die Differentiation nach demselben sei durch Striche bezeichnet.

Den Fall einer ebenen Curve, weil er immer der Hauptfall bleibt, wollen wir getrennt behandeln.

§ 1. Osculirende Parabel einer ebenen Curve.

Da mit x, y, z gleichzeitig u, u_1 verschwinden sollen, so verlangt Gl. (1) allgemein, dass

$$a^2 = 2pm \tag{2}$$

sei. Für ebene Curven ($z = 0$) seien dio Coordinatenrelationen:

$$\begin{aligned} u &= x\cos\mu - y\sin\mu \\ u_1 &= x\sin\mu + y\cos\mu \end{aligned} \tag{3}$$

Bezeichnet τ den Krümmungswinkel beginnend in der x Axe, so hat man:

$$x' = s'\cos\tau; \quad y' = s'\sin\tau \tag{4}$$

woraus nach Gl. (3):

$$u' = s'\cos(\tau + \mu); \quad u_1' = s'\sin(\tau + \mu) \tag{5}$$

Differentiirt man hiernach Gl. (1) 3 mal und setzt in allen 3 Gleichungen dann $u_1 = 0$, so erhält man:

$$n\sin(\tau + \mu) - p\cos(\tau + \mu) = 0 \tag{6}$$

$$n\cos(\tau + \mu) + p\sin(\tau + \mu) + s'\sin^2(\tau + \mu) = 0 \tag{7}$$

$$\begin{aligned} -n\sin(\tau + \mu) + p\cos(\tau + \mu) + 3s'\sin(\tau + \mu)\cos(\tau + \mu) \\ + s''\sin^2(\tau + \mu) = 0 \end{aligned} \tag{8}$$

Die beidon ersten Gleichungen geben:

$$n = -s'\sin^2(\tau + \mu)\cos(\tau + \mu); \quad p = -s'\sin^3(\tau + \mu) \tag{9}$$

die ersto und dritto:

$$\operatorname{tg}(\tau + \mu) = -\frac{3s'}{s''} \tag{10}$$

und nach Gl. (2) wird dann:

$$m = -\tfrac{1}{2}s'\sin(\tau + \mu)\cos^2(\tau + \mu) \tag{11}$$

nach Gl. (4) in Verbindung mit (10):

$$\tau = \operatorname{arctg}\frac{\partial y}{\partial x}; \quad \mu = -\operatorname{arctg}\frac{3s'}{s''} - \operatorname{arctg}\frac{\partial y}{\partial x} \tag{12}$$

Nachdem jetzt $\tau + \mu$ durch Gl. (10) bekannt ist, wird die Parabel absolut durch die zweite Gl. (9), ihr Scheitel durch Gl. (11) und

(9) und ihre Axenrichtung durch Gleichung (12) gemäss Gl. (3) bestimmt. Die Gleichung der Parabelaxe ist $u_1 = \text{const}$, für den Scheitel aber $u_1 = n$, folglich allgemein:

$$x \sin\mu + y \cos\mu = n \tag{13}$$

Um den Brennpunkt zu bestimmen, ist zu dieser Gleichung hinzuzufügen:

$$u = x \cos\mu - y \sin\mu = m + \tfrac{1}{2}p$$

woraus als Coordinaten desselben hervorgehen:

$$\left.\begin{aligned} x &= \quad (m + \tfrac{1}{2}p) \cos\mu + n \sin\mu \\ y &= -(m + \tfrac{1}{2}p) \sin\mu + n \cos\mu \end{aligned}\right\} \tag{14}$$

Um alle Bestimmungen auf einen beliebigen Coordinatenanfang zu übertragen, sind nur zu x, y die Coordinaten von P zu addiren.

§ 2. Osculirende Parabel einer Raumcurve.

Die Relationen der Coordinaten seien:

$$\left.\begin{aligned} u &= A\,x + B\,y + C\,z \\ u_1 &= A_1 x + B_1 y + C_1 z \\ u_2 &= A_2 x + B_2 y + C_2 z \end{aligned}\right\} \tag{15}$$

wo bzhw. die Parabelaxe, die Scheiteltangente und die Normale der Parabelfläche die Richtungen der Axen der u, u_1, u_2 haben Sind ferner $\alpha\beta\gamma$, $\alpha_1\beta_1\gamma_1$, $\alpha_2\beta_2\gamma_2$ die Richtungscosinus der Tangente, Haupt- und Binormale von s und

$$\left.\begin{aligned} a &= A\,\alpha + B\,\beta + C\,\gamma; \quad b = A\,\alpha_1 + B\,\beta_1 + C\,\gamma_1 \quad \text{etc.} \\ a_1 &= A_1\alpha + B_1\beta + C_1\beta; \quad b_1 = A_1\alpha_1 + B_1\beta_1 + C_1\gamma_1 \quad \text{etc.} \\ a_2 &= A_2\alpha + B_2\beta + C_2\gamma; \quad b_2 = A_2 a_1 + B_2\beta_1 + C_2\gamma_1 \quad \text{etc.} \end{aligned}\right\} \tag{16}$$

die Richtungscosinus der Axe, Scheiteltangente und Normale gegen die Fundamentalaxen der Curve s, so ist

$$\left.\begin{aligned} u' &= s'\alpha; \quad a' = b; \quad b' = c\,\vartheta' - a; \quad c' = -b\,\vartheta' \\ u_1' &= s'a_1; \quad a_1' = b_1; \quad b_1' = c_1\vartheta' - a_1; \quad c_1' = -b_1\vartheta' \\ u_2' &= s'a_2; \quad a_2' = b_2; \quad b_2' = e_2\vartheta' - a_2; \quad c_2' = -b^2\vartheta' \end{aligned}\right\} \tag{16}$$

wo ϑ' das Krümmungsverhältniss (d. h. Torsion dividirt durch Krümmung) bezeichnet. Differentiirt man nach diesen Formeln Gl. (1) 4 mal und setzt in allen 4 Gleichungen $u_1 = 0$, so erhält man:

$$n a_1 - p a = 0 \tag{17}$$

$$n b_1 - p b + s' a_1^2 = 0 \tag{18}$$

$$n(c_1 \vartheta' - a_1) - p(c \vartheta' - a) + 3s' a_1 b_1 + s'' a_1^2 \tag{19}$$

$$\begin{aligned} n[c_1 \vartheta'' - b_1(\vartheta'^2 + 1)] - p[e\vartheta'' - b(\vartheta'^2 + 1)] \\ + s'[4a_1(c_1\vartheta' - a_1) + 3b_1^2] + 5s'' a_1 b_1 + s''' a_1^2 = 0 \end{aligned} \tag{20}$$

Die Gl. (17) (18) gehen:

$$n c_2 = -s' a_1^2 a; \quad p c_2 = -s' a_1^3 \tag{21}$$

und die Gl. (19) (20) werden nach Einführung dieser Werte:

$$\vartheta' a_1 \frac{b_2}{c_2} + 3b_1 + \frac{s''}{s'} a_1 = 0 \tag{22}$$

$$\vartheta'' a_1^2 \frac{b^2}{c^2} + \left(\vartheta'^2 - 3 + \frac{s'''}{s'}\right) a_1^2 + 4a_1 c_1 \vartheta' + 3b_1^2 + 5\frac{s''}{s'} a_1 b_1 = 0$$

Da aber die Parabelebene durch die Tangente von s gehen muss, so hat man $a_2 = 0$, und das Orthogonalcoefficientensystem hat die Form:

$$\left.\begin{matrix} a = -\sin\varphi & b = \cos\varphi\cos\psi & c = \cos\varphi\sin\psi \\ a_1 = \cos\varphi & b_1 = \sin\varphi\cos\psi & c_1 = \sin\varphi\sin\psi \\ a_2 = 0 & b_2 = \sin\psi & c_2 = -\cos\psi \end{matrix}\right\} \tag{23}$$

so dass die Gl. (22) lauten:

$$3\,\mathrm{tg}\,\varphi\cos\psi = \vartheta'\,\mathrm{tg}\,\psi - \frac{s''}{s'} \tag{24}$$

$$\begin{aligned} \vartheta'^2 - 3 + \frac{s'''}{s'} - \vartheta''\,\mathrm{tg}\,\psi + \left(4\vartheta'\,\mathrm{tg}\,\psi + 5\frac{s''}{s'}\right)\mathrm{tg}\,\varphi\cos\psi \\ + 3(\mathrm{tg}\,\varphi\cos\psi)^2 = 0 \end{aligned}$$

woraus nach Elimination von φ:

$$5\vartheta'^2\mathrm{tg}^2\psi - \left(3\vartheta'' + \vartheta'\frac{s''}{s'}\right)\mathrm{tg}\,\psi + 3\vartheta'^2 - 9 - 4\left(\frac{s''}{s'}\right)^2 + 3\frac{s'''}{s'} = 0$$

und nach Auflösung:

$$\operatorname{tg}\psi = \frac{1}{10\vartheta'}\left(3\frac{\vartheta''}{\vartheta'} + \frac{s''}{s'} \pm \sqrt{\Theta}\right) \tag{25}$$

$$\Theta = 9\left(\frac{\vartheta''}{\vartheta'}\right)^2 + 6\frac{s''}{s'}\,\frac{\vartheta''}{\vartheta'} + 81\left(\frac{s''}{s'}\right)^3 + 120 - 60\vartheta'^2 - 60\frac{s'''}{s'}$$

Ist hiernach ψ, dann nach Gl. (24) φ berechnet, so erhält man nach Gl. (21) und (2):

$$m = s'\frac{\sin^2\varphi\cos\varphi}{2\cos\psi}; \quad n = -s'\frac{\sin\varphi\cos^2\varphi}{\cos\psi} \tag{26}$$

$$p = s'\frac{\cos^3\varphi}{\cos\psi} \tag{27}$$

und hiermit die Parabol nebst ihrer Lage relativ zum Fundamentalaxensystem von s. Die Coefficienten $A, B\,.\,.\,.$ erhält man aus den Gl. (16), nachdem $a, b, \ldots$ nach Gl. (23) in φ, ψ ausgedrückt sind.

§ 3. Beispiele.

I. Die Curve s sei die Cykloide

$$x = -x_0 + h(1 - \cos\omega); \quad y = -y_0 + h(\omega - \sin\omega)$$

Ihre Gleichungen geben differentiirt:

$$x' = s'\cos\tau = h\,\omega'\sin\omega$$

$$y' = s'\sin\tau = h\,\omega'(1 - \cos\omega)$$

woraus:

$$s' = 2h\,\omega'\sin\frac{\omega}{2}; \quad \tau = \frac{\omega}{2}$$

also

$$\omega' = 2; \quad s' = 4h\sin\frac{\omega}{2}; \quad s'' = 4h\cos\frac{\omega}{2}$$

Daher ist nach Gl. (10)

$$\operatorname{tg}[\tau + \mu] = -3\operatorname{tg}\frac{\omega}{2}$$

und nun nach Gl. (9) (11)

$$p = \frac{108\,h}{N^3}\sin^4\frac{\omega}{2}$$

$$m = \frac{6h}{N^2}\sin^2\frac{\omega}{2}\cos^2\frac{\omega}{2}; \quad n = -\frac{36h}{N^3}\sin^2\frac{\omega}{2}\cos\frac{\omega}{2}$$

wo zur Abkürzung

$$N = \sqrt{1+8\sin^2\frac{\omega}{2}}$$

gesetzt ist. Im Rückkehrpunkt verschwinden p, m, n und τ, die Parabel degenerirt in ihre Axe. Im Scheitel verschwinden m und n, Scheitel und Scheiteltangente von Parabel und Cykloide fallen zusammen, und es wird

$$p = 4h$$

gleich dem Krümmungsradius.

Nach Gl. (12) wird

$$\mu = -\operatorname{arctg}\left(3\operatorname{tg}\frac{\omega}{2}\right) - \frac{\omega}{2} = \operatorname{arctg}\frac{2\sin\omega}{1-2\cos\omega}$$

II. Die Curve s sei die Kreisevolvente

$$x = -x_0 + r(\cos\omega + \omega\sin\omega)$$
$$y = -y_0 + r(\sin\omega - \omega\cos\omega)$$

woraus durch Differentiation:

$$s'\cos\tau = r\,\omega\omega'\cos\omega; \quad s'\sin\tau = r\,\omega\omega'\sin\omega$$

also:

$$s' = r\,\omega\omega'; \quad \tau = \omega; \quad \omega' = 1$$

mithin:

$$s + s_0 = \tfrac{1}{2}r\,\omega^2; \quad s' = r\,\omega; \quad s'' = r$$

daher nach Gl. (10):

$$\operatorname{tg}(\tau+\mu) = -3\,\omega$$

Jetzt hat man:

$$p = \frac{27\,r\,\omega^4}{N^3}; \quad m = \frac{3\,r\,\omega^2}{2N^3}; \quad n = \frac{9\,r\,\omega^4}{N^3}; \quad N = \sqrt{1+9\,\omega^2}$$

$$\mu = -\operatorname{arctg}(3\omega) - \omega$$

III. Die Curve s sei die Schraubenlinie

$$x = -x_0 + r\cos\omega; \quad y = -y_0 + r\sin\omega; \quad z = -z_0 + r\,\omega\operatorname{tg}\lambda$$

dann sind der Krümmungs- und Torsionswinkel:

$$\tau = \omega \cos\lambda; \quad \vartheta = \omega \sin\lambda$$

der Krümmungsradius:

$$s' = \frac{r}{\cos^2\lambda}$$

woraus:

$$\vartheta' = \operatorname{tg}\lambda; \quad \vartheta'' = 0; \quad s'' = 0$$

und nach Gl. (25):

$$\operatorname{tg}\psi = \sqrt{\frac{3}{5}}\sqrt{3\cot^2\lambda - 1}; \quad \cos\psi = \sqrt{\frac{5}{9\cot^2\lambda + 2}} \tag{28}$$

und nach Gl. (24):

$$\operatorname{tg}\varphi = \sqrt{\frac{3 - \operatorname{tg}^2\lambda}{75}}\sqrt{9\cot^2\lambda + 2}$$

$$\cos\varphi = \sqrt{\frac{75}{27\cot^2\lambda + 72 - 2\operatorname{tg}^2\lambda}}$$

Setzt man zur Abkürzung

$$L^2 = -3 - \operatorname{tg}^2\lambda; \quad M^2 = 9 + 2\operatorname{tg}^2\lambda; \quad N^2 = 27 + 72\operatorname{tg}^2\lambda - 2\operatorname{tg}^4\lambda$$

so wird

$$p = \frac{75\sqrt{15} \,.\, r M \operatorname{tg}^2\lambda}{N^3\cos^2\lambda}$$

$$m = \frac{\sqrt{15}}{2}\frac{r L^2 M^3}{N^3\cos^2\lambda}; \quad n = -15\sqrt{3}\frac{L M^2 \operatorname{tg}\lambda}{N^3\cos^2\lambda}$$

Aus Gl. (28) ist zu ersehen, dass $\dot{\psi}$ imaginär wird für $\lambda > \frac{2}{3}R$, Eine steilere Schraubenlinie wird also von keiner Parabel osculirt.

Im Grenzfalle, wo

$$\cos\lambda = \tfrac{1}{2}; \quad \sin\lambda = \tfrac{1}{2}\sqrt{3}$$

ist, wird $\varphi = 0$; $\psi = 0$, die Scheiteltangente der Parabel fällt mit der Tangente, die Normale ihrer Ebene mit der Hauptnormale und die Parabelaxe mit der Binormale von s (letztere in umgekehrter Richtung) zusammen. Ferner ist

$$L = 0; \quad M = \sqrt{15}; \quad N = 15$$

$$p = 2r; \quad m = 0; \quad n = 0$$

§ 4. Specielles über die Bewegung der osculirenden Parabel einer ebenen Curve.

Im Vorhergehenden ist die osculirende Parabel nur relativ zu einem Punkte der Curve bestimmt worden. Will man sie als fortrückend mit ihrem Berührungspunkte auffassen, so muss man zu ihrer Bestimmung durch ein festes Coordinatensystems übergehen. Dazu ist indes nichts weiter nötig als 1) in den Coordinateurelationen (3) (15) für x, y, z zu setzen x_0+x, y_0+y, z_0+z, wo x_0, y_0, z_0 als Coordinaten des Berührungspunkts die Gleichungen der Curve zu erfüllen haben, also gegebene Functionen einer Unabhängigen sind, während x, y, z durch die Lösung des Problems bestimmt werden, 2) die Richtungswinkel der Fundamentalaxen der Curve, also τ, α, β, γ nicht mehr einem Punkte (xyz), sondern dem Punkte $(x_0 y_0 z_0)$ entsprechend darzustellen, weil nämlich $\partial(x_0+x)$ für $x =$ const mit nachfolgendem $x = 0$ gleich ∂x_0 ist, wenn nur x_0 und x_0+x der Curve entsprechen.

Im übrigen bleiben alle Formeln in unveränderter Geltung und drücken nach Vollzug der 2 genannten Aenderungen den Ort der osculirenden Parabel sowie die Orte des Scheitels und Brennpunkts aus.

Man kann nun das Problem umkehren und aus irgend welchen Bestimmungen der osculirenden Parabel auf die der osculirten Curve zu schliessen versuchen. Beim Krümmungskreise einer ebenen Curve ist der Radius als Function des Bogens ausreichend zur Bestimmung der Curve; der Parameter der Parabel ist es nicht, es müssen 2 Stücke gegeben sein. Lässt man deren Beziehung allgemein, so sind die Integrationen nicht ausführbar.

Bemerkenswert ist der Fall, wo μ lineare Function von τ ist. Sei

$$\mu = \varepsilon\tau + \zeta$$

dann gibt die Integration von Gl. (10):

$$\sin(\tau+\mu) = k s'^{-\frac{1+\varepsilon}{3}} \quad (k \text{ const}) \tag{28}$$

woraus nach Einführung in Gl. (9):

$$p = k^3 s'^{-\varepsilon} \tag{29}$$

Diese Gleichung zeigt, dass p und μ nur gleichzeitig constant sein können.

Aus Gl. (28) gehen ferner sogleich die Gleichungen der Curve hervor:

$$x = k^{\frac{3}{1+\varepsilon}} \int \{-\sin(\tau+\mu)\}^{-\frac{3}{1+\varepsilon}} \cos\tau \,\partial\tau$$

$$y = k^{\frac{3}{1+\varepsilon}} \int \{-\sin(\tau+\mu)\}^{-\frac{3}{1+\varepsilon}} \sin\tau \,\partial\tau$$

beispielsweise für $\varepsilon = 2;\quad \tau + \frac{1}{3}\zeta = \varphi$:

$$x\cos\tfrac{1}{3}\zeta - y\sin\tfrac{1}{3}\zeta = \tfrac{1}{6}\log\{\sin^2 3\varphi(3-4\sin^2\varphi)^3\}$$

$$x\sin\tfrac{1}{3}\zeta + y\cos\tfrac{1}{3}\zeta = \frac{1}{2\sqrt{3}}\log\frac{\sqrt{3}+\operatorname{tg}\varphi}{\sqrt{3}-\operatorname{tg}\varphi}$$

XI.

Teilung eines beliebigen Winkels in eine beliebige Anzahl gleicher Teile mit Hülfe von Modellen.

Von

Arthur Strauss,

Lehrer der Mathematik am Realprogymnasium zu Schwelm.

Vorwort.

Um die hier in Frage kommenden Constructionen auszuführen, habe ich mich nicht auf die sonst üblichen Hülfsmittel beschränken können.

Es liegt da die Frage sehr nahe: Ist denn die Zahl der Instrumente, deren wir uns beim mathematischen Zeichnen bedienen dürfen, eine unbegrenzte oder haben wir nur eine beschränkte Auswahl? —

Die Antwort hierauf ergiebt sich von selbst, wenn wir die Bedeutung der Hülfsmittel in's Auge fassen.

Wir wissen: jede Kante des Lineals stellt eine gerade Linie vor, die wir uns theoretisch construirt denken, etwa indem wir eine beliebige Linie zwischen zwei Punkten ausspannten.

Ferner betrachten wir die Fläche des Papiers, auf der wir planimetrische Constructionen ausführen, als eine Ebene, die in

unserer Vorstellung vielleicht in der Weise construirt werden ist, dass wir über zwei sich schneidende gerade Linien eine dritte gleiten liessen.

Wir sehen also: wir haben es in beiden Fällen mit — mehr oder weniger unvollkommenen — Darstellungen mathematisch construirter Gebilde zu tun und benutzen dieselben als bereits ausgeführte Hülfsconstructionen. Mit demselben Rechte werden wir natürlich das Modell einer jeden mathematischen Zeichnung als Hülfsmittel anwenden dürfen.

So erforderten die Constructionen, die hier behandelt werden sollen, zunächst die Anwendung des Modells eines rechten Winkels.

Die Benutzung eines Winkelmasses beim mathematischen Zeichnen ist ja eigentlich nichts neues. Während man sich jedoch bisher dieses Instrumentes nur der Bequemlichkeit wegen bediente und ihm, ich möchte sagen, eine geringere mathematische Wertigkeit als etwa dem Lineal zumass, so ist dasselbe, wie ich schon bemerkte, für die hier auszuführenden Zeichnungen unbedingt notwendig und nach obigen Bemerkungen auch genau von derselben mathematischen Wertigkeit wie das Lineal.

Das Winkelmass setzt uns zunächst in den Stand, eine Curve zu construiren, die uns unmittelbar die Dreiteilung eines beliebigen Winkels ergiebt. Das Modell dieser Curve kann ich dann wieder benutzen, um eine zweite Curve für die Fünfteilung, das der zweiten, um eine dritte für die Siebenteilung zu construieren u. s. w. Mit Hülfe der ungeraden und der Zweiteilung ist es mir nunmehr möglich, jeden beliebigen Winkel in eine beliebige Zahl gleicher Teile zu teilen.

Aus dem Gesagten geht allerdings hervor, dass wir es hier mit ziemlich umständlichen Constructionen zu tun haben. Es ist jedoch zu bedenken, dass die angedeuteten Schwierigkeiten der Mechaniker bei der Construction der Curvenmodelle zu überwinden hat, ähnlich wie bei der Herstellung des Lineals.

Ist uns ein Curvenmodell gegeben, so lässt sich, wie wir unten sehen werden, die entsprechende Teilung mit der grössten Leichtigkeit ausführen.

Der Winkelteller.

Die wesentlichsten Bestandteile des Instruments, welches ich hier anwende, sind das Lineal l (Fig. I) und das Winkelmass w. TNL ist ein rechter Winkel. Der Punkt M liegt auf der Verlängerung des Schenkels LN, und zwar ist $LN = NM$. Der kurze Schenkel bei M dient dazu, diesen Punkt als Ecke festzulegen. Ausserdem befindet sich bei M eine Feder p. Fig. II stellt einen verticalen Durchschnitt dieser Feder dar. In die nach oben spitz zulaufende Vertiefung K ragt der an beiden Enden zugespitzte und sonst vollständig frei bewegliche Bleistift b mit der oberen Spitze hinein, so dass die Feder die untere Spitze des Bleistifts genau in die den Punkt M bildende Ecke drückt. Ein kleiner Längsstab s, etwas niedriger als das Lineal l, ist mit diesem durch einen Querstab q, welcher mit den Schrauben n fest an das Lineal angeschrieben ist, in der Weise verbunden, dass zwei Stifte von s in zwei entsprechende Oeffnungen o des Querstabes q lose hineinragen. Wir sind also im Stande, die untere Fläche des Lineals l unabhängig von dem Längsstab s in der Ebene festzulegen. An s befindet sich eine Feder f, welche den Schenkel TN des rechten Winkels TNL gegen den Endpunkt B der Geraden BA (Kante des Lineals) drückt. Der Ausschnitt a am Winkelmass ist für den Finger bestimmt, mit dem der Zeichner das Winkelmass in der Richtung von A nach B fortzuschieben und dabei den Punkt L gegen AB zu drücken hat. Das Nähere betreffs der Anwendung des beschriebenen Instruments lehrt die nachfolgende Ausführung.

I. Die Dreiteilung.

Analysis.

Angenommen, der Winkel ABC (Fig. III) sei durch die Geraden BD und BC in drei gleiche Teile geteilt. Wir nehmen eine beliebige Strecke in den Zirkel und schlagen um B einen Bogen. Dieser schneide die Linien BA, BD, BE und BC bzbw. in den Punkten F, G, H, J. Wir ziehen nun die Sehnen FG und GH und fällen von B auf FG das Lot; der Fusspunkt desselben heisse K. Es sei

$$FK = m$$

dann ist

$$FG = GH = 2m$$

Es sei ferner Winkel TNL ein rechter und

$$LN = NM = m$$

Den rechten Winkel lassen wir sich so in der Ebene in der Richtung von A nach B fortbewegen, dass L fortwährend auf BA verbleiht, und der Schenkel TN beständig durch B geht. Dann beschreibt der Punkt M eine Curve MP, die durch G hindurchgeht. Nehmen wir ferner an, der Winkel ABC sei durch die Linie BQ halbirt und RS eine Parallele zu BQ im Abstande m. Dann geht auch diese Parallele durch den Punkt G, da der Abstand des Punktes G von BQ gleich

$$GV = m$$

ist. Es fällt mithin der Punkt G mit dem Schnittpunkte der Curve MP und der geraden Linie RS zusammen Diese Betrachtung ergieht uns folgende

Construction.

Wir legen die unteren Flächen des Lineals und des Winkelmasses in der Ebene des Papiers so fest, wie es die Figur I darstellt, d. h. so, dass L auf BA und B auf TN zu liegen kommt.

Dann marquiren wir die Richtungen BA, TN und LN (Fig. IV) und bewegen den rechten Winkel TNL in der Richtung von A nach B so fort, dass die Punkte L und B bzhw. auf BA und TN verbleiben. Es beschreibt alsdann Punkt M (d. h. die Spitze des Bleistifts) eine Curve M_1P_1, die wir die Teilcurve I. Ord. nennen wollen. Wir verlängern nun die den Richtungen nach marquirten Linien BA, TN und LN, bis sie sich schneiden, und erhalten so den festen Punkt B und die der Länge nach constante Linie

$$LN = m$$

B heisse der Scheitel, BL die Basis und

$$LN = m$$

die Amplitude der Curve M_1P_1. Wir tragen jetzt an BA in B den gegebenen Winkel

$$\beta = ABC$$

an und halbiren denselben. Zu der Halbirungslinie ziehen wir im Abstande m die Parallele RS, für die wir die Bezeichnung „Bestimmungsgerade“ einführen wollen. Wir verbinden den Schnittpunkt G der Bestimmungsgeraden RS und der Curve M_1P_1 mit B durch eine

Gerade und schlagen mit der Zirkelöffnung BG um B einen Kreisbogen, der die Schenkel BA und BC des Winkels ABC bzw. in den Punkten F und J schneide. Es ist dann die zu FG gehörige Sehne gleich der doppelten Amplitude $2m$. Tragen wir nun von G aus den Bogen FG bis H ab und ziehen die Gerade BH, so ist der Winkel

$$\beta = ABC$$

durch BG und BH in 3 gleiche Teile geteilt.

Der Beweis ergiebt sich aus der Analysis.

II. Die Fünfteilung.

Es wird in diesem Falle das Lineal l des Winkelteilers (Fig. I) durch das Modell der Teilcurve I. Ord. (Fig. IV) ersetzt. Wir legen zuerst in der Ebene des Papiers die Basisrichtung BL_1 und den Scheitel B der Teilcurve I. Ord., letzteren als Schnittpunkt der Geraden P_1B und L_1B_1 fest und lassen dann den rechten Winkel des Winkelteilers sich in der Ebene so fortbewegen, dass der eine Schenkel wieder beständig durch B (Fig. IV) geht, der Endpunkt L der Amplitude LN aber fortwährend auf der Curve M_1P_1 verbleibt. Während dann L den Weg M_1P_1 zurücklegt, beschreibt der Punkt M des Winkelteilers die Curve M_2P_2. Es sei dies die Teilcurve II. Ord. Wir tragen nun an BA im Punkte B den gegebenen Winkel

$$\beta = ABC$$

an, halbiren denselben und ziehen die Bestimmungsgerade RS. Diese schneide die Curve M_2P_2 im Punkte G_2. Dann schlagen wir mit BG_2 um B einen Bogen, der BA und BC bzw. in F und J schneide, und tragen in diesen Bogen von F und J aus die doppelte Amplitude $2m$ nach einander bis G_1, H_1 und H_2 als Sehne ein. Es wird dann der Winkel ABC durch die Geraden BG_1, BG_2, BH_2 und BH_1 in fünf gleiche Teile geteilt.

Der Beweis ergiebt sich mit Leichtigkeit aus der Entstehungsweise der Teilcurve II. Ord. M_2P_2.

III. Die Mehrteilung.

Ebenso wie wir mit Hülfe der Teilcurve I. Ord. diejenige II. Ord. erhielten, gelangen wir von dieser zur Teilcurve III. Ord. und in gleicher Weise nach einander zu den Teilcurven IV., V.,

VI. Ord. u. s. w. Die Schnittpunkte dieser Curven und der Bestimmungsgeraden ergeben uns dann die Sieben-, Neun-, Elf-, Dreizehnteilung u. s. w. Allgemein ausgedrückt, können wir also mit der Teilcurve $n$ter Ordnung die Teilung eines Winkels in $(2n+1)$ gleiche Teile ausführen.

IV. Der Verlauf der Teilcurven und die Bestimmung der Teilpunkte eines Winkels.

Fig. VI giebt uns ein Bild von der Gestalt der Teilcurven der ersten 3 Ordnungen. S ist der Scheitel, SL die Basisrichtung und AL die doppelte Amplitude dieser Curven. Die Winkel, die wir in gleiche Teile teilen sollen, dehnen sich vom festen Schenkel SL aus von rechts nach links, d. h. in der Richtung des Pfeils bei A aus.

Fassen wir die Punkte D und F auch als Schnittpunkte der Curven I und III und der Basis auf, so finden wir, dass die Teilcurve I. Ord. in 1 Punkte, die Curve II. Ord in 2 Punkten und allgemein die Curve $n$ter Ord. in n Punkten von der Basis geschnitten wird. Die Teilcurven winden sich also an der einen Seite um den Scheitel herum, und zwar wächst jede höhere Ordnung um eine halbe Windung. An der anderen Seite dagegen, d. h. über A, A_1, A_2, . . . hinaus erstrecken sich die Curven ins Unendliche.

Wir wollen nun die Schnittpunkte der Bestimmungsgeraden eines Winkels und der Teilcurven die Teilpunkte des Winkels nennen, und zwar den Schnittpunkt der Teilcurve $n$ter Ord. den Teilpunkt $n$ter Ordn. Da die Teilcurven von jeder Geraden in mehreren (reellen oder imaginären) Punkten geschnitten werden, so ist es von Wichtigkeit, die Lage der Teilpunkte oder vielmehr die Bestimmungsgerade genauer zu definiren.

Wir wissen: die Entfernung der Bestimmungsgeraden von den Halbirungslinien der Winkel ist gleich der Amplitude m; sie sind deshalb sämtlich Tangenten an den Kreis, den ich mit m um den Scheitel S schlage. Ihre Richtung ist die der entsprechenden Halbirungslinie und ihr Anfangspunkt derjenige, welcher dem Anfangspunkte der Halbirungslinie, dem Scheitel S, entspricht, d. h. von diesem die Entfernung m hat; das ist aber der Berührungspunkt der Bestimmungsgeraden und des Kreises um S. Die Bestimmungsgerade eines Winkels ist demnach, genauer definirt, die Tangente an den Kreis um den Scheitel S, die, vom Berührungspunkte ausgehend,

der Halbirungslinie des Winkels parallel und gleichgerichtet ist und, vom Scheitel aus gesehen, die Teilcurven rechts von der Halbirungslinie schneidet.

Betrachten wir daraufhin die 4 Tangenten FM, GN, DP und HQ, von denen zwei, nämlich FM und DP, auf der Basis senkrecht stehen, während die beiden anderen GN und HQ derselben parallel laufen. Es ergiebt sich dann, dass FM die Bestimmungsgerade der Winkel $\pi, 5\pi, 9\pi, \ldots$, GN die Bestimmungsgerade der Winkel $2\pi, 6\pi, 10\pi, \ldots$, DP diejenige der Winkel $3\pi, 7\pi, 11\pi, \ldots$ und schliesslich HQ die Bestimmungsgerade der Winkel $4\pi, 8\pi, 12\pi, \ldots$ ist.

Daraus folgt für die Teilcurve I. Ord.: B, C, D sind die Teilpunkte der Winkel π, 2π, 3π. Die Curve zerfällt demnach in 3 Teile: das Stück ∞AB enthält die Teilpunkte der Winkel von 0 bis π, BC diejenigen der Winkel von π bis 2π und CD die Teilpunkte der Winkel von 2π bis 3π.

Ebenso enthält das Stück ∞A_1B_1 der Teilcurve II. Ord. die Teilpunkte der Winkel von 0 bis π, B_1C_1 die Teilpunkte der Winkel von π bis 2π, C_1D_1 diejenigen der Winkel von 2π bis 3π, D_1E diejenigen der Winkel von 3π bis 4π und EF die Teilpunkte der Winkel von 4π bis 5π.

In gleicher Weise finden wir: das Curvenstück ∞A_2B_2 der Teilcurve III. Ord. enthält die Teilpunkte der Winkel von 0 bis π und die Stücke B_2C_2, C_2D_2, D_2E_1, E_1F_1, F_1G, GD bzhw. die Teilpunkte der Winkel von π bis 2π, von 2π bis 3π, von 3π bis 4π, von 4π bis 5π, von 5π bis 6π, von 6π bis 7π.

Wir können also theoretisch mit Hülfe einer Curve $n$ter Ord. alle Winkel von 0 bis $(2n+1)\pi$ in $(2n+1)$ gleiche Teile teilen.

Praktisch lässt sich dies jedoch nicht durchführen, schon deswegen, weil wir die Curven nach beiden Richtungen hin nur unvollständig construiren können. Für die Ausführung der Teilung ist dieser Umstand ja auch bedeutungslos, da wir durch Zweiteilung bzhw. wiederholte Zweiteilung die Teilung eines grösseren Winkels stets auf diejenige eines kleineren zurückführen können, und umgekehrt.

Anmerkung 1. Es ist selbstverständlich, dass die Amplituden aller Curven, die successive auseinander entstehen, einander gleich

sind. Wir wollen alle derartigen Curven mit gleicher Amplitude correspondirende Curven und eine ununterbrochene Reihe solcher correspondirenden Curven eine Curvenreihe nennen.

Jede Curvenreihe ist natürlich unendlich gross.

Anmerkung 2. Bei der Herstellung der Modelle der Curven II. und höherer Ord. stossen wir auf gewisse Schwierigkeiten, die sich auf verschiedene Weise überwinden lassen. Wie z. B. Fig. VI zeigt, werden wir, damit der Schenkel TN des rechten Winkels TNL durch den Punkt B gelegt werden kann, das Modell P_1LL_1WZB der Curve I. Ord. P_1L in die beiden Teile YLL_1WZBC und P_1YXB zerlegen.

Wir lassen dann den Punkt L sich zunächst auf dem Curvenstück LY und darauf, nach Einschaltung des Vierecks P_1YXB, auf YP_1 fortbewegen.

XII.

Ueber das Problem eine Fläche zweiten Grades in einem der Gestalt und Grösse nach gegebenen Kegelschnitte zu schneiden.

Von

M. Krewer.

Das Problem, eine Oberfläche 2ten Grades in einem der Gestalt und Grösse nach gegebenen Kegelschnitte zu schneiden. bietet trotz eines elementaren Charakters doch viel Interessantes. Die Betrachtung von sehr mannigfaltigen Combinationen von Flächen 2ter Ordnung und Kegelschnitten löst sich in die von Raumcurven 3ter Ordnung auf. Dieselben hangen, falls der gegebene Kegelschnitt eine Ellipse, Hyperbel oder Kreis ist, ihrer Species nach nur von der gegebenen Fläche ab, degeneriren, falls die Fläche Rotationsfläche ist, in 3 Gerade und gehen in ebene Curven 3ter Ordnung über, wenn der Kegelschnitt eine Parabel oder gleichseitige Hyperbel ist. Eine Ausnahme bildet das Paraboloid, bei dem die Untersuchung direct an einer sich ergebenden Curve höherer Ordnung aufgestellt ist. In den weniger complicirten Fällen lässt sich allgemein die Frage entscheiden, wann die gegebene Fläche in einem gegebenen Kegelschnitte geschnitten werden kann oder nicht. Es lassen sich auch die Beweise vieler Sätze der analytischen Geometrie als specieller Fälle der allgemeinen Lösung des Problems führen; dieselben sind jedoch hier ihrer Einfachheit wegen unterlassen worden.

---

§ 1. Reduction des Problems, wenn die gegebene Fläche ein Ellipsoid, Hyperboloid oder Kegel ist, auf die Discussion einer Raumcurve dritter Ordnung.

Es sei eine Fläche 2ten Grades gegeben, deren Gleichung

$$ax^2 + by^2 + cz^2 - 1 = 0$$

ist, welche je nachdem a, b, c positiv oder negativ sind, ein Ellipsoid, ein ein- oder zweischaliges Hyperboloid darstellt. Diese Fläche, welche wir im Folgendem durch das Symbol $[abc]$ bezeichnen wollen, soll durch eine Ebene in einem der Gestalt und Grösse nach gegebenen Kegelschnitte geschnitten werden. Diese Ebene sei durch die Gleichung

$$ux + vy + wz - p = 0$$

gegeben, und wir wollen sie durch das Symbol $[uvw]$ bezeichnen Um den gemeinsamen Schnitt der Fläche $[abc]$ und der Ebene $[uvw]$ zu erhalten, führen wir ein neues System mit den Variablen ξ, η, ζ ein, dessen Mittelpunkt der Fusspunkt des Lotes von dem ursprünglichen Coordinatenanfang oder Mittelpunkte der Fläche auf die Ebene $[uvw]$ ist und dessen ζ-Achse die Richtung dieses Lotes hat.

$$x = pu + f\xi + f'\eta + f''\zeta$$
$$y = pv + g\xi + g'\eta + g''\zeta$$
$$z = pw + h\xi + h'\eta + h''\zeta$$

Hier ist unserer Voraussetzung nach $f'' = u$, $g'' = v$, $h'' = w$.

Transformiren wir die Gleichung der Fläche $[abc]$ in Bezug auf die neuen Coordinaten und setzen in der so erhaltenen Gleichung $\zeta = 0$, so haben wir die Gleichung des durch den Schnitt der Ebene $[uvw]$ und der Fläche $[abc]$ hervorgebrachten Kegelschnittes:

$$a(pu + f\xi + f'\eta)^2 + b(pv + g\xi + g'\eta)^2 + c(pw + h\xi + h'\eta)^2 - 1 = 0$$

Schreiben wir die Gleichung des Kegelschnittes in der Form:

$$\mathfrak{A}\xi^2 + \mathfrak{B}\eta^2 + 2\mathfrak{C}\xi\eta + 2\mathfrak{D}\xi + 2\mathfrak{E}\eta + \mathfrak{F} = 0$$

so ist

$$\mathfrak{A} = af^2 + bg^2 + ch^2$$
$$\mathfrak{B} = af'^2 + bg'^2 + ch'^2$$
$$\mathfrak{C} = aff' + bgg' + chh'$$
$$\mathfrak{D} = p(afu + bgv + chw)$$
$$\mathfrak{E} = p(af'u + bg'v + ch'w)$$
$$\mathfrak{F} = p^2(au^2 + bv^2 + cw^2) - 1$$

Ein Kegelschnitt ist vollständig bestimmt, wenn seine Achsen A und B bestimmt sind, oder, was dasselbe ist, wenn die Ausdrücke $\frac{1}{A^2}+\frac{1}{B^2}$ und $\frac{1}{A^2}\cdot\frac{1}{B^2}$ feste Werte haben. Aus den Ausdrücken $\frac{1}{A^2}+\frac{1}{B^2}$ und $\frac{1}{A^2}\cdot\frac{1}{B^2}$ ist ein neuer zu bilden, der für die folgenden Entwickelungen geeigneter ist:

$$\left(\frac{1}{A^2}+\frac{1}{B^2}\right)^2 : \left(\frac{1}{A^2}\cdot\frac{1}{B^2}\right) = \left(\frac{B}{A}+\frac{A}{B}\right)^2$$

In dem gegebenen Kegelschnitte seien diese Ausdrücke bestimmt, indem

$$\left(\frac{1}{A^2}+\frac{1}{B^2}\right) = R \quad \text{und} \quad \left(\frac{A}{B}+\frac{B}{A}\right)^2 = S$$

ist. Sollen nun die Achsen des durch den Schnitt der Ebene $[u\,v\,w]$ und der Fläche $[a\,b\,c]$ entstandenen Kegelschnittes A' und B' gleich A und B sein, so muss

$$\frac{1}{A'^2}+\frac{1}{B'^2} = R \quad \text{und} \quad \left(\frac{A'}{B'}+\frac{B'}{A'}\right)^2 = S$$

sein. Da nun A' und B' durch u, v, w, p sich ausdrücken lassen, so werden sich 2 Bedingungsgleichungen für diese Variablen ergeben. Um die Ausdrücke

$$\frac{1}{A'^2}+\frac{1}{B'^2} = \frac{(\mathfrak{A}+\mathfrak{B})(\mathfrak{A}\mathfrak{B}-\mathfrak{C}^2)}{\delta} \quad \text{und} \quad \left(\frac{A'}{B'}+\frac{B'}{A'}\right)^2 = \frac{(\mathfrak{A}+\mathfrak{B})^2}{\mathfrak{A}\mathfrak{B}-\mathfrak{C}^2}$$

zu bilden, müssen wir zuerst die Discriminante des Kegelschnittes berechnen

$$\delta = p^2 \begin{vmatrix} af^2+bg^2+ch^2 & afu+bgv+chw & aff'+bgg'+chh' \\ aff'+bgg'+chh' & af'u+bg'v+ch'w & af'^2+bg'^2+ch'^2 \\ afu+bgv+chw & au^2+bv^2+cw^2 & af'u+bg'v+ch'w \end{vmatrix}$$

$$+ \begin{vmatrix} af^2+bg^2+ch^2 & aff'+bgg'+chh' \\ aff'+bgg'+chh' & af'^2+bg'^2+ch'^2 \end{vmatrix}$$

$$\delta = -p^2 abc\left\{ \begin{vmatrix} f & f' & u \\ g & g' & v \\ h & h' & w \end{vmatrix} \right\}^2 - (aff'+bgg'+chh')^2$$

$$+ (af^2+bg^2+ch^2)(af'^2+bg'^2+ch'^2)$$

Da

$$u = gh' - hg', \quad v = hf' - fh', \quad w = fg' - gf'$$

so ist

$$\delta = -p^2abc + bcu^2 + acv^2 + abw^2$$

Ferner ist

$$f^2 + f'^2 = 1 - u^2 = v^2 + w^2, \quad g^2 + g'^2 = u^2 + w^2, \quad h^2 + h'^2 = u^2 + v^2$$

$$\mathfrak{A} + \mathfrak{B} = a(v^2 + w^2) + b(u^2 + w^2) + c(u^2 + v^2)$$

$$\mathfrak{A}\mathfrak{B} - \mathfrak{C}^2 = bcu^2 + acv^2 + abw^2$$

Jetzt können wir die Ausdrücke $\frac{1}{A'^2} + \frac{1}{B'^2}$ und $\left(\frac{A'}{B'} + \frac{B'}{A'}\right)^2$ bilden. Zugleich sehen wir den Grund ein, warum $\frac{1}{A'^2} \cdot \frac{1}{B'_2}$ durch $\left(\frac{A'}{B'} + \frac{B'}{A'}\right)^2$ ersetzt wurde. Denn, da

$$\frac{1}{A'^2} \cdot \frac{1}{B'^2} = \frac{(\mathfrak{A}\mathfrak{B} - \mathfrak{C}^2)^3}{\delta^2}$$

ist, würden wir sechste Potenzen von u, v, w erhalten, was durch Einführung des Ausdrucks

$$\left(\frac{A'}{B'} + \frac{B'}{A'}\right)^2 = \frac{(\mathfrak{A} + \mathfrak{B})^2}{\mathfrak{A}\mathfrak{B} - \mathfrak{C}^2}$$

vermieden ist

Wir führen nun folgende Bezeichnungen ein, die sich später als zweckmässig erweisen.

$$\mathfrak{A} + \mathfrak{B} = a(v^2 + w^2) + b(u^2 + w^2) + c(u^2 + v^2) = U$$

$$\mathfrak{A}\mathfrak{B} - \mathfrak{C}^2 = bcu^2 + acv^2 + abw^2 = \ldots\ldots V$$

$$\delta = -p^2abc + bcu^2 + acv^2 + abw^2 = \ldots\ldots W$$

Alsdann nehmen die Bedingungsgleichungen für u, v, w, p die Form an:

$$RW - UV = 0, \quad SV - U^2 = 0, \quad T = u^2 + v^2 + w^2 = 1$$

Diese Gleichungen sind höchstens vom 4ten Grade in Bezug auf die Veränderlichen u, v, w. Wir ersetzen die directe Untersuchung der durch die Bedingungsgleichungen dargestellten Curve durch die Untersuchung einer Raumcurve dritter Ordnung, welche zu diesen Gleichungen und den Grössen u, v, w in einer einfachen Beziehung steht. Führen wir nämlich die Substitution ein:

$$\frac{u^2}{p^2} = x, \quad \frac{v^2}{p^2} = y, \quad \frac{w^2}{p^2} = z$$

so sind die Ausdrücke $\frac{U}{p^2}, \frac{V}{p^2}, \frac{W}{p^2}, \frac{T}{p^2}$ linear in Bezug auf x, y, z. Setzen wir $\lambda = -U$, so folgt:

$$\frac{U}{p^2} + \lambda\frac{T}{p^2} = 0, \quad \frac{SV}{p^2} + \lambda\frac{U}{p^2} = 0, \quad \frac{RW}{p^2} + \lambda\frac{V}{p^2} = 0$$

Die Division durch p^2 ist nicht erlaubt, wenn $p = 0$ ist, also wenn die Schnittebene $[uvw]$ durch den Coordinatenanfang geht, in welchem Falle ihre Lage direct aus den obigen Gleichungen zu bestimmen ist. Es ist alsdann $W = U$ und und die Gleichungen nehmen die Gestalt an:

$$U = R, \quad V = \frac{R^2}{S}, \quad T = 1$$

Aus diesen 3 Gleichungen sind die Werte u, u, w zu bestimmen. Die 3 obigen Gleichungen stellen 3 projective Ebenenbüschel dar, welche eine Raumcurve 3 ter Ordnung erzeugen. Einem Punkte x', y', z' der Raumcurve entsprechen die Werte

$$u = \pm p\sqrt{x'}, \quad v = \pm p\sqrt{y'}, \quad w = \pm p\sqrt{z'}$$

also die Ebene

$$\pm\sqrt{x'}\,.\,x \pm \sqrt{y'}\,.\,y \pm \sqrt{z'}\,.\,z - 1 = 0$$

wo x, y, z die Veränderlichen sind. Die Gleichung stellt 8 symmetrisch zu den Coordinatenebenen gelegene Ebenen dar, entsprechend den 8 Zeichencombinationen von $\pm\sqrt{x'}$, $\pm\sqrt{y'}$, $\pm\sqrt{z'}$.

Ferner entsprechen nach dieser Abbildung nur Punkten der Raumcurve, die im 1 ten (pos.) Octanten liegen, reelle Ebenen. Die zu untersuchende Raumcurve ist als Schnitt 3 ter projectiver Ebenenbüschel gegeben:

A)
1) $(b+c)x + (a+c)y + (a+b)z + \lambda(x+y+z) = 0$
2) $R(bcx + acy + abz - abc) + \lambda(bcx + acy + abz) = 0$
3) $S(bcx + acy + abz) + \lambda\{(b+c)x + (a+c)y + (a+b)z\} = 0$

Die Achsen dieser Büschel sind zu bestimmen aus den Gleichungen:

1) $(b+c)x + (a+c)y + (a+b)z = 0; \quad x+y+z = 0$
2) $R(bcx + acy + abz - abc) = 0; \quad bcx + acy + abz = 0$
3) $S(bcx + acy + abz) = 0; \quad (b+c)x + (a+c)y + (a+b)z = 0$

Ist $B = iB_1$ und $A = B_1$, so ist

$$R = \frac{1}{A^2} + \frac{1}{B^2} = \frac{1}{A^2} - \frac{1}{B_1^2} = 0$$

Alsdann ist

$$S = R : \frac{1}{A^2 B^2} = 0$$

Wenn $R = S = 0$ ist, so reduciren sich die Gleichungen

$$RW - UV = 0 \quad \text{und} \quad SV - U^2 = 0$$

auf die Gleichung $\qquad U = 0$

In diesem, die gleichseitige Hyperbel charakterisirenden Falle, müssen wir die Ausdrücke $\frac{1}{A^2} + \frac{1}{B^2}$ und $\frac{1}{A^2} \cdot \frac{1}{B^2}$ benutzen, weil $R = 0$ ist und wir durch Multiplication mit R die 2te Bedingungsgleichung verwischen.

Sehen wir also von dem speciellen Falle der gleichseitigen Hyperbel ab, so sind die Achsen der 3 Büschel gegeben durch die Gleichungen:

1) $(b+c)x + (a+c)y + (a+b)z = 0; \quad x + y + z = 0$

2) $bcx + acy + abz - abc = 0, \quad bcx + acy + abz = 0$

3) $bcx + acy + abz = 0; \quad (b+c)x + (a+c)y + (a+b)z = 0$

Aus einer eingehenden Betrachtung der gegenseitigen Lage der Ebenenbüschel und ihrer Achsen unter Berücksichtigung ihres Verhältnisses zu der unendlich fernen Ebene ergiebt sich, dass die zu untersuchende Raumcurve als Schnitt von 3 Flächen zu erhalten ist: einem Paraboloid, parabolischen Cylinder und Kegel. Sie enthält 3 unendlich ferne Punkte, von denen aber 2 zusammenfallen, so dass die unendlich ferne Gerade die Raumcurve berührt. Nach Leydewitz ist also diese Raumcurve eine durch den Coordinatenanfang gehende parabolische Hyperbel.

Ist die gegebene Fläche ein Kegel, dessen Gleichung

$$ax^2 + by^2 + cz^2 = 0$$

ist, so ist die Discriminante

$$\delta = -p^2 abc$$

und wir gelangen durch dieselbe Substitution, wie pag. 188 zur Discussion einer Raumcurve 3ter Ordnung, welche durch die 3 projectiven Ebenenbüschel

$$\text{B)}\quad \begin{aligned} &1)\quad (b+e)x+(a+c)y+(a+b)z+\lambda(x+y+z)=0\\ &2)\quad R(ox+oy+oz-abc)+\lambda(bcx+acy+abz)=0\\ &3)\quad S(bcx+acy+abz)+\lambda\{(b+c)x+(a+c)y+(a+b)z\}=0 \end{aligned}$$

erzeugt wird. Auch hier muss der Fall der gleichseitigen Hyperbel ausgeschlossen werden. Durch ganz analoge Betrachtungen, wie vorbin, gelangen wir zu dem Resultate, dass diese Raumcurve eine kubische Parabel ist.

§ 2. Die Darstellung der Raumcurve durch einen Parameter und ihre Beziehung zu dem gegebenen Problem.

Aus den Gleichungen (A) drücken wir die Coordinaten der Raumcurve durch den Parameter λ aus

$$\text{A)}\quad \begin{aligned} &1)\quad (b+c+\lambda)x+(a+c+\lambda)y+(a+b+\lambda)z=0\\ &2)\quad bc(R+\lambda)x+ac(R+\lambda)y+ab(R+\lambda)z-Rabc=0\\ &3)\quad \{Sbc+\lambda(b+c)\}x+\{Sac+\lambda(a+c)\}y\\ &\qquad\qquad +\{Sab+\lambda(a+b)\}z=0 \end{aligned}$$

$$x=\frac{Rabc(c-b)}{\varDelta}(\lambda^2+\lambda Sa+Sa^2)$$

$$y=-\frac{Rabc(c-a)}{\varDelta}(\lambda^2+\lambda Sb+Sb^2)$$

$$z=\frac{Rabc(b-a)}{\varDelta}(\lambda^2+\lambda Sc+\lambda Sc^2)$$

$$\varDelta=(R+\lambda)(c-a)(c-b)(b-a)\lambda^2$$

Die Coordinaten der Raumcurve sind demnach ausgedrückt:

$$x=k_x f(\lambda,\ a),\quad y=k_y f(\lambda,\ b),\quad z=k_z f(\lambda,\ c)$$

wo

$$k_x=\frac{Rabc}{(a-b)\,(a-c)},\quad k_y=\frac{Rabc}{(b-c)\,(b-a)},\quad k_z=\frac{Rabc}{(c-a)\,(c-b)}$$

$$f(a,\ t)=\frac{\lambda^2+\lambda St+St^2}{(R+\lambda)\lambda^2}$$

Es ist

$$k_x+k_y+k_z=0$$

so dass diese Coefficienten nicht zugleich dasselbe Vorzeichen haben können.

Wir stellen die Forderung (pag. 189), es sollen x, y, z positiv sein und untersuchen, in welchen Grenzen sich λ bewegen muss, damit diese Forderung in jedem vorliegenden Falle erfüllt sei. Die Coefficienten k haben von λ unabhängige Werte. Es bliebe also übrig den Verlauf der Function $f(\lambda, t)$ zu verfolgen. Die Coefficienten a, b, c der Fläche $[abc]$ können positiv oder negativ sein, so dass wir 2 Hauptfälle $t > 0$ und $t < 0$ unterscheiden müssen.

Die Function $f(\lambda, t)$ hat 2 Nullpunkte

$$\lambda_{1t} = \frac{t}{2}(-S + \sqrt{S(S-4)}) \quad \text{und} \quad \lambda_{2t} = \frac{t}{2}(-S - \sqrt{S(S-4)})$$

Es war

$$S = \left(\frac{A}{B} + \frac{B}{A}\right)^2$$

Bilden wir

$$S - 4 = \left(\frac{A}{B} + \frac{B}{A}\right)^2 - 4 = \left(\frac{A}{B} - \frac{B}{A}\right)^2$$

so sehen wir, dass die Quadratwurzel $\sqrt{S(S-4)}$ immer ausziehbar ist, da sowol S als auch $S-4$ vollständige Quadrate sind. Nun kann der Wert der Wurzel gleich $\frac{A^2}{B^2} - \frac{B^2}{A^2}$ oder $\frac{B^2}{A^2} - \frac{A^2}{B^2}$ sein.

Wir setzen fest, dass immer derjenige von den beiden Werten genommen werden soll, welcher positiv ist. Auch in allen anderen Fällen, wo eine Grösse unter der Quadratwurzel ein vollständiges Quadrat sein wird, werde durch das Wurzelzeichen der positive Wert der Quadratwurzel bezeichnet. Die 2 Unendlichkeitspunkte der Function $f(\lambda, t)$ sind

$$\lambda_3 = -R \quad \text{und} \quad \lambda_4 = 0$$

Ferner ist zu berücksichtigen, dass, wenn eine Ellipse ausgeschnitten werden soll, $S > 4$ sein muss.

Ist m der Mittelwert zwischen A und B, so ist

$$A = m + \varepsilon \quad \text{und} \quad B = m - \varepsilon$$

so dass

$$S = \left(\frac{A}{B} + \frac{B}{A}\right)^2 = \left(\frac{m+\varepsilon}{m-\varepsilon} + \frac{m-\varepsilon}{m+\varepsilon}\right)^2 = 4\left(\frac{m^2+\varepsilon^2}{m^2-\varepsilon^2}\right)^2 > 4$$

ist. Bei der Hyperbel ist

$$S = \left(\frac{A}{B} + \frac{B}{A}\right)^2 = \left(\frac{A}{iB_1} + \frac{iB_1}{A}\right)^2 = -\left(\frac{A^2 B_{11}}{AB_1}\right)^2 < 0$$

Ferner ist R bei der Ellipse stets positiv, bei der Hyperhel dagegegen positiv oder negativ. Bei dem Kreise ist

$$S = \left(\frac{A}{B} + \frac{B}{A}\right)^2 = 4$$

da $A = B$ ist. Nach diesem Schema werden wir die Fälle der Ellipse, des Kreises nnd der Hyperbel zu nnterscheiden hahen.

$t > 0$. I) $S > 4$, $R > 0$ . . . Ellipse $\lambda_{2t} < \lambda_{1t} < 0$, $\lambda_3 < 0$

1) $\lambda_3 \leqq \lambda_{2t} < \lambda_{1t} < 0$

2) $\lambda_{2t} < \lambda_3 < \lambda_{1t} < 0$

3) $\lambda_{2t} < \lambda_{1t} \leqq \lambda_3 < 0$

II) $S = 4$, $R > 0$ . . . Kreis ($\lambda_{1t} = \lambda_{2t} < 0$, $\lambda_3 < 0$)

III) $S < 0$, $R \gtrless 0$ . . . Hyperbel ($\lambda_{1t} > 0$, $\lambda_{2t} < 0$, $\lambda_3 \gtrless 0$)

1) $\lambda_3 \leqq \lambda_{2t} < 0 < \lambda_{1t}$

2) $\lambda_{2t} < \lambda_3 < 0 < \lambda_{1t}$

3) $\lambda_{2t} < 0 < \lambda_3 \leqq \lambda_{1t}$

4) $\lambda_{2t} < 0 < \lambda_{1t} \leqq \lambda_3$

Der Fall II) führt auf die bekannten Kreisschnitte.

Die Function $f(\lambda, t)$ kann das Zeichen nur dann ändern, wenn sie durch einen Null- oder Unendlichkeitspunkt geht. Da es uns nur auf das Vorzeichen von $f(\lambda, t)$ ankommt, betrachten wir diese Function in Bezug auf die 4 Pnukte λ_{1t}, λ_{2t}, λ_3, λ_4.

Im Falle I) ist $f(\varepsilon, t)$, wenn ε eine beliebig kleine Zahl sein soll, unhedingt positiv, einerlei ob $\varepsilon > 0$ oder $\varepsilon < 0$ ist. Wir können nun den Verlauf der Function $f(\lambda, t)$, in sofern sie oberhalb oder unterhalb der λ-Achse sich befindet, wenn wir die λ als Abscissen und $f(\lambda, t)$ als Ordinaten auftragen, zeichnen, wenn wir noch berücksichtigeu, dass $\lim\limits_{\lambda = +\infty} f(\lambda, t) > 0$ nnd $\lim\limits_{\lambda = -\infty} f(\lambda, t) < 0$ heständig ist. (S. Beilage.)

Im Falle III) ist $f(\varepsilon, t)$ positiv oder negativ, je nachdem $R \lesseqgtr 0$, oder je nachdem $\lambda_3 \gtreqless 0$. Demnach hat $f(\varepsilon, t)$ immer das Zeichen der Grösse λ_3. (S. Beilage.)

Ist $t < 0$, so gestaltet sich der Verlauf der Function $f(\lambda, t)$ anders. Wir haben alsdann folgende Fälle:

$t < 0$. I') $S > 4$, $R > 0$ . . . Ellipse ($\lambda_{2t} > \lambda_{1t} > 0$, $\lambda_3 < 0$

II') $S = 4$, $R > 0$ . . . Kreis ($\lambda_{1t} = \lambda_{2t} > 0$, $\lambda_3 < 0$

III') $S < 0$, $R \gtreqless 0$ . . . Hyperbel ($\lambda_{2t} > 0$, $\lambda_{1t} < 0$, $\lambda_3 \gtreqless 0$)

1) $\lambda_3 \leqq \lambda_{1t} < 0 < \lambda_{2t}$

2) $\lambda_{1t} < \lambda_3 < 0 < \lambda_{2t}$

3) $\lambda_{1t} < 0 < \lambda_3 < \lambda_{2t}$

4) $\lambda_{1t} < 0 < \lambda_{2t} \leqq \lambda_3$

Der Fall II') ist erledigt. Der Verlauf der Curven im Falle III') ist analog dem im Falle III), nur dass λ_{1t} und λ_{2t} vertauscht sind. (Ueber den Verlauf der Curve im Falle I') siehe Fig. III, 1 bis 4.)

Zur Uebersichtlichkeit stellen wir die gewonnenen Resultate in einer Tabelle zusammen.

		$f(\lambda, t) > 0$, wenn
$t > 0$	I) $S > 4$, $R > 0$	
	1) $\lambda_3 \leqq \lambda_{2t} < \lambda_{1t} < 0$	$\lambda_3 \leqq \lambda \leqq \lambda_{2t}$; $\lambda_{1t} < \lambda < +\infty$
	2) $\lambda_{2t} < \lambda_3 < \lambda_{1t} < 0$	$\lambda_{2t} < \lambda < \lambda_3$; $\lambda_{1t} < \lambda < +\infty$
	3) $\lambda_{2t} < \lambda_{1t} \leqq \lambda_3 < 0$	$\lambda_{2t} < \lambda < \lambda_{1t}$; $\lambda_3 < \lambda < +\infty$
		$f(\lambda, t) < 0$, wenn
		$-\infty < \lambda < \lambda_3$; $\lambda_{2t} < \lambda < \lambda_{1t}$
		$-\infty < \lambda < \lambda_{2t}$; $\lambda_3 < \lambda < \lambda_{1t}$
		$-\infty < \lambda < \lambda_{2t}$; $\lambda_{1t} \leqq \lambda \leqq \lambda_3$

$t>0$: III) $S<0,\ R \gtrless 0$

	$f(\lambda, t) > 0$, wenn	$f(\lambda, t) < 0$, wenn
1) $\lambda_3 \leqq \lambda_{2t} < 0 < \lambda_{1t}$	$\lambda_3 \leqq \lambda \leqq \lambda_{2t}$: $\lambda_{1t} < \lambda < +\infty$	$-\infty < \lambda < \lambda_3$; $\lambda_{2t} < \lambda < \lambda_{1t}$
2) $\lambda_{2t} < \lambda_3 < 0 < \lambda_{1t}$	$\lambda_{2t} < \lambda < \lambda_3$; $\lambda_{1t} < \lambda < +\infty$	$-\infty < \lambda <_{2t}$; $\lambda_3 < \lambda < \lambda_{1t}$
3) $\lambda_{2t} < 0 < \lambda_3 < \lambda_{1t}$	$\lambda_{2t} < \lambda < \lambda_3$; $\lambda_{1t} < \lambda < +\infty$	$-\infty < \lambda < \lambda_{2t}$; $\lambda_3 < \lambda < \lambda_{1t}$
4) $\lambda_{2t} < 0 <_{1t} \leqq \lambda_3$	$\lambda_{2t} < \lambda < \lambda_{1t}$; $\lambda_3 < \lambda < +\infty$	$-\infty < \lambda < \lambda_{2t}$; $\lambda_{1t} \leqq \lambda \leqq \lambda_3$

$f(\lambda, t) > 0$, wenn

I′) $S>4,\ R>0$ | $\lambda_3 < \lambda <_{1t}$; $\lambda_{2t} < \lambda < +\infty$

$f(\lambda, t) < 0$, wenn

$-\infty < \lambda < \lambda_3$; $\lambda_{1t} < \lambda < \lambda_{2t}$

$t<0$: III′) $S<0,\ R \gtrless 0$

	$f(\lambda, t) > 0$, wenn	$f(\lambda, t) < 0$, wenn
1) $\lambda_3 \leqq \lambda_{1t} < 0 < \lambda_{2t}$	$\lambda_3 \leqq \lambda \leqq \lambda_{1t}$; $\lambda_{2t} < \lambda < +\infty$	$-\infty < \lambda < \lambda_3$; $\lambda_{1t} < \lambda < \lambda_{2t}$
2) $\lambda_{1t} < \lambda_3 < 0 < \lambda_{2t}$	$\lambda_{1t} < \lambda < \lambda_3$; $\lambda_{2t} < \lambda < +\infty$	$-\infty < \lambda < \lambda_{1t}$; $\lambda_3 < \lambda < \lambda_{2t}$
3) $\lambda_{1t} < 0 < \lambda_3 < \lambda_{2t}$	$\lambda_{1t} < \lambda < \lambda_3$; $\lambda_{2t} < \lambda < +\infty$	$-\infty < \lambda < \lambda_{1t}$; $\lambda_3 < \lambda < \lambda_{2t}$
4) $\lambda_{1t} < 0 < \lambda_{2t} \leqq \lambda_3$	$\lambda_{1t} < \lambda < \lambda_{2t}$; $\lambda_3 < \lambda < +\infty$	$-\infty < \lambda < \lambda_{1t}$; $\lambda_{2t} \leqq \lambda \leqq \lambda_3$

(Printed beside the $f(\lambda, t) < 0$ column: I′) $S>4,\ R>0$; III′) $S<0;\ R \gtrless 0$; I′) $S>4,\ R>0$)

Ist λ gleich dem Grenzwerte λ_{1t} oder λ_{2t}, so ist

$$f(\lambda, t) = 0$$

In den Fällen, wo

$$\lambda_{1t} = \lambda_3 \quad \text{oder} \quad \lambda_{2t} = \lambda_3$$

ist $f(\lambda, t)$ unbestimmt, da es den Wert $\frac{0}{0}$ annimmt. Man kann in jedem Falle den Wert der Function bestimmen, indem man Zähler und Nenner differentiirt. Die Gleichheitszeichen in den Wertgebieten der λ sind für diese Fälle hinzugefügt.

Nachdem wir in dieser Weise die Function $f(\lambda, t)$ vollständig untersucht haben, gehen wir zu der Raumcurve über. Da die gesuchten Schnittebenen nur dann reell sind, wenn die Punkte der Raumcurve im 1ten Octanten liegen, so ist es von Wichtigkeit, die Lage derselben in Bezug auf den 1ten Octanten in jedem Falle bestimmen zu können. Es waren die Coordinaten der Raumcurve ausgedrückt:

$$x = k_x f(\lambda, a), \quad y = k_y f(\lambda, b), \quad z = k_z f(\lambda, c)$$

wo k_x, k_y, k_z durch R, a, b, c ausgedrückt sind. Ein Punkt der Raumcurve liegt im 1ten Octanten, wenn x, y, z zugleich positiv sind. Ist die Fläche gegeben, also a, b, c bekannt, und auch der Kegelschnitt festgesetzt, also R und S zu bestimmen, so bietet die Berechnung der Coefficienten k keine Schwierigkeit. Entsprechend den Vorzeichen von k sind alsdann $f(\lambda, a)$, $f(\lambda, b)$, $f(\lambda, c)$ so zu wählen, dass x, y, z positiv resultiren.

Wir betrachten die Function $f(\lambda, t)$ jedesmal von den 4 Punkten λ_{1t}, λ_{2t}, λ_3, λ_4 ausgehend, die mit $+\infty$ und $-\infty$ immer die Grenzen bestimmen, innerhalb deren sich λ bewegen muss, damit $f(\lambda, t)$ sein Zeichen beibehalte. So treten auch für die Functionen $f(\lambda, a)$, $f(\lambda, b)$, $f(\lambda, c)$ jedesmal die Grenzwerte auf:

$$\left.\begin{matrix} \lambda_{1a}, \lambda_{2a} \\ \lambda_{1b}, \lambda_{2b} \\ \lambda_{1c}, \lambda_{2c} \end{matrix}\right\} \lambda_3, \ \lambda_4, \ +\infty, \ -\infty$$

Da

$$f(\lambda_{1a}, a) = f(\lambda_{2a}, a) = 0$$

ist, so entsprechen den Werten λ_{1a}, λ_{2a} Punkte in der yz-Ebene $(x = 0)$. Es mögen den Werten λ_{1a}, λ_{2a}, λ_{1b}, λ_{2b}, λ_{1c}, λ_{2c} die 6 Punkte P_{yz}', P_{yz}'', P_{xz}', P_{xz}'', P_{xy}', P_{xy}'' entsprechen. Die Reihenfolge dieser 6 Punkte hängt von der Reihenfolge der 6 λ-Werte ab, von dem kleinsten zum grössten gezählt. Die Raumcurve kann in den ersten Octanten treten resp. aus ihm heraustreten nur durch die 6 Punkte P', P'' und ∞, wie auch 0, welche den obigen λ-Werten entsprechen, die in der Tabelle ausschliesslich als Grenzwerte auftreten. Wir bestimmen also in jedem gegebenen Falle die Werte λ_{1a}, λ_{2a}, λ_{1b}, λ_{2b}, λ_{1c}, λ_{2c} und λ_3 und tragen sie der grösseren Anschaulichkeit

wegen auf einer Geraden ab. Darauf bestimmen wir das Gebiet der λ-Werte, für welche $f(\lambda, a)$ das passende Zeichen hat, indem wir den den Werten λ_{1a}, λ_{2a}, λ_3, λ_4 entsprechenden Fall in der Tabelle aufsuchen. Ebenso verfahren wir mit $f(\lambda, b)$, $f(\lambda, c)$, wobei $t \gtrless 0$, je nachdem a, b, c grösser oder kleiner als 0 ist. Das gemeinsame Gebiet dieser 3 besonderen Gebiete ist dasjenige, für welches $f(\lambda, a)$, $f(\lambda, b)$, $f(\lambda, c)$ zugleich das richtige Zeichen haben, für welches also x, y, z zugleich positiv sind. Allen Werten λ in diesem Gebiete entsprechen Punkte der Raumcurve, die in dem 1 ten Octanten liegen, und allen diesen Punkten entsprechen reelle Ebenen, welche die gegebene Fläche in dem gegebenen Kegelschnitte schneiden. Die Lage der Schnittebenen, welche continuirlich und zwischen 2 Grenzebenen verlaufen, die im allgemeinen einer Achse der Fläche parallel sind, da für die Grenzwerte λ_{1t}, λ_{2t} — x, y, oder z verschwindet, ändert sich allmählich Tritt λ_3 als Grenzwert auf, so haben wir den früher ausgeschlossenen Grenzfall, wo $p = 0$ ist, die Schnittebene also durch den Coordinatenanfang geht. Im speciellen kann die Grenzebene auch einer Coordinatenebene parallel laufen nämlich, wenn 2 Wurzeln, z. B. λ_{2b} und λ_{1c} zusammenfallen und zugleich als Grenzwerte auftreten, wie aus dem folgenden Beispiele zu ersehen ist. Die Werte $+\infty$ und $-\infty$, welchen die unendlich ferne Ebene als Schnittebene entspricht, können, wie aus der Tabelle leicht zu ersehen ist, nicht als Grenzwerte auftreten.

Es sei z. B. die Fläche

$$\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} + z^2 - 1 = 0$$

gegeben, und es soll dieselbe in dem Kegelschnitte

$$\bar{\xi}^2 + 4\bar{\eta}^2 = 1$$

geschnitten werden.

$$a = \tfrac{1}{9},\quad b = \tfrac{1}{4},\quad c = 1,\quad A = 1,\quad B = \tfrac{1}{4},\quad R = 4 + 1 = 5$$

$$S = (2 + \tfrac{1}{2})^2 = \frac{25}{4},\quad \sqrt{S(S-4)} = \frac{15}{4}$$

$$\lambda_{2a} = -\tfrac{5}{9},\quad \lambda_{2b} = -\tfrac{5}{4},\quad \lambda_{2c} = -5$$

$$\lambda_{1a} = -\frac{5}{36},\quad \lambda_{1b} = -\frac{5}{16},\quad \lambda_{1c} = -\tfrac{5}{4},\quad \lambda_3 = -5$$

Die Reihenfolge der λ-Werte ist

$$\lambda_3 = \lambda_{2c} < \lambda_{2b} = \lambda_{1c} < \lambda_{2a} < \lambda_{1b} < \lambda_{1a}$$

$$k_x = \tfrac{9}{8},\quad k_y = -\tfrac{4}{3},\quad k_z = \frac{5}{24},\quad k_x + k_y + k_z = 0$$

Es muss $f(\lambda, a) > 0$, $f(\lambda, b) < 0$, $f(\lambda, c) > 0$ sein, wobei wir überall den Fall I), 1) zu nehmen haben.

Für alle λ grösser als λ_{2b} und kleiner als λ_{2a} haben wir Punkte der Raumcurve, die im 1ten Octanten liegen $(-\frac{5}{4} < \lambda < -\frac{8}{9})$. Sei z. B. $\lambda = -1$. Alsdann ist

$$f(-1, \tfrac{1}{3}) = \frac{31}{324},\quad f(-1, \tfrac{1}{4}) = -\frac{11}{256}$$

$$f(-1, 1) = \tfrac{1}{4},\quad x' = \frac{31}{288},\quad y' = \frac{11 \,.\, 4}{3 \,.\, 256},\quad z' = \frac{5}{96}$$

Die Gleichung der Schnittebene für $\lambda = -1$ ist:

$$\pm \frac{1}{12}\sqrt{\frac{31}{2}}\,x \pm \tfrac{1}{8}\sqrt{\frac{11}{3}}\,y \pm \tfrac{1}{4}\sqrt{\frac{5}{6}}\,z - 1 = 0$$

Dem Grenzwerte λ_{2a} entspricht eine Ebene parallel zur x-Achse und dem Grenzwerte $\lambda_{2b} = \lambda_{1c}$ eine Ebene parallel zur yz-Ebene.

Ist die gegebene Fläche ein Kegel, dessen Gleichung

$$ax^2 + by^2 + cz^2 = 0$$

so lässt sich, wie wir bereits pag. 190 gesehen haben, das Problem auf die Discussion einer kubischen Parabel reduciren, und zwar sind, wie aus dem Gleichungssystem (B) zu berechnen ist, die Coordinaten derselben gegeben:

$$x = k_x F(\lambda, a),\quad y = k_y F(\lambda, b),\quad z = k_z F(\lambda, c),\quad \text{wo}$$

$$k_x = \frac{Rabc}{(a-b)(a-c)},\quad k_y = \frac{Rabc}{(b-a)(b-c)},\quad k_z = \frac{Rabc}{(c-a)(c-b)}$$

$$F(\lambda, t) = \frac{\lambda^2 + \lambda St + St^2}{\lambda^3}$$

Wir berücksichtigen die Fälle der Ellipse $(S > 4)$ und Hyperbel $(S < 0)$ — R kommt in $F(\lambda, t)$ überhaupt nicht vor — und gelangen zur folgenden Tabelle.

		$F(\lambda, t) > 0$, wenn	$F(\lambda, t) < 0$, wenn
$t>0$	$S>4$	$\lambda_{2t}<\lambda<\lambda_{1t}$; $0<\lambda<+\infty$	$\lambda_{1t}<\lambda<0$; $-\infty<\lambda<\lambda_{2t}$
	$S<0$	$\lambda_{2t}<\lambda<0$; $\lambda_{1t}<\lambda<\infty$	$-\infty<\lambda<\lambda_{2t}$; $0<\lambda<\lambda_{1t}$
$t<0$	$S>4$	$0<\lambda<\lambda_{1t}$; $\lambda_{2t}<\lambda<\infty$	$-\infty<\lambda<0$; $\lambda_{1t}<\lambda<\lambda_{2t}$
	$S<0$	$\lambda_{1t}<\lambda<0$; $\lambda_{2t}<\lambda<\infty$	$-\infty<\lambda<\lambda_{1t}$; $0<\lambda<\lambda_{2t}$

§ 3. Disenssion des Probiems, wenn die gegebene Fläche Rotationsfläche ist.

Die obigen Betrachtungen wnrden untor der (pag. 192) Bedingnng gemacht, dass die Fläche $[abc]$ keine Rotationsfläche sei.

Ist dieses der Fall, so wird die Darstellnng der Ranmcurve durch den Parameter λ illnsorisch. Die 3 Ebenenbüschel nohmon, wenn wir heispielsweise $b = c$ festsetzon, die Gestalt an:

1) $(2b+\lambda)x+(a+b+\lambda)(y+z) = 0$

2) $b^2(R+\lambda)x+ab(R+\lambda)(y+z) = Rab^2$

3) $(Sb^2+2\lambda b)x+\{Sab+\lambda(a+b)\}(y+z) = 0$

Die Determinante der Coefficienten der Variablon in diosem Gleichnngssystem ist gleich null.

Betrachten wir die Büschel (1) nnd (3), so ist zn ersehen, dass beide Gleichungen für

$$x = 0, \quad y+z = 0$$

befriedigt sind. Demnach mnss die Gorade

$$x = 0, \quad y+z = 0$$

welche für jedes λ in den Ebonon boider Ebenenbüschel enthalten ist, die Achse derselben sein. Die Richtnng dieser Achso im Raume ist gegeben dnrch die Richtnngscos. $0, -\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}$. Die Richtnngscos. der Ebenen des Parallelebenenbüschels (2) sind $\varrho b^2(R+\lambda)$, $\varrho ab(R+\lambda)$, $\varrho ab(R+\lambda)$, so dass beide Richtnngen auf einander senkrecht stehen. Es ist also die Achse der coaxialen Ebenenbüschel (1) nnd (3) d. h. die Gerade

$$x = 0, \quad y+z = 0$$

in einer Ebene der Schaar (2) enthalten. Dieser Ebene des Büschels (2) entsprechen 2 Ebenen in (1) und (3), dio dnrch die Gerade

$$x = 0, \quad y+z = 0$$

hindurchgehen müssen, so dass diese Gerade sich offenbar von der Curve losgelöst hat. Die Raumcurve kann aber nur in eine Gerade und einen Kegelschnitt oder in 3 Gerade zerfallen. Letzteres ist wirklich der Fall. Es ist nicht schwer, ausser der Geraden

$$x = 0, \quad y + z = 0$$

noch 2 zu finden, welche sich ebenfalls von der Curve losgelöst haben. Wir suchen die Doppelebenen der Büschel (1) und (3), welche wir erhalten, indem wir λ den Wert geben, der aus der Gleichung resultirt:

$$\begin{vmatrix} 2b+\lambda & a+b+\lambda \\ Sb^2+2\lambda b & Sab+\lambda(a+b) \end{vmatrix} = 0$$

$$(a-b)(\lambda^2+\lambda Sb+Sb^2) = 0$$

Da $a - b \gtrless 0$, so muss

$$\lambda^2+\lambda Sb+Sb^2 = 0$$

also

$$\lambda_b = \frac{b}{2}(-S \pm \sqrt{S(S-4)})$$

sein. Gehen wir also λ den Wert

$$\lambda_{1b} = \frac{b}{2}(-S + \sqrt{S(S-4)})$$

oder

$$\lambda_{2b} = \frac{b}{2}(-S - \sqrt{S(S-4)})$$

so fallen die entsprechenden Ebenen der Büschel (1) und (3) zusammen, und der Schnitt mit den entsprechenden Ebenen der Parallelebenenschaar wird die 2 gesuchten Geraden liefern.

$$(2b+\lambda)x+(a+b+\lambda)(y+z) = 0$$
$$b^2(R+\lambda)x+ab(R+\lambda)(y+z) = 0$$

$$x = \frac{1}{\Delta}\begin{vmatrix} 0 & a+b+\lambda \\ Rab^2 & ab(R+\lambda) \end{vmatrix}; \quad y+z = \frac{1}{\Delta}\begin{vmatrix} 2b+\lambda & 0 \\ b^2(R+\lambda) & Rab^2 \end{vmatrix}$$

$$\Delta = b(R+\lambda)(a-b)(b+\lambda)$$

Die 3 Geraden, in welche die Raumcurve im Falle $b = c$ zerfällt, sind demnach

1) $x = 0, \quad y+z = 0$

$$2)\quad x = -\frac{R\,ab(a+b+\lambda_{1b})}{(R+\lambda_{1b})(b+\lambda_{1b})(a-b)}$$

$$y+z = \frac{R\,ab(2b+\lambda_{1b})}{(R+\lambda_{1b})(b+\lambda_{1b})(a-b)}$$

$$3)\quad x = -\frac{R\,ab(a+b+\lambda_{2b})}{(R+\lambda_{2b})(b+\lambda_{2b})(a-b)}$$

$$y+z = \frac{R\,ab(2b+\lambda_{2b})}{(R+\lambda_{2b})(b+\lambda_{2b})(a-b)}$$

wo λ_{1b}, λ_{2b} bekannte Werte haben. Es ist zu bemerken, dass diese 3 Geraden parallel laufen, also sich im unendlich fernen Punkte schneiden.

Hiermit ist eigentlich das Problem im Falle, dass die gegebene Fläche ein Rotationsellipsoid oder Hyperboloid ist, gelöst. Denn man braucht nur die Gleichungen der Geraden zu bestimmen und die Punkte derselben im 1 ten Octanten auf die bekannte Weise abzubilden, um die gesuchten Schnittebenen zu erhalten.

Von der Geraden (1) ist nur der Punkt

$$x = y = z = 0$$

wesentlich, dem die unendlich ferne Ebene entspricht, da die anderen Punkte nicht im 1 ten Octanten liegen. Betrachten wir die Gleichungen der Geraden (2) und (3), so sehen wir, dass sie allgemein geschrieben werden können in der Form:

$$x = c_1,\quad y+z = c_2$$

Da

$$\frac{u^2}{p^2} = x \quad \text{und} \quad \frac{v^2}{p^2} = y,\quad \frac{w^2}{p^2} = z$$

so folgt

$$\frac{u^2}{p^2} = c_1,\quad \frac{v^2}{p^2} + \frac{w^2}{p^2} = c_2,\quad v^2+w^2 = c_2 p^2$$

$$u^2+v^2+w^2 = (c_1+c_2)p^2 = 1,\quad p = \text{const.},\quad u = \text{const.}$$

Geometrisch kann man sich dieses Resultat so vorstellen, dass alle Schnittebenen 2 Kegel umhüllen, deren Spitzen auf der Rotationsfläche liegen, was auch aus der Symmetrie der Schnittebenen zu ersehen ist. Es ist zunächst die Möglichkeit noch nicht ausgeschlossen, dass die beiden Geraden (2) und (3) im 1 ten Octanten verlaufen. Im Folgenden wird der Beweis geliefert werden, dass es unmöglich ist, so dass es nur 2 symmetrisch liegende Kegel von der obigen Art giebt.

Es werden bei den Rotationsflächen verschiedene Fälle eintreten, die wir auf folgende Weise classificiren wollen.

I. $a > 0,\ b > 0$ . . . Rotationsellipsoid
   1) $S > 4,\ R > 0$ . . . Ellipse
   2) $S = 4,\ R > 0$ . . . Kreis

II. $a > 0,\ b < 0$ . . . Rotationshyperboloid
   1) $S > 4,\ R > 0$ . . . Ellipse
   2) $S = 4,\ R > 0$ . . . Kreis
   3) $S < 0,\ R \gtrless 0$ . . . Hyperbel

Die Fälle I., 2) und II., 2) führen auf die bekannten Kreisschnitte.

Gehen wir zum Falle I., 1) über. Zuvor bemerken wir noch, dass, wenn $R > 0,\ S > 4$ ist, $0 < S - 2 - \sqrt{S(S-4)} < 2$ ist. Denn setzen wir $S = 4 + \varepsilon^2$, so ist

$$4 + \varepsilon^2 - 2 - \sqrt{(4+\varepsilon^2)\varepsilon^2} = 2 + \varepsilon^2 - \varepsilon\sqrt{4+\varepsilon^2} < 2$$

Andererseits ist

$$S - 2 - \sqrt{S(S-4)} = \sqrt{S(S-4)+4} - \sqrt{S(S-4)} > 0$$

Ferner ist

$$b + \lambda_{1b} = b + \frac{b}{2}\left(-S + \sqrt{S(S-4)}\right) = -\frac{b}{2}\left(S - 2 - \sqrt{S(S-4)}\right)$$

so dass $|\, b + \lambda_{1b}\,| < |\, b\,|$ ist. Im Falle I., 1) ist also:

$$b + \lambda_{1b} < 0, \quad 2b + \lambda_{1b} > 0, \quad b + \lambda_{2b} < 0, \quad 2b + \lambda_{2b} < 0$$

Wir unterscheiden für die Geraden (2) und (3) die Fälle:

$$(2)\begin{cases} \text{Wenn } R+\lambda_1 > 0, \text{ so ist } \left.\begin{matrix} y+z>0, & \text{wenn } a<b \\ y+z<0 & \text{,, } \ a>b \end{matrix}\right\} x>0, \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \text{wenn } \dfrac{a+b+\lambda_1}{a-b} > 0 \\ \text{,,} \quad R+\lambda_1 < 0, \text{ ,, } \left.\begin{matrix} y+z>0, & \text{,, } \ a>b \\ y+z<0, & \text{,, } \ a<b \end{matrix}\right\} x>0, \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \text{wenn } \dfrac{o+b+\lambda_1}{a-b} < 0 \end{cases}$$

$$(3)\begin{cases} \text{Wenn } R+\lambda_2>0, \text{ so ist } \begin{cases} y+z>0, & \text{wenn } a>b \\ y+z<0, & \text{,, } a<b \end{cases} x>0, \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \text{wenn } \frac{a+b+\lambda_2}{a-b}>0 \\ \text{,, } R+\lambda_2<0, \text{ ,, } \begin{cases} y+z>0, & \text{,, } a<b \\ y+z<0, & \text{,, } a>b \end{cases} x>0, \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \text{wenn } \frac{a+b+\lambda_2}{a-b}<0 \end{cases}$$

Die zweite Gerade kann, falls die gegebene Fläche ein Rotationsellipsoid und der Kegelschnitt eine Ellipse ist, durch den ersten Octanten gehen, wenn

$$R+\lambda_1>0, \quad a<b, \quad \frac{a+b+\lambda_1}{a-b}>0$$

oder

$$R+\lambda_1<0, \quad a>b, \quad \frac{a+b+\lambda_1}{a-b}<0 \quad \text{ist.}$$

Ist $a>b$, so ist $a+b+\lambda_1>0$ und $a-b>0$. Die 2te Bedingung ist nie erfüllt. Ist $a<b$, so kann $a+b+\lambda_1<0$ sein, und in diesem Falle läuft die Gerade (2) durch den 1ten Octanten.

Die Gerade (3) kann den 1ten Octanten durchschneiden, wenn

$$R+\lambda_2>0, \quad a>b, \quad \frac{a+b+\lambda_2}{a-b}>0$$

oder

$$R+\lambda_2<0, \quad a<b, \quad \frac{a+b+\lambda_2}{a-b}<0 \quad \text{ist.}$$

Ist $a<b$, so ist $a+b+\lambda_2<0$ und $a-b<0$, also $\frac{a+b+\lambda_2}{a-b}>0$.

Ist $a>b$, so kann $a+b+\lambda_2>0$ sein und in diesem Falle läuft die Gerade (3) durch den ersten Octanten.

Aus dieser Auseinandersetzung ist zu ersehen, unter welchen Bedingungen ein gegebenes Rotationsellipsoid in einem gegebenen Kegelschnitt geschnitten werden kann, wie auch dass die beiden Geraden (2) und (3) sich gegenseitig aus dem 1ten Octanten ausschliessen, da die beiden Bedingungen $a>b$ und $a<b$ nicht zugleich bestehen können.

Im Falle II., 1) ist $a>0$, $b<0$, $S>4$, $R>0$, $\lambda_{1b}>0$, $\lambda_{2b}>0$, $b+\lambda_1>0$, $2b+\lambda_1<0$, $b+\lambda_2>0$, $2b+\lambda_2>0$.

(2) Wenn $R+\lambda_1 > 0$, so ist $y+z > 0$, $x > 0$, wenn $a+b+\lambda_1 > 0$

(3) „ $R+\lambda_2 > 0$, „ $y+z < 0$, $x > 0$, „ $a+b+\lambda_2 > 0$

$R+\lambda_1 < 0$ und $R+\lambda_1 < 0$ ist unmöglich. Nur die 2te Gerade kann durch den 1ten Octanten gehen, vorausgesetzt, dass $\frac{a+b+\lambda_1}{a-b} > 0$ ist.

Es bleibt noch der letzte Fall zu erledigen:

$\lambda_{1b} < 0$, $\lambda_{2b} > 0$, $b+\lambda_1 < 0$, $2b+\lambda_1 < 0$, $b+\lambda_2 < 0$, $2b+\lambda_2 < 0$

Wir trennen die 2 Fälle $R > 0$ und $R < 0$

$\underline{R > 0}$

(2) Wenn $R+\lambda_1 < 0$, so ist $y+z > 0$, $x > 0$, wenn $a+b+\lambda_1 > 0$

$\underline{R < 0}$

(3) „ $R+\lambda_2 > 0$, so ist $y+z > 0$, $x > 0$, wenn $a+b+\lambda_2 > 0$

Nur in diesen Fällen kann, wie man sich leicht überzeugen kann, die 2te oder 3te Gerade durch den 1ten Octanten laufen, wobei sie ebenso wie $R > 0$ und $R < 0$, sich gegenseitig aus demselben ausschliessen. Hiermit ist die pag. 201 ausgesprochene Behauptung, dass es nur 2 Kegel von der bekannten Eigenschaft gebe, vollständig bewiesen. Ferner ist aus der obigen Betrachtung folgender Satz zu folgern:

Eine Rotationsfläche 2ter Ordnung kann dann und nur dann von einer Ebene in einem gegebenen Kegelschnitte geschnitten werden, wenn $\frac{a+b+\lambda_{1b}}{a-b} > 0$ oder $\frac{a+b+\lambda_{2b}}{a-b} > 0$ ist, vorausgesetzt, dass die Gleichung der Fläche in der Form

$$ax^2+by^2+bz^2-1=0$$

gegeben ist und dass λ_{1b} und λ_{2b} die obigen Werte haben.

Dieser Satz gilt auch für den Rotationskegel, in welchem Falle die pag. 191 erhaltene kubische Parabel in 3 Geraden

1) $x = 0$, $y+z = 0$

2) $x = -\frac{Rab(a+b+\lambda_{1b})}{(a-b)(b+\lambda_{1b})\lambda_{1b}}$; $y+z = \frac{Rab(2b+\lambda_{1b})}{(a-b)(b+\lambda_{1b})\lambda_{1b}}$

3) $x = -\frac{Rab(a+b+\lambda_{2b}b)}{(a-b)(b+\lambda_{2b})\lambda_{2b}}$; $y+z = \frac{Rab(2b+\lambda_{2b})}{(a-b)(b+\lambda_{2b})\lambda_{2b}}$

zerfällt.

Diese 3 Geraden schneiden sich in dem unendlich fernen Punkte. Die Gleichungen derselben unterscheiden sich von den pag. 200 aufgestellten bloss dadurch, dass $R+\lambda$ durch λ ersetzt ist. Auch von diesen 3 Geraden kann nur eine durch den 1ten Octanten gehen.

Die Annahme $b=c$ kann unsere Beweise nicht beeinflussen, da ja a, b, c von vornherein als gleichberechtigte Grössen auftreten. Wir erhalten die Gleichngen der Geraden in den Fällen, wo $a=c$ und $a=b$ ist, aus den gefundenen durch cyklische Vertauschung.

Es soll z. B. der Kegel

$$\frac{x^2}{25}-\frac{y^2}{9}-\frac{z^2}{9}=0$$

in der Hyperbel

$$\frac{\xi^2}{16}-\frac{\eta^2}{4}=1$$

geschnitten werden

$$b=c=-\frac{1}{9},\quad a=\frac{1}{25},\quad A=4,\quad B=\sqrt{-4}=2i,\quad R=-\frac{3}{16}$$

$$S=-\frac{9}{4},\quad \sqrt{S(S-4)}=\frac{15}{4},\quad \lambda_{15}=-\frac{1}{3},\quad \lambda_{25}=\frac{1}{12}$$

In der Geraden (2) ist $y+z<0$

$$(3)\qquad x=\frac{99}{3400},\quad y+z=\frac{45}{136},\quad \frac{a+b+\lambda_2}{a-b}=\frac{\frac{1}{25}+\frac{1}{12}-\frac{1}{9}}{\frac{1}{25}+\frac{1}{9}}>0$$

$$p=\frac{5}{3},\quad u=\pm\frac{1}{2}\sqrt{\frac{11}{34}}$$

§ 4. Discussion des Problems, wenn die gegebene Fläche ein Paraboloid ist.

Von der Gleichung des Paraboloids

$$ax^2+by^2=2z$$

ausgehend, gelangen wir auf einem Wege, analog dem im § 1. eingeschlagenen, zu den Bedingungsgleichungen:

$$RW_1=U_1V_1,\quad SV_1=U_1^2,\quad T=u^2+v^2+w^2=1$$

wo

$$\delta = -2p\,abw + av^2 + bu^2 = W_1$$
$$\mathfrak{A}\mathfrak{B} - \mathfrak{C}^2 = abw^2 = \ldots\ldots V_1$$
$$\mathfrak{A} + \mathfrak{B} = a(v^2+w^2) + b(u^2+w^2) = U_1$$

Die obigen Bedingungsgleichungen lassen sich in der Form schreiben:

$$\frac{U_1}{p^2} + \lambda\frac{T}{p^2} = 0, \quad \frac{RW_1}{p^2} + \lambda\frac{V_1}{p^2} = 0, \frac{SV_1}{p^2} + \lambda\frac{U_1}{p^2} = 0$$

Ist $p = 0$, so kann man die Werte der Variablen u, v, w direct aus den obigen Gleichungen berechnen. Da die Substitution

$$\frac{u^2}{p^2} = x, \quad \text{etc.}$$

jetzt zu keinem Resultate leiten würde, weil in W_1 die erste Potenz von w vorkommt, so führen wir eine lineare Substitution ein:

$$\frac{u}{p} = x, \quad \frac{v}{p} = y, \quad \frac{w}{p} = z$$

nach welcher jedem reellen Wertsysteme x, y, z eine reelle Ebene entspricht. Die Bedingungsgleichungen sind alsdann:

1) $(b+\lambda)x^2 + (a+\lambda)y^2 + (a+b+\lambda)z^2 = 0$

2) $Rbx^2 + R\,ay^2 - 2R\,abz + \lambda\,abz^2 = 0$

3) $\lambda\,bx^2 + \lambda\,ay^2 + \{S\,ab + \lambda(a+b)\}z^2 = 0$

Aus den Gleichungen (2) und (3) folgt:

$$-2R\,ab\,\lambda z + \lambda^2 abz^2 - SR\,ab\,z^2 - R\lambda(a+b)z^2 = 0$$

Diese Gleichung hat 2 Lösungen:

$$z = \frac{2R\,ab\,\lambda}{ab\,\lambda^2 - R(a+b)\lambda - RSab} \quad \text{und} \quad z = 0$$

Mit Hilfe der Gleichungen (1) und (3) drücken wir auch x und y durch λ aus:

$$x^2 = \frac{b(\lambda^2 + \lambda Sa + Sa^2)}{\lambda^2(b-a)}z^2$$

$$y^2 = \frac{a(\lambda^2 + \lambda\,Sb + Sb^2)}{\lambda^2(b-a)}z^2$$

$$z = \frac{2R\,ab\,\lambda}{ab\,\lambda^2 - R(a+b)\lambda - RS\,ab}$$

Einem Punkte x, y, z entsprechen 4 symmetrisch zu den Coordinatenebenen liegende Ebenen. Dem Werte $z = 0$ entspricht

$$x = y = 0$$

also die unendlich ferne Ebene.

Beschränken wir uns auf reelle Schnittebenen, so müssen x^2, y^2, z^2 positiv sein, x, y, z positiv oder negativ. Nehmen wir an,

$$\lambda = i\lambda'$$

sei imaginär, so ist z ein Ausdruck von der Form

$$\frac{ci}{c_1 + c_2 i} = \frac{cc_2}{c_1^2 + c_2^2} + \frac{cc_1}{c_1^2 + c_2^2}\, i = c' + c'' i$$

also eine complexe Grösse.

Demnach ist, vorausgesetzt, dass λ immer reell bleibt, die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, dass ein gegebenes Paraboloid

$$ax^2 + by^2 = 2z$$

in einem gegebenen Kegelschnitte geschnitten werden kann:

$$\frac{b(\lambda^2 + \lambda Sa + Sa^2)}{b - a} > 0 \quad \text{und} \quad \frac{a(\lambda^2 + \lambda Sb + Sb^2)}{b - a} > 0$$

Die Function $\lambda^2 + \lambda St + St^2$ hat 2 Nullpunkte:

$$\lambda_{1t} = \frac{t}{2}(-S + \sqrt{S(S-4)}) \quad \text{und} \quad \lambda_{2t} = \frac{t}{2}(-S - \sqrt{(S(S-4)})\,)$$

Da

$$\lim_{\lambda = +\infty} (\lambda^2 + \lambda St + St^2) = +\infty \text{ und } \lim_{\lambda = -\infty} (\lambda^2 + \lambda St + St^2) = +\infty$$

ist, so muss diese Function im Gebiete der λ-Werte zwischen λ_{1t} und λ_{2t} negativ sein. Im Falle des Kreises, wo

$$\lambda_{1t} = \lambda_{2t}$$

berührt die durch die Function dargestellte Curve die λ-Achse.

Die obigen Bestimmungen setzen die gegenseitige Lage der 4 Wurzeln λ_{1a}, λ_{2a}, λ_{1b}, λ_{2b} fest, für welche es reelle Schnittebenen giebt. Einem Punkte x', y', z' entspricht die Schnittebene:

$$\pm x' \,.\, x \pm y' \,.\, y + z' \,.\, z - 1 = 0$$

wo x, y, z die laufenden Coordinaten sind.

Ist die Gleichung des Paraboloids in der Form

$$ax^2 + bz^2 - 2y = 0 \quad \text{oder} \quad by^2 + az^2 - 2x = 0 \quad \text{etc.}$$

gegeben, so muss in den Resultaten eine der Axenvertauschung entsprechende Vertauschung der Grössen u, v, w durchgeführt werden.

Bei dem Rotationsparaboloid lauten die Bedingungsgleichungen:

1) $(b+\lambda)(x^2+y^2)+(2b+\lambda)z^2 = 0$
2) $R(x^2+y^2)-2Rbz+\lambda bz^2 = 0$
3) $\lambda(x^2+y^2)+(Sb+2\lambda)z^2 = 0$

Hier ist λ nicht mehr ein willkürlicher Parameter, sondern kann nur die 2 Werte

$$\lambda_{1b} = \frac{b}{2}(-S+\sqrt{S(S-4)}) \quad \text{und} \quad \lambda_{2b} = \frac{b}{2}(-S-\sqrt{S(S-4)})$$

annehmen. Die 3 Gleichungen sind demnach befriedigt durch

1) $x^2+y^2 = 0; \quad z^2 = 0$

2) $x^2+y^2 = -\dfrac{2b+\lambda_1}{b+\lambda_1}z^2, \quad z = \dfrac{2Rb\lambda_1}{b\lambda_1^2-2R\lambda_1-RSb}$

3) $x^2+y^2 = -\dfrac{2b+\lambda_2}{b+\lambda_2}z^2, \quad z = \dfrac{2Rb\lambda_2}{b\lambda_2^2-2R\lambda_2-RSb}$

Berücksichtigen wir, dass, wenn $S>4$, $b+\lambda_1<0$, $2b+\lambda_1>0$, $b+\lambda_2<0$, $2b+\lambda_2<0$ ist, so sehen wir ein, dass im Falle (2) $x^2+y^2>0$, im Falle (3) $x^2+y^2<0$ ist.

Das Rotationsparaboloid kann demnach in jeder Ellipse geschnitten werden.

Der Fall $S=4$ führt auf den Kreisschnitt.

§ 5. Discussion des Problems, wenn der gegebene Kegelschnitt eine gleichseitige Hyperbel ist.

Soll eine Oberfläche 2ten Grades in einer gegebenen gleichseitigen Hyperbel geschnitten werden, so muss

$$R = S = 0$$

sein. Wir sind gezwungen, direct $\frac{1}{A^2} \cdot \frac{1}{B^2}$ in die Rechnung zu

ziehen, um der Forderung, dass die Achse der Hyperbel einen bestimmten Wert habe, Genüge zu leisten. Die beiden Bedingungsgleichungen für u, v, w, p nehmen, wenn die Fläche die Gleichung

$$ax^2+by^2+cz^2-1=0$$

hat, die Form an:

$$a(v^2+w^2)+b(u^2+w^2)+c(u^2+v^2)=U=0$$

$$\frac{1}{A^2}\cdot\frac{1}{B^2}=-\frac{1}{A^4}=\frac{V^2}{W^2}$$

wo U, V, W dieselben Werte, wie in § 1. haben. Aus der letzten Gleichung folgt, wenn wir berücksichtigen, dass

$$T=u^2+v^2+w^2=1$$

$$\left(\frac{V}{p^2}\right)^2=-\frac{1}{A^4}\left(\frac{W}{p^2}\right)^2\frac{T}{p^2}$$

Führen wir hier

$$\frac{u^2}{p^2}=x,\quad \frac{v^2}{p^2}=y,\quad \frac{w^2}{p^2}=z$$

ein, so verwandeln sich die obigen Gleichungen in

1) $(b+c)x+(a+c)y+(a+b)z=0$

2) $(bcx+acy+abz)^2+\frac{1}{A^4}(bcx+acy+abz-abc)^2(x+y+z)=0$

Aus der Gleichung 1) ist zu ersehen, dass das Ellipsoid, wie auch das zweischalige Hyperboloid, wenn die reelle Achse die grösste ist, in einer gleichseitigen Hyperbel nicht geschnitten werden können. Für die übrigen Fälle suchen wir x, y, z durch einen veränderlichen Parameter darzustellen. Die Gleichung der ebenen Curve 3ter Ordnung, welche durch die obigen Gleichungen dargestellt ist, ist zu erhalten, indem man die Gleichung (2) auf ein neues Coordinatensystem transformirt, in welchem die ζ-Achse die Richtungscos. der Ebene (1) hat, und $\zeta=0$ setzt

$$x=f\xi+f'\eta+f''\zeta$$
$$y=g\xi+g'\eta+g''\zeta$$
$$z=h\xi+h'\eta+h''\zeta$$

$$f''=q(b+c),\quad g''=q(a+c),\quad h''=q(a+b)$$

$$q=\frac{1}{\sqrt{(b+c)^2+(a+c)^2+(a+b)^2}}$$

$$(2)\quad \{(bcf+acg+abh)\xi+(bcf'+acg'+abh')\eta)\}^3$$
$$+\frac{1}{A^4}\{[(bcf+acg+abh)\xi+(bcf'+acg'+abh')\eta-abc]^2\,.$$
$$.\,[(f+g+h)\xi+(f'+g'+h')\eta]\}=0$$

Wir setzen:

$$\begin{aligned}(bcf+acg+abh)\xi+(bcf'+acg'+abh')\eta &= x_1\\ (bcf+acg+abh)\xi+(bcf'+acg'+abh')\eta-abc\,. &= x_2\\ (f+g+h)\xi+(f'+g'+h')\eta &= x_3\end{aligned}$$

wobei sich x_1, x_2, x_3 höchstens um Constante, als Factoren von homogenen Coordinaten unterscheiden können. Die ebene Curve hat alsdann die Gleichung

$$x_1{}^3+\frac{1}{A^4}x_2{}^2x_3=0$$

sie ist eine Unicursalcurve, die einen Rückkehrpunkt

$$x_1=0.\quad x_2=0$$

besitzt. Da die beiden Geraden

$$x_1=0,\quad x_2=0$$

parallel sind, so liegt der Rückkehrpunkt im Unendlichen. Die Curve besteht aus 2 Zweigen, was auch ganz plausibel ist, weil sie als Projection der parabolischen Hyperbel (pag. 190) aufgefasst werden kann.

Wir können

$$x_1=\lambda x_2\quad \text{und}\quad \lambda^2x_1=-\frac{1}{A^4}x_3$$

setzen, wo λ ein willkürlicher Parameter ist. Da nun

$$x_2=x_1-abc$$

ist, so ist

$$x_1=\lambda x_2=\lambda(x_1-abc)$$

woraus folgt:

$$x_1=-\frac{abc}{1-\lambda}\lambda\quad \text{und}\quad x_3=\frac{abc\,A^4\lambda^3}{1-\lambda}$$

Aus den obigen Substitutionsgleichungen sind ξ, η durch x_1 und x_3 auszudrücken:

$$\xi = \frac{1}{\Delta}\begin{vmatrix} x_1 & bcf'+acg'+abh' \\ x_3 & f'+g'+h' \end{vmatrix}; \quad \eta = -\frac{1}{\Delta}\begin{vmatrix} x_1 & bcf+acg+abh \\ x_3 & f+g+h \end{vmatrix}$$

$$\Delta = (a-b)(b-c)(a-c)$$

Die Coordinaten der ebenen Curve 3ter Ordnung sind durch den Parameter λ ausgedrückt:

$$x = k_x f(\lambda, a), \quad y = k_y f(\lambda, b), \quad z = k_z f(\lambda, c)$$

wo

$$k_x = \frac{abc}{(a-b)(a-c)}, \quad k_y = \frac{abc}{(b-a)(b-c)}, \quad k_z = \frac{abc}{(c-a)(c-b)}$$

$$f(\lambda, t) = \frac{\lambda}{\lambda-1}(1 - A^4 t^2 \lambda^2), \quad k_x + k_y + k_z = 0$$

Wir untersuchen nun den Verlauf der Function $f(\lambda, t)$. Dieselbe hat 3 Null- und einen Unendlichkeitspunkt, in denen sie ihr Zeichen wechseln kann. Vorausgesetzt, dass $1 \gtrless A^4 t^2$, sind die Nullpunkte 0, $\frac{1}{A^2 t}$ und $-\frac{1}{A^2 t}$ und der Unendlichkeitspunkt $\lambda = 1$. Das Vorzeichen von t hat augenscheinlich keinen Einfluss auf das Zeichen von $f(\lambda, t)$. Ist ε eine hinreichend kleine, positive oder negative reelle Zahl, so ist $f(\varepsilon, t) > 0$, wenn $\varepsilon < 0$, und $f(\varepsilon, t) < 0$, wenn $\varepsilon > 0$ ist. Ferner ist

$$\lim_{\lambda=+\infty} f(\lambda, t) = -\infty \quad \text{und} \quad \lim_{\lambda=-\infty} f(\lambda, t) = -\infty$$

Daraus ist schon der Verlauf der Curve ersichtlich (S. Fig. $H_1 H_2$)

Im Grenzfalle $1 = A^4 t^2$ hat $f(\lambda, t)$ für $\lambda = 1$ den Wert $0/_0$, so dass

$$f(\lambda, t) = f'(\lambda, t) = f''(\lambda, t) = -\infty$$

ist. (S. Fig. H_3).

Nun können wir die Gebiete angeben, in welchen $f(\lambda, t)$ positiv oder negativ ist.

<u>$t > 0$</u> $f(\lambda, t) > 0$, wenn

$1 > A^2 t$	$-\frac{1}{A^2 t} < \lambda < 0$; $\quad 1 < \lambda < \frac{1}{A^2 t}$
$1 < A^2 t$	$-\frac{1}{A^2 t} < \lambda < 0$; $\quad \frac{1}{A^2 t} < \lambda < 1$
$1 = A^2 t$	$-\frac{1}{A^2 t} < \lambda < 0$

$t > 0$	$f(\lambda, t) < 0$, wenn
$1 > A^2 t$	$-\infty < \lambda < -\frac{1}{A^2 t}$; $0 < \lambda < 1$; $\frac{1}{A^2 t} < \lambda < \infty$
$1 < A^2 t$	$-\infty < \lambda < -\frac{1}{A^2 t}$; $0 < \lambda < \frac{1}{A^2 t}$; $1 < \lambda < \infty$
$1 = A^2 t$	$-\infty < \lambda < -\frac{1}{A^2 t}$; $0 < \lambda < +\infty$

Ist $t < 0$, so muss überall das Zeichen von $\frac{1}{A^2 t}$ resp. $-\frac{1}{A^2 t}$ in das entgegengesetzte geändert werden. Diese Tabelle giebt die Möglichkeit, in jedem gegebenen Falle die Lösung des Problems anzugehen (pag. 196).

Ist die gegebene Fläche eine **Rotationsfläche** und beispielsweise $b = c$, so geben die Gleichungen (1) und (2) über in

$$1)\quad 2bx + (a+b)(y+z) = 0$$

$$2)\quad \{b^2 x + ab(y+z)\}^3 + \frac{1}{A^4}(b^2 x + ab(y+z) - ab^2)^2 (x+y+z) = 0$$

Die frühere Methode verlässt uns hier, weil $\Delta = 0$ ist.

Aus der Gleichung (1) folgt:

$$\frac{x}{y+z} = -\frac{a+b}{2b}$$

oder

$$x = -\frac{a+b}{2b}(y+z)$$

$$y+z = -\frac{2b}{a+b}x$$

Setzen wir diesen Wert von $y+z$ in die Gleichung (2) ein, so erhalten wir eine kubische Gleichung, welche die Wurzel $x = 0$ hat. Dem Werte $x = 0$ entspricht

$$y+z = 0$$

Das Problem reducirt sich also auf die Auflösung der übrigbleibenden quadratischen Gleichung, deren 2 Wurzeln a und b seien. Die ebene Curve 3ter Ordnung zerfällt im Falle, dass die gegebene Fläche eine Rotationsfläche

$$ax^2 + b(y^2 + z^2) = 1$$

ist, in 3 Gerade

1) $x = 0, \quad y + z = 0$

2) $x = \alpha, \quad y + z = -\frac{2b}{a+b}\alpha$

3) $x = \beta, \quad y + z = -\frac{2b}{a+b}\beta$

Im Falle des Kegels sind die Bedingungsgleichungen:

1) $(b+c)x + (a+c)y + (a+b)z = 0$

2) $(bcx + acy + abz)^3 + \frac{1}{A^4} a^2 b^2 c^2 (x + y + z) = 0$

Nur ein solcher Kegel kann in einer gleichseitigen Hyperbel geschnitten werden, bei dem die reelle Achse nicht die grösste ist, wie man aus der Gleichung (1) folgern kann. Ist diese Bedingung erfüllt, so transformiren wir die Gleichung der Fläche (2) auf ein neues Coordinatensystem ξ, η, ζ, so dass $\zeta = 0$ der Durchschnitt der Fläche (2) und der Ebene (1) sei.

2) $$\{(bcf + acg + abh)\xi + (bcf' + acg' + abh')\eta\}^3 + \frac{a^2 b^2 c^2}{A^4}\{(f + g + h)\xi + (f' + g' + h')\eta\} = 0$$

Wir setzen:

$$(bcf + acg + abh)\xi + (bcf' + acg' + abh')\eta\} = \bar{x}_1$$
$$(f + g + h)\xi + (f' + g' + h')\eta = \bar{x}_3$$

wo $\bar{x}_1$ und $\bar{x}_3$ zunächst als rein analytische Ausdrücke eingeführt sind. Wir wissen aber, dass sie sich von Coordinaten eines schiefwinkligen Systems höchstens um Constante, als Factoren, unterscheiden können, so dass bei einer strengen Discussion der Curve in Bezug auf die Coordinatenaxen man die Gleichung der Curve in der Form

$$\bar{\alpha}^3 \bar{x}_1^3 + \frac{\bar{\beta}}{A^4} a^2 b^2 c^2 \bar{x}_3 = 0$$

schreiben müsste, wo $\bar{\alpha}$, $\bar{\beta}$ leicht zu bestimmende Werte haben.

(2) $$\bar{x}_1^3 + \frac{a^2 b^2 c^2}{A^4} \bar{x}_3 = 0$$

Diese ebene Curve 3ter Ordnung ist als Projection der früher für den Kegel erhaltenen kubischen Parabel zu betrachten.

Führen wir hier den Parameter λ ein, indem wir setzen:

$$\bar{x}_1 = abc\lambda, \quad \bar{x}_3 = -A^4 abc\lambda^3$$

Wir hatten (pag. 211)

$$x_1 = \frac{abc\lambda}{\lambda - 1}, \quad x_3 = -\frac{A^4 abc\lambda^3}{\lambda - 1}$$

so dass

$$\bar{x}_1 = x_1(\lambda - 1) \quad \text{und} \quad \bar{x}_3 = x_3(\lambda - 1)$$

Es ist x, y, z auf folgende Weise durch λ ausgedrückt:

$$x = k_x F(\lambda, a), \quad y = k_y F(\lambda, b), \quad z = k_z F(\lambda, c)$$

wo

$$k_x = \frac{abc}{(a-b)(a-b)} \text{ etc.}, \quad F(\lambda, t) = \lambda(1 - A^4 t^2 \lambda^2)$$

Die Function $F(\lambda, t)$ hat 3 Nullpunkte:

$$\lambda = 0, \quad \lambda = \frac{1}{A^2 t}, \quad \lambda = -\frac{1}{A^2 t}$$

Ferner ist

$$F(+\infty, t) = -\infty, \quad F(-\infty, t) = +\infty$$

so dass der Verlauf der Curve klar ist. (S. Fig. II_4).

$F(\lambda, t) > 0$, wenn

$$t > 0 \quad \Big| \quad -\infty < \lambda < -\frac{1}{A^2 t}; \quad 0 < \lambda < \frac{1}{A^2 t}$$

$$t < 0 \quad \Big| \quad -\infty < \lambda < \frac{1}{A^2 t}; \quad 0 < \lambda < -\frac{1}{A^2 t}$$

$F(\lambda, t) < 0$, wenn

$$-\frac{1}{A^2 t} < \lambda < 0; \quad \frac{1}{A^2 t} < \lambda < \infty$$

$$\frac{1}{A^2 t} < \lambda < 0; \quad -\frac{1}{A^2 t} < \lambda < \infty$$

Ist der Kegel ein **Rotationskegel**, so dass z. B. $b = c$ ist, so bestimmen wir aus der 1ten Gleichung

$$\frac{x}{y+z} = -\frac{a+b}{2b}$$

woraus folgt:

$$y + z = -\frac{2b}{a+b}x = \mu \cdot x$$

wo $0 < \mu < 1$ die notwendige und hinreichende Bedingung dafür ist, dass der Rotationskegel in der gleichseitigen Hyperbel geschnitten werden kann. Die Gleichung (2) geht über in

$$(b^2 x + \mu abx)^3 + \frac{a^2 b^2 c^2}{A^4}(x + \mu x) = 0$$

Eine Wurzel dieser Gleichung ist

$$x = 0, \quad (y + z = 0)$$

$$(b + \mu a) bx^2 + \frac{a^2 c^2}{A^4}(1 + \mu) = 0$$

Aus dieser Gleichung ergeben sich 2 Wurzeln:

$$x = +a^2 \quad \text{und} \quad x = -a^2$$

x kann nicht imaginär sein, denn wir haben

$$x = \pm \sqrt{-\frac{a^2 c^2 (1 + \mu)}{A^4 (b + \mu a) b}}$$

x könnte imaginär werden, wenn $b + \mu a$ negativ wird, also wenn

$$|b| > \mu a, \quad \left|\frac{b}{a}\right| > \mu, \quad \left|\frac{b}{a}\right| > -\frac{2b}{a+b}, \quad \left|\frac{b}{a}\right| > -\frac{b+b}{a+b}$$

$$\left|\frac{b}{a}\right| > \left|\frac{b+b}{a+b}\right|$$

$\frac{b}{a}$ ist ein echter Bruch. Wenn wir zum Zähler und Nenner eines echten Bruches das Gleiche hinzuaddiren, so wird der Bruch grösser, so dass die obige Ungleichung unmöglich ist, mithin x reell.

Die einzige Gerade, deren Abbildung reelle Ebenen liefert, ist

$$x = a^2, \quad y + z = \mu a^2$$

Hiermit ist gezeigt, wie die Raumcurve im Falle, dass der gegebene Kegelschnitt eine gleichseitige Hyperbel ist, in eine ebene Curve 3ter Ordnung deformirt, resp. in 3 Gerade degenerirt, wenn die Fläche eine Rotationsfläche ist.

Es bleibt noch der Fall zu erledigen, wo ein Paraboloid in einer gleichseitigen Hyperbel geschnitten werden soll. Die beiden Bedingungsgleichungen lauten, wenn

$$ax^2 + by^2 - 2z = 0$$

die Gleichung der Fläche ist:

$$U_1 = a(v^2 + w^2) + b(u^2 + w^2) = 0$$

$$-\frac{1}{A^4} = \frac{a^3 b^2 w^6}{(-2p\,ab\,w + av^2 + bu^2)\,(u^2 + v^2 + w^2)}$$

Führen wir hier die Substitution $\frac{u}{p} = x$ etc. ein.

$$bx^2 + ay^2 + (a+b)z^2 = 0$$
$$a^3 b^3 A^4 z^6 + (bx^2 + ay^2 - 2abz)^2 (x^2 + y^2 + z^2) = 0$$

Beide Gleichungen sind für

$$x = y = z = 0$$

befriedigt. Schliessen wir diesen Wert aus, so erhalten wir:

$$1)\quad bx^2 + ay^2 + (a+b)z^2 = 0$$
$$2)\quad a^3 b^3 A^4 z^4 + ((a+b)z + 2ab)^2 (x^2 + y^2 + z^2) = 0$$

Die Gleichung (1) stellt einen Kegel dar. Es darf nicht a und b zugleich positiv sein, wenn der Kegel reell sein soll, d. h. das Paraboloid muss ein hyperbolisches sein. Wir führen nun Polarcoordinaten ein:

$$x = \varrho l, \quad y = \varrho m, \quad z = \varrho n$$

Dabei variirt ϱ von 0 bis ∞ und l, m, n sind die Cos. der Winkel, welche die Richtung ϱ mit den Achsen bildet.

Da $z = 0$ ausgeschlossen ist, so ist auch $\varrho = 0$ ausgeschlossen, so dass die Gleichungen (1) und (2) lauten

$$(1)\quad bl^2 + am^2 + (a+b)n^2 = 0$$
$$(2)\quad a^3 b^3 A^4 \varrho^4 n^4 + ((a+b)\varrho n + 2ab)^2 \varrho^2 = 0$$

woraus folgt:

$$\varrho = -\frac{2ab\,(a + b \pm A^2 n \sqrt{-ab})}{a^3 b^3 A^4 n^3 + (a+b)^2 n}$$

Das Zeichen + oder — muss immer so genommen werden, dass ϱ positiv resultirt. Aus den Gleichungen

$$bl^2 + am^2 = -(a+b)\,n^2$$
$$l^2 + m^2 = 1 - n^2$$

folgt:

$$l^2 = \frac{a + bn^2}{a - b}, \quad m^2 = \frac{b + an^2}{b - a}$$

$$x^2 = \varrho^2 \frac{a + bn^2}{a - b}, \quad y^2 = \varrho^2 \frac{b + an^2}{b - a}, \quad z = \varrho n$$

wo ϱ eine bekannte Function von n ist, so dass x, y, z durch den Parameter n ausgedrückt sind.

Sollen die Schnittebenen reell sein, so ist n gewissen Bedingungen unterworfen, und zwar darf n bloss zwischen den Grenzen 0 und $\pm\sqrt{-\frac{a}{b}}$ oder $\pm\sqrt{-\frac{b}{a}}$ variiren, was daraus folgt, dass

$$\frac{a+bn^2}{a-b} = \alpha^2 \quad \text{und} \quad \frac{b+an^2}{a-b} = -\beta$$

sein muss, wenn α, β reell sind. Dabei müssen wir von den beiden Werten $\pm\sqrt{-\frac{a}{b}}$ und $\pm\sqrt{-\frac{b}{a}}$ immer den kleinern nehmen, damit sowol x^2 als auch y^2 positiv resultiren. Diese Grenzgebiete für n ergeben sich auch geometrisch aus der Betrachtung des Kegels

$$bx^2 + ay^2 + (a+b)z^2 = 0$$

§ 6. Discussion des Problems, wenn der gegebene Kegelschnitt eine Parabel ist.

Die allgemeine Gleichung 2ten Grades des durch den Schnitt der Ebene

$$ux + vy + wz - p = 0$$

und einer Oberfläche 2ten Grades hervorgebrachten Kegelschnittes war:

$$\mathfrak{A}\xi^2 + \mathfrak{B}\eta^2 + 2\mathfrak{C}\xi\eta + 2\mathfrak{D}\xi + 2\mathfrak{E}\eta + \mathfrak{F} = 0$$

wo $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{D}$, $\mathfrak{E}$, $\mathfrak{F}$ bekannte Functionen sind. Soll die Schnittcurve eine Parabel sein, so muss

$$\mathfrak{A}\mathfrak{B} - \mathfrak{C}^2 = 0$$

sein. Der Parameter derselben ist bestimmt:

$$q^2 = \frac{\mathfrak{A}\mathfrak{E}^2 + \mathfrak{B}\mathfrak{D}^2 - 2\mathfrak{C}\mathfrak{D}\mathfrak{E}}{(\mathfrak{A}+\mathfrak{B})^3} = \frac{\overline{W}}{U_1^3}$$

Die Bedingungsgleichungen nehmen die Gestalt an:

$$q^2 U_1^3 = \overline{W}, \quad V = 0, \quad T = u^2 + v^2 + w^2 = 1$$

Wir sehen daraus, dass dieselbe Untersuchung zugleich für die Hyperboloide und den Kegel giltig ist, da diese Bedingungsgleichungen alle von F unabhängig sind, das constante Glied 1 aber nur in F vorkam.

Nehmen wir also an, die gegebene Fläche habe die Gleichung

$$ax^2 + by^2 + cz^2 - 1 = 0 \quad \text{oder} \quad ax^2 + by^2 + cz^2 = 0$$

und setzen dementsprechend die Werte für $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{E}$, $\mathfrak{D}$ ein, so erhalten wir:

$$\overline{W} = \begin{vmatrix} \mathfrak{A} & \mathfrak{D} & \mathfrak{C} \\ \mathfrak{C} & \mathfrak{E} & \mathfrak{B} \\ \mathfrak{D} & 0 & \mathfrak{E} \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} af^2+bg^2+ch^2 & p(afu+bgv+chw) & aff'+bgg'+chh' \\ aff'+bgg'+chh' & p(af'u+bg'v+ch'w) & af'^2+bg'^2+ch'^2 \\ p(afu+bgv+chw) & 0 & p(afu+bgv+chw) \end{vmatrix}$$

$$\overline{W} = p^2\{abw^2[(a-c)u^2+(b-c)v^2]+acv^2[(c-b)w^2+(a-b)u^2] + bcu^2[(b-a)v^2+(c-a)w^2]\}$$

Durch Einführung der Substitution

$$\frac{u^2}{p^2} = x, \quad \frac{v^2}{p^2} = y, \quad \frac{w^2}{p^2} = z$$

transformiren sich die Gleichungen:

(1) $\quad V = bcx + acy + abz = 0$

(2) $\quad q^2\frac{U^3}{p^6} - \frac{\overline{W}T}{p^6} = q^2\{(b+c)x+(a+c)y+(a+b)z\}^3 - p^2\{a(b-c)^2yz+b(c-a)^2xz+c(a-b)^2xy\}(x+y+z) = 0$

Die Combination beider Gleichungen stellt eine ebene Curve 3ter Ordnung dar und zwar eine semikubische Parabel.

Um dieses zu beweisen, brauchen wir nur ein passendes Coordinatensystem zu legen. Es seien die Grössen x_1, y_1 unabhängig veränderlich und

$$x = \frac{a(b-c)}{\varDelta}(x_1 - ay_1)$$

$$y = \frac{b(c-a)}{\varDelta}(x_1 - by_1)$$

$$z = \frac{c(a-b)}{\varDelta}(x_1 - cy_1)$$

$$\varDelta = (a-b)(b-c)(c-a) = (c-b)a^2 + (a-c)b^2 + (b-a)c^2$$

Die Gleichung

$$bcx + acy + abz = \frac{x_1\,abc}{\Delta}(b - c + c - a + a - b)$$
$$- y_1\frac{abc}{\Delta}(a(b-c) + b(c-a) + c(a-b))$$

ist identisch null, so dass die Gleichung (1) für jedes System x_1, y_1 befriedigt ist. Setzen wir also die Werte für x, y, z in die Gleichung (2) ein, so erhalten wir eine Gleichung in x_1, y_1, welche den Schnitt der durch die beiden Bedingungsgleichungen dargestellten Flächen liefert. Berücksichtigen wir, dass

$$(b+c)x + (a+c)y + (a+b)z = x_1$$
$$a(b-c)^2yz + b(c-a)^2xz + c(a-b)^2xy = -abc\,y_1^3$$
$$x + y + z = y_1$$

so lautet die Gleichung (2):

$$(2) \quad q^2x_1^3 + p^2\,abc\,y_1^3 = 0$$

Nun ist aber

$$y_1 = x + y + z = \frac{1}{p^2}$$

so dass die Gleichung resultirt:

$$(2) \quad q^2x_1^3 + abc\,y_1^2 = 0$$

wo x_1, y_1 sich von schiefwinkligen Coordinaten höchstens um Constante unterscheiden, die als Factoren auftreten. Dieses ist die Gleichung einer semikubischen Parabel, deren Spitze im Anfangspunkte

$$x = y = z = 0$$

liegt. Denn setzen wir

$$x_1 = y_1 = 0$$

so erhalten wir:

$$(b+c)x + (a+c)y + (a+b)z = 0$$
$$x + y + z = 0$$
$$bcx + acy + abz = 0$$

Dieses System von homogenen linearen Gleichungen kann nur durch die Werte

$$x = y = z = 0$$

befriedigt werden.

Für die Werte

$$x_1 = -p\lambda^2, \quad \text{wo} \quad p = abc \quad \text{ist, und} \quad q\lambda^3 = y_1$$

geht die Gleichung

in die Identität

$$q^2 x_1^3 + p^3 y_1^2 = 0$$

$$-q^2 p^3 \lambda^6 + q^2 p^3 \lambda^6 = 0$$

über. Dabei ist λ sehr einfach durch p anszudrücken und wir könnten sogar p als Parameter einführen, was jedech nicht zweckmässig erscheint.

Die Coordinaten der Curve nehmen die Gestalt an:

$$x = k_x' \lambda^2 \left(\lambda + \frac{p}{aq}\right), \quad y = k_y' \lambda^2 \left(\lambda + \frac{p}{bq}\right), \quad z = k_z' \lambda^2 \left(\lambda + \frac{p}{cq}\right)$$

wo

$$k_x' = \frac{a^2 q}{(a-b)(a-c)}, \quad k_y' = \frac{b^2 q}{(b-c)(b-a)}, \quad k_z' = \frac{c^2 q}{(c-a)(c-b)}$$

Die 3 Coefficienten k_x', k_y', k_z' können nicht alle zugleich dasselbe Vorzeichen haben, weil die Zähler wesentlich positiv sind, von den Nennern dagegen wenigstens einer negativ sein muss.

$$a-b)(a-c) = K^2, \quad (b-a)(b-c) = L^2, \quad (a-c)(b-c)(a-b)^2 = -K^2 L^2$$

$$(c-a)(c-b) < 0$$

Demnach wird von den 3 Ausdrücken $\lambda + \frac{p}{aq}$, $\lambda + \frac{p}{bq}$, $\lambda + \frac{p}{cq}$ wenigstens einer negativ sein müssen, damit x, y, z positiv seien.

Bei den Rotationsmittelpunktsflächen ist die Lage der Schnittebenen eine der früher erhaltenen ganz analoge.

Soll ein **Paraboloid**

$$ax^2 + by^2 = 2z$$

von der Ebene

$$ux + vy + wz - p = 0$$

in einer Parabel geschnitten werden, so muss die Gleichung

$$\mathfrak{A}\mathfrak{B} - \mathfrak{C}^2 = ab\,w^2 = 0$$

erfüllt sein, aus welcher $w = 0$ folgt.

Eine Schaar von Parallelebenen schneidet das Paraboloid in Parabeln, welche der Gestalt und der Grösse nach gleich sind. Denn transformiren wir die Coordinaten, indem wir setzen:

$$x = x'u - y'v + \alpha$$

$$y = x'v + y'u + \beta$$

$$z = z' + \gamma$$

und die Gleichung

$$ax^2 + by^2 - 2z = 0$$

in Bezug auf diese Coordinaten, so erhalten wir, wenn wir $x' = 0$ setzen, die Gleichung der Schnittcurve der Ebene

$$ux + vy - p = 0$$

mit dem Paraboloid.

$$y'^2(av^2 + bu^2) + 2y'(b\beta u - a\alpha v) - 2(z' + \gamma) + a\alpha^2 + b\beta^2 = 0$$

Wir wählen α, β, γ so, dass

$$b\beta u - a\alpha v = 0, \quad a\alpha^2 + b\beta^2 = 2\gamma$$

Alsdann geht die obige Gleichung über in

$$y'^2 = \frac{2}{av^2 + bu^2} z' = 2qz'$$

Dieses ist die Gleichung einer Parabel, wobei q von p unabhängig ist.

Aus der obigen Gleichung folgt ferner:

$$u^2 = \frac{1 - aq}{q(b - a)}, \quad v^2 = -\frac{1 - bq}{q(b - a)}$$

Ausserdem muss noch die Bedingung

$$u\alpha + v\beta - p = 0$$

erfüllt sein.

Aus den beiden Gleichungen

$$b\beta u - av\alpha = 0 \quad \text{und} \quad v\beta + u\alpha = p$$

ergiebt sich

$$\alpha = bupq \quad \text{und} \quad \beta = avpq$$

woraus

$$2\gamma = abp^2q$$

wo p variabel ist.

Es ist leicht einzusehen, dass wenn umgekehrt

$$u^2 = \frac{1 - aq}{q(b - a)} \quad \text{und} \quad v^2 = -\frac{1 - bq}{q(b - a)}$$

für ein gegebenes q feste Werte haben, das Paraboloid

$$ax^2 + by^2 - 2z = 0$$

von der Schaar der Ebenen

$$ux + vy - p = 0$$

in Parabeln geschnitten wird, deren Parameter gleich q ist, und deren Scheitelpunkte die Coordinaten

$$\alpha = bupq, \quad \beta = avpq, \quad \gamma = \tfrac{1}{2}abp^2q$$

haben.

Dieselben Resultate können wir, allerdings in einer nicht so übersichtlichen Form, nach der allgemeinen Methode ableiten.

Ist das Paraboloid ein Rotationsparaboloid, so dass $a = b$ ist, so schneiden alle zur Rotationsaxe parallelen Ebenen dasselbe in gleichen Parabeln, deren Parameter gleich dem reciproken Werte des Coefficienten der quadratischen Glieder ist, vorausgesetzt, dass die Gleichung der Fläche in der Form

$$a(x^2 + y^2) = 2z$$

gegeben ist.

Dorpat, den 6. Februar 1893.

XIII.
Miscellen.

1.
Ueber die Transformation eines Integrals.

Im Arch. d. Math. u. Phys. (2), T VII, pag. 110—112 reducirt Herr W. Láska die zwei Integrale

$$\int \frac{dt}{\sqrt{t^6+\alpha t^3+1}} \quad \text{und} \quad \int \frac{dt}{\sqrt{t^8+\alpha t^4+1}}$$

auf elliptische, und zwar das erste auf eine Summe von zwei elliptischen Integralen, aber das zweite auf ein einziges elliptisches Integral. Letzteres geschieht durch die successiven Substitutionen

$$t = \frac{1}{z}, \quad z = \operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}, \quad \cos\varphi = x$$

d. h. durch die Substitution

$$t^2 = \frac{1+x}{1-x}$$

Setzt man einfach $t^2 = u$, so sinkt das Geschlecht des Integrals von 3 zu 2 herab; es muss unmöglich sein, nachher durch eine lineare Substitution das Geschlecht noch um eine Einheit zu vermindern, da eine solche Substitution das Geschlecht eines Abel'schen Integrals überhaupt nicht verändern kann. In der Tat zeigt auch eine nähere Untersuchung, dass Herr Láska in seiner Rechnung ein Versehen begangen hat (eine Verwechselung von $\sin\varphi$ und $\sin^2\frac{\varphi}{2}$). — Zu einer Summe zweier elliptischen Integrale transformirt sich das fragliche Integral bei der Substitution

$$t^2 = x + \sqrt{x^2 - 1}$$

sowie das erste Integral für

$$t = x + \sqrt{x^2 - 1}$$

wie schon Legendre gezeigt hat (vergl. Enneper, Ellipt. Functionen, Aufl. 1, p. 435).

Die unbrauchbare Substitution erwähnt Hr. L. auch in seiner „Sammlung von Formeln etc.“, 2te Lieferung, p. 323.

Lund, März 1893. T. Brodén.

2.

Aufgabe.

Es soll folgender Satz bewiesen werden.

Beschreibt man über den Seiten eines beliebigen Dreiecks als Grundlinien gleichschenklige Dreiecke mit lauter gleichen Basiswinkeln, so schneiden sich die 3 Hauptdiagonalen des von den Schenkeln gebildeten Sechsecks in einem Punkte.

Dieser Satz gilt gleicherweise von ebenen und sphärischen Dreiecken.

Charlottenburg. Prof. Dr. Leman.

Fig. 7.

Fig. 6.

Fig. 4.

$I, 1$ $f(\lambda, t)$ λ_3 λ_{2t} λ_{1t} 0 λ

$I, 2$ $f(\lambda, t)$ λ_{2t} λ_3 λ_{1t} 0 λ

$I, 3$ $f(\lambda, t)$ λ_{2t} λ_{1t} λ_3 0 λ

$-\frac{1}{A^2 t}$ 0 1 $\frac{1}{A^2 t}$

$-\frac{1}{A^2 t}$ 0 $1/A^2 t$ 1

$H_3)$ $1 = A^4 t^2$ $f(\lambda, t)$ $-\frac{1}{A^2 t}$ 0 $\frac{1}{A^2 t} = 1$ λ

$H_4)$ $f(\lambda, t)$ $-\frac{1}{A^2 t}$ 0 $\frac{1}{A^2 t}$ λ

XII. Krewer: Problem eine Fläche 2. Grades in gegebenem Kegelschnitt zu schneiden.

XIV.

Einige Bemerkungen über die Lamé'schen Functionen zweiter Art.

(Fortsetzung von Nr. VIII)

Von

Ulrich Bigler.

Es sei

1⁰. $c < z < \infty$; man setze

$$z-a = (c-a)\frac{1}{S^2(u)},\quad z-b = (c-a)\frac{D^2(u)}{S^2(u)},\quad z-c = (c-a)\frac{C^2(u)}{S^2(u)}$$

2⁰. $a < z < c$; in diesem Falle setze man

$$z-a = (c-a)k^2 S^2(u),\quad b-z = (c-a)k^2 C^2(u),\quad c-z = (c-a)D^2(u)$$

in beiden Fällen sei

$$k^2 = \frac{b-a}{c-a}$$

Dem Werte x der Variabeln z entspreche das Argument w.

$$1)\quad n = 0,\quad (\alpha, \beta, \gamma) = (0, 0, 0),\quad v = 0$$

$$P(x) = 1;\quad U(z) = \int\limits_c \frac{dz}{2\sqrt{(z-a)(z-b)(z-c)}} = -z^{-\frac{1}{2}} + \ldots$$

$$\frac{U^2(z)}{(z-x)^2} = z^{-3} + \ldots$$

also ist

$$(I) = 0$$

$$U_2 = 2\sqrt{(c-a)} \int_K^{K+L} k^2 C^2(u)\,du$$

Nun ist das unbestimmte Integral

$$\int k^2 C^2(u)\,du = E\,\mathrm{am}\,u - l^2 u = Z(u) + \left(\frac{E}{K} - l^2\right)u$$

Weil

$$Z(K) = 0, \quad Z(K+L) = -\frac{i\pi}{2K}$$

so ist

$$U_2 = 2\sqrt{(c-a)}\left(-\frac{i\pi}{2K} + \left(\frac{E}{K} - l^2\right)L\right)$$

Dass dieser Wert südlich lateral ist, wie es der anfängliche Ausdruck

$$U_2 = \int_b^c \frac{z-b}{i\sqrt{(z-a)(z-b)(c-z)}}\,dz$$

anzeigt, kann man wie folgt, einsehen. Wenn

$$L = iK', \quad E' = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - l^2 \sin^2\varphi}\,d\varphi$$

so ist

$$\frac{\pi}{2} = EK' + KE' - KK', \quad \frac{\pi}{2} - EK' + l^2 KK' = K(E' - k^2 K')$$

positiv, weil

$$E' - k^2 K' - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{l^2 \cos^2\varphi \times d\varphi}{\sqrt{1 - l^2 \sin^2\varphi}}$$

$$V_1 = \frac{2}{\sqrt{(c-a)}} \int_0^K \frac{S^2(w)}{1 - k^2 S^2(w) S^2(u)} \times k^2 C^2(u)\,du$$

$$= \frac{\cdot\, 2}{\sqrt{(c-a)}} \int_0^K \left(k^2 S^2(w) - \frac{k^2 S^2(w)\, D^2(w)\, S^2(u)}{1 - k^2 S^2(w) S^2(u)}\right) du$$

$$= \frac{2}{\sqrt{(c-a)}} \cdot \frac{S(w)\,D(w)}{C(w)} \left[k^2 \frac{S(w)\,C(w)}{D(w)} \cdot K - \Pi(K,\,w)\right]$$

$$= \frac{2}{\sqrt{(c-a)}} \cdot \frac{S(w)\,D(w)}{C(w)} \times K \left[k^2 \frac{S(w)\,C(w)}{D(w)} - Z(w)\right]$$

man findet auch

$$V_2 = \frac{2}{\sqrt{(c-a)}} \cdot \frac{S(w)\,D(w)}{C(w)} \left[k^2 \frac{Sw\;Cw}{D(w)} \cdot L - \Pi(K+L,\,w) + \Pi(K,\,w)\right]$$

Wenn u von K gerade nach $K+L$ hingeht, so ist

$$\Pi(K+L) - \Pi(K) = L \,.\, Z(w) + \frac{i\pi}{2K} w$$

also

$$V_2 = \frac{2}{\sqrt{(c-a)}} \cdot \frac{S(w)\,D(w)}{C(w)} \times L \left(k^2 . \frac{S(w)\,C(w)}{D(w)} - Z(w) - \frac{i\pi}{2KL} w\right)$$

und somit

$$U_1 V_2 - U_2 V_1 = -2 i\pi \,.\, \frac{S(w)\,D(w)}{C(w)}$$

$$\times \left[\left(\frac{E}{K} - l^2\right) w - k^2 \frac{S(w)\,C(w)}{D(w)} + E \operatorname{am} w - \frac{E}{K} w\right]$$

Weil

$$\sqrt{(x-a)\,(x-c)} = (c-a) \cdot \frac{C(w)}{S^2(w)}$$

so ergibt sich endlich

$$W(x) = -2 i\pi\,(c-a) \cdot \frac{D(w)}{S(w)} \left[E \operatorname{am} w - l^2 w - k^2 \frac{S(w)\,C(w)}{D(w)}\right]$$

folglich

$$W(x) = -(b-a)(c-b) \times \frac{2 i\pi}{3} \times T(x)$$

3) $(\alpha,\,\beta,\,\gamma) = (0,\,0,\,\tfrac{1}{2})$

Man hat sogleich

$$P(x) = \sqrt{x-c} = \sqrt{(c-a)} \times \frac{C(w)}{S(w)}\,;$$

$$U(z) = \tfrac{1}{2} \int\limits_c \frac{\sqrt{(z-c)}}{\sqrt{(z-a)(z-b)}} \times dz = z^{1/2} + \ldots$$

also

$$\frac{U^2(z)}{(z-x)^2} = \frac{1}{z} + \ldots$$

folglich

$$(I) = 2i\pi \,.\, \sqrt{(x-a)(x-b)} = 2i\pi \,.\, (c-a) \,.\, \frac{D(w)}{S^2(w)}$$

Ferner ist

$$U_1 = 2\int_a^b \frac{(z-c)}{2\sqrt{(z-a)(b-z)(c-z)}} \,.\, dz = -2\int_0^K \sqrt{(c-a)} \times D^2(u)\,du$$

also

$$U_1 = -2\sqrt{(c-a)} \times E$$

Ebenso findet man

$$\int_c^x \frac{\sqrt{z-c}}{\sqrt{(z-a)(z-b)}} \,.\, dz = 2\sqrt{(c-a)} \int_w^K \frac{C^2(u)}{S^2(u)} du$$

$$= 2\sqrt{(c-a)} \left[-E + E\,\mathrm{am}\,w + \frac{C(w)\,.\,D(w)}{S(w)}\right]$$

und also ist

$$U(x_1) - U(x_2) = 2\sqrt{(c-a)} \left[E\,\mathrm{am}\,w + \frac{C(w)\,D(w)}{S(w)}\right]$$

also auch

$$(II) + (III) = -2i\pi(c-a) \,.\, \frac{C(w)}{S(w)} \left[E\,\mathrm{am}\,w + \frac{C(w)\,D(w)}{S(w)}\right]$$

folglich

$$W(x) = -2i\pi \times (c-a) \,.\, \frac{C(w)}{S(w)} \left[E\,\mathrm{am}\,w - \frac{S(w)\,D(w)}{C(w)}\right]$$

Vergleicht man nun diesen Ausdruck mit dem entsprechenden Werte von $T(x)$ auf Seite 131, so erhält man zwischen $W(x)$ und $T(x)$ die Relation

$$W(x) = (c-a)(c-b) \times \frac{2i\pi}{3} \times T(x)$$

III. $n = 2.$

1) $(\alpha, \beta, \gamma) = (0, 0, 0), \; v = 1$

In diesem Falle ist

$$P(x) = x - d; \quad 3d^2 - 2\,\Sigma a \times d + \Sigma bc = 0;$$

$$U(z) = \int_c \frac{z-d}{2\sqrt{(z-a)(z-b)(z-c)}} \times dz = z^{1/2} + \ldots;$$

$$\frac{U^2(z)}{(z-x)^2} = \frac{1}{z} + \ldots$$

also

$$(I) = 2i\pi\sqrt{\Pi(x-a)} = 2i\pi(c-a)^{3/2}\frac{C(w)\,D(w)}{S^3(w)}$$

Und weil

$$\int\limits_c^x \frac{z-d}{\sqrt{\Pi(z-a)}} \times dz = \int\limits_c^x \frac{\sqrt{(z-a)}}{\sqrt{(z-b)(z-c)}}\,dz$$

$$-(d-a)\int\limits_c^x \frac{dz}{\sqrt{\Pi(z-a)}}$$

also

$$\int\limits_c^x \frac{z-d}{\sqrt{\Pi(z-a)}} \times dz$$

$$= 2\sqrt{(c-a)}\left[E\,\mathrm{am}\,w - \mathrm{E} + \frac{C(w)\,D(w)}{S(w)} + \frac{c-d}{c-a}\,(K-w)\right]$$

weil auch

$$U_1 = \int\limits_a^b \frac{z-d}{\sqrt{(z-a)(b-z)(c-z)}} \times dz = 2\sqrt{(c-a)}\left[\frac{c-d}{c-a} \times K - \mathrm{E}\right]$$

so ist

$$U(x_1) - U(x_2) = 2\sqrt{(c-a)}\left[E\,\mathrm{am}\,w + \frac{C(w)\,.\,D(w)}{S(w)} - \frac{c-d}{c-a} \times w\right]$$

Ferner hat man, da

$$-i\pi P(x) = -i\pi(c-a)\left(\frac{x-c}{c-a} + \frac{c-d}{c-a}\right)$$

$$= -i\pi(c-a)\left(\frac{C^2(w)}{S^2(w)} + \frac{c-d}{c-a}\right) \quad \text{ist,}$$

$$(II) + (III) = -2i\pi(c-a)^{3/2}\left(\frac{C^2(w)}{S^2(w)} + \frac{c-d}{c-a}\right)$$

$$\times\left(E\,\mathrm{am}\,w + \frac{C(w)\,.\,D(w)}{S(w)} - \frac{c-d}{c-a}\,.\,w\right)$$

und also endlich

$$W(x) = -2i\pi(c-a)^{3|2}\left[\left(\frac{C^2(w)}{S^2(w)} + \frac{c-d}{c-a}\right)\right.$$
$$\left.\times\left(E\,\mathrm{am}\,w - \frac{c-d}{c-a}\,.\,w\right) - \frac{d-a}{c-a}\,.\,\frac{C(w)\,.\,D(w)}{S(w)}\right]$$

Um diesen Ausdruck mit demjenigen für $T(x)$ vergleichen zu können, muss man

$$\frac{d-a}{c-a} = \frac{1}{S^2(\varepsilon)},\quad \frac{c-d}{c-a} = -\frac{C^2(\varepsilon)}{S^2(\varepsilon)}$$

setzen. Dann ist

$$W(x) = -2i\pi\frac{(c-a)^{3|2}}{S^4(\varepsilon)}\left[\frac{S^2(\varepsilon)-S^2(w)}{S^2(w)}\left(S^2(\varepsilon)\times E\,\mathrm{am}\,w + C^2(\varepsilon)\,.\,w\right)\right.$$
$$\left.-S^2(\varepsilon)\,.\,\frac{C(w)\,.\,D(w)}{S(w)}\right]$$

und die Vergleichung mit dem Ausdrucke $T(x)$ giht die Relation

$$W(x) = \frac{4i\pi}{5}(d-a)(d-b)(d-c)\times T(x)$$

2) $(\alpha, \beta, \gamma) = (0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}),\ v = 0.$

Es ist

$$P(x) = \sqrt{(x-b)(x-c)} = (c-a)\,.\,\frac{C(w)\,.\,D(w)}{S^2(w)};$$

$$U(z) = \frac{1}{2}\int_c \frac{\sqrt{(z-b)(z-c)}}{\sqrt{(z-a)}}\,dz$$

wenn nun $b+c-a=0$ angenommen wird, so ist

$$U(z) = \frac{1}{3}z^{3|2} + 0\,.\,z^{1|2} - \frac{1}{2}bc\quad z^{-1|2} + \ldots;$$
$$U^2(z) = \frac{1}{9}z^3 + 0\,.\,z^2 - \frac{1}{3}bc\,.\,z + \ldots$$

also

$$\frac{U^2(z)}{(z-x)^2} = \frac{1}{9}z - \text{const.} + \frac{1}{3}(x^2 - bc)\,.\,\frac{1}{z} + \ldots$$

Heht man die Beschränkung, dass

$$b+c-a=0$$

sein soll, dadurch wieder auf, dass man jedem der jetzigen a, b, c, d, x noch $-(b+c-a)$ zusetzt, so dass sie in $-(b+c-2a)$, $-(c-a)$, $-(b-a)$, $(d-b+a-c)$, $(x-b+a-c)$ übergehen, so ist

$$\frac{U^4(z)}{(z-x)^4} = \frac{1}{9} \cdot z - \text{const.} + \tfrac{1}{3}[(x-b-c+a)^2-(c-a)(b-a)]\ \frac{1}{z} + \dots$$

Der Coefficient von $\frac{1}{z}$ in der Entwicklung von $\frac{U^2(z)}{(z-x)^2}$ ist also gleich

$$+\tfrac{1}{3}[((x-b)-(c-a))^2-(c-a)(b-a)]$$

und somit

$$(I) = (c-a)^{3/2} \cdot \frac{2i\pi}{3} \cdot \frac{1}{S^5(w)}\ [(C^2(w)\,D^2(w) - k^2 S^4(w))^2 - k^2 S^4(w)]$$

Ferner ist

$$U_1 = \int_a^b \frac{\sqrt{(b-z)(c-z)}}{\sqrt{(z-a)}}\,dz = 2(c-a)^{3/2} \int_0^K k^2\, C^2(u)\, D^2(u)\, du$$

$$= 2(c-a)^{3/2}\left[-l^2 E + \int_0^K D^4(u)\,du\right]$$

weil nun

$$D^4(u) = \tfrac{1}{3}\left[k^2\, \frac{\partial}{\partial u}\,(S(u)\,.\,C(u)\,.\,D(u)) + 2\,D^2(u)\,.\,(1+l^2) - l^2\right]$$

so findet man

$$U_1 = (c-a)^{3/2}\,.\,\tfrac{1}{3} \times [(1+k^2)\,E - l^2 K]$$

Noch bleibt $\int_c^x \frac{\sqrt{(z-b)(z-c)}}{\sqrt{z-a}}\,dz$ zu berechnen. Es ist

$$\int_c^x \frac{\sqrt{(z-b)(z-c)}}{\sqrt{z-a}} \times dz = 2(c-a)^{3/2} \int_w^K \frac{C^2(u)\,.\,D^2(u)}{S^4(u)} \times du$$

und da

$$3\,\frac{C^2(u)\,.\,D^2(u)}{S^4(u)} = -\frac{D^2(u)}{S^2(u)} - k^2\,\frac{C^2(u)}{S^2(u)} - \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{C(u)\,.\,D(u)}{S^3(u)}\right)$$

so ist

$$\int_c^x \frac{\sqrt{(z-b)(z-c)}}{\sqrt{(z-a)}} \times dz = (c-a)^{3/2} \times \tfrac{2}{3}[(1+k^2)\mathrm{E} - l^2K + l^2w$$

$$-(1+k^2)\,E\,\mathrm{am}\,w + \frac{C(w)\,.\,D(w)}{S^3(w)}(C^2(w)\,.\,D^2(w) - k^2S^4(w))]$$

und demnach ist

$$U(x_1) - U(x_2) = (c-a)^{3/2} \times \tfrac{2}{3} \times [(1+k^2)\,E\,\mathrm{am}\,w - l^2w$$

$$-\frac{C(w)\,.\,D(w)}{S^3(w)}(C^2(w)\,.\,D^2(w) - k^2\,S^4(w)]$$

folglich

$$(II) + (III) = (c-a)^{5/2} \times \frac{2i\pi}{3}[(1+k^2)\,E\,\mathrm{am}\,w - l^2\,w$$

$$-\frac{C(w)\,.\,D(w)}{S^3(w)}(C^2(w)\,.\,D^2(w) - k^2S^4(w)]\,.\,\frac{C(w)\,.\,D(w)}{S^2(w)}$$

somit

$$W(x) = (c-a)^{5/2}\,\frac{2i\pi}{3}\left[\frac{C(w)\,.\,D(w)}{S^2(w)}((1+k^2)\,E\,\mathrm{am}\,w - l^2\,w)\right.$$

$$\left. -\frac{2k^2}{S(w)} + k^2(1+k^2)\,S(w)\right]$$

also nach Seite 134 ist demnach

$$W(x) = -(c-a)(b-a)(c-b)^2 \times \frac{2i\pi}{3\,.\,5} \times T(x).$$

3) $(\alpha,\ \beta,\ \gamma) = (\tfrac{1}{2},\ 0,\ \tfrac{1}{2}),\ v = 0.$

$$P(x) = \sqrt{(x-a)(x-c)} = (c-a)\,.\,\frac{C(w)}{S^2(w)}\,;$$

$$U(z) = \tfrac{1}{2}\int_c \frac{\sqrt{(z-a)(z-c)}}{\sqrt{(z-b)}} \times dz$$

Sotzt man $a + c - b = 0$, so ist

$$U(z) = \tfrac{1}{3}\,.\,z^{3/2} + 0\,.\,z^{1/2} - \frac{ac}{2}\,.\,z^{-1/2} + \ldots$$

also

$$\frac{U^2(z)}{(z-x)^2} = \tfrac{1}{9}\,.\,z + \mathrm{const.} + \tfrac{1}{3}(x^2 - ac)\,.\,\frac{1}{z} + \ldots$$

und somit nach Anfhebung obiger Beschränkung der Coefficient von $\frac{1}{z}$ in der Entwicklung von $\frac{U^2(z)}{(z-x)^2}$ gleich

$$\tfrac{1}{3}\left[(b-a)(c-b)+(x-a-(c-b))^2\right]$$

Man hat demnach

$$(I) = (c-a)^{5/2} \cdot \frac{2i\pi}{3} \cdot \frac{D(w)}{S^5(w)}\left[(1-l^2S^2(w))^2+l^2k^2S^4(w)\right]$$

Auch ist

$$U_1 = -\int_a^b \frac{\sqrt{(z-a)(c-z)}}{\sqrt{b-z}}\,dz = -2(c-a)^{3/2}k^2\int_0^K S^2(u)\,.\,D^2(u)\,du$$

$$= (c-a)^{3/2}\,.\,\tfrac{2}{3}\left[(l^2-k^2)\,\mathrm{E}-l^2K\right]$$

Weil ferner

$$\int_c^x \frac{\sqrt{(z-a)(z-c)}}{\sqrt{z-b}}\,dz = 2(c-a)^{3/2}\int_w^K \frac{C^2(u)}{S^4(u)}\,du$$

$$= 2(c-a)^{3/2}\left[\int_w^K \frac{D^2(u)\,.\,C^2(u)}{S^4(u)}\,du + k^2\int_w^K \frac{C^2(u)}{S^2(u)}\,du\right],$$

so ist nach früherem

$$\int_c^x \frac{\sqrt{(z-a)(z-c)}}{\sqrt{(z-b)}}\,dz = \tfrac{1}{3}\Big[(l^2-k^2)\,\mathrm{E}-(l^2-k^2)\,E\,\mathrm{am}\,w-l^2(K-w)$$

$$-(l^2-k^2)\frac{C(w)\,.\,D(w)}{S(w)}+\frac{C(w)\,.\,D(w)}{S^3(w)}\Big]$$

und also

$$U(x_1)-U(x_2) = (c-a)^{5/2}.\,\tfrac{2}{3}\Big[-(l^2-k^2)\,E\,\mathrm{am}\,w+l^2w$$

$$-(l^2-k^2)\,\frac{C(w)\,.\,D(w)}{S(w)}+\frac{C(w)\,.\,D(w)}{S^5(w)}\Big]$$

folglich ist .

$$(II)+(III) = (c-a)^{5/2}\,\frac{2i\pi}{3}\times\frac{C(w)}{S^2(w)}\Big[(l^2-k^2)\,E\,\mathrm{am}\,w - l^2 w + (l^2-k^2)\,\frac{C(w)\,.\,D(w)}{S(w)} + \frac{C(w)\,.\,D(w)}{S^3(w)}\Big]$$

und nach einigen Reductionen erhält man schliesslich

$$W(x) = (c-a)^{5/2}\,\frac{2i\pi}{3}\Big[\frac{C(w)}{S^2(w)}\,((1-2k^2)\,E\,\mathrm{am}\,w - l^2 w) + k^2\,.\,\frac{D(w)}{S(w)}\Big]$$

Die Vergleichung mit dem entsprechenden Ausdrucke von $T(x)$ gibt

$$W(x) = (b-a)(c-b)(c-a)^2\,.\,\frac{2i\pi}{3\,.\,5}\times T(x)$$

4) $(\alpha,\,\beta,\,\gamma) = (\tfrac{1}{2},\,\tfrac{1}{2},\,0),\; v = 0.$

Es ist

$$P(x) = \sqrt{(x-a)(x-b)} = (c-a)\,.\,\frac{D(w)}{S^2(w)};$$

$$U(z) = \tfrac{1}{2}\int\limits_c \frac{\sqrt{(z-a)(z-b)}}{\sqrt{(z-c)}}\,.\,dz$$

wird $a+b-c=0$ angenommen, so ist

$$U(z) = \tfrac{1}{3}\,.\,z^{3/2} + 0\,.\,z^{1/2} - \frac{ab}{2}\,.\,z^{-1/2} + \,.\,.\,.\,;$$

$$\frac{U^2(z)}{(z-x)^2} = \tfrac{1}{9}\,.\,z + \text{const.} + \tfrac{1}{3}\,(x^2-ab)\,.\,z^{-1} + \,.\,.\,.$$

wird nun die Beschränkung $a+b-c=0$ wieder aufgehoben, so findet man

$$\tfrac{1}{3}\,[(x-a-b+c)^2 - (a-c)(b-c)]$$

als Coeff von $\frac{1}{z}$ in der Entwicklung von $\frac{U^2(z)}{(z-x)^2}$. Demnach ist

$$(I) = (c-a)^{3/2}\times\frac{2i\pi}{3}\times\frac{C(w)}{S^5(w)}\,[(1+l^2S^2(w))^2 - l^2S^4(w)]$$

Ferner ist

$$U_1 = -\int\limits_a^b \frac{\sqrt{(z-a)(b-z)}}{\sqrt{(c-z)}}\,dz = -2(c-a)^{3/2}\int\limits_0^K k^4S^2(u)\,.\,C^2(u)\,du$$

also

$$U_1 = (c-a)^{3/2} = \tfrac{2}{3}[-(1+l^2)E + 2l^2 K]$$

Auch findet man, dass

$$\int_c^z \frac{\sqrt{(z-a)(z-b)}}{\sqrt{z-c}}\, dz = 2(c-a)^{3/2} \int_w^K \frac{D^2(u)}{S^2(u)} \,.\, du$$

$$= 2(c-a)^{3/2} \left[\int_w^K \frac{D^2(u)\,.\,C^2(u)}{S^4(u)}\, du + \int_w^K \frac{D^2(u)}{S^2(u)}\, du\right]$$

$$= (c-a)^{3/2} \,.\, \tfrac{2}{3} \Big[-(1+l^2)E + 2l^2 K - 2l^2 w + (1+l^2)\, E\,\mathrm{am}\, w$$
$$+ \frac{C(w)\,.\,D(w)}{S^3(w)} (1 + (1+l^2)\; S^2(w)\Big]$$

ist und somit

$$U(x_1) - U(x_2) = (c-a)^{3/2} \,.\, \tfrac{2}{3} \Big[-2l^2 w + (1+l^2)\, E\,\mathrm{am}\, w$$
$$+ \frac{C(w)\,.\,D(w)}{S^3(w)} (1 + (1+l^2)\, S^2(w))\Big]$$

also auch

$$(II) + (III) = (c-a)^5 \times \frac{2i\pi}{3} \times \frac{D(w)}{S^2(w)}$$
$$\times \left[2l^2 w - (1+l^2)\, E\,\mathrm{am}\, w - \frac{C(w)\,.\,D(w)}{S^3(w)} (1 + (1+l^2) S^4(w))\right]$$

Als Ausdruck für $W(x)$ ergibt sich nun

$$W(x) = (c-a)^{5/2} \,.\, \frac{2i\pi}{3} \left[\frac{D(w)}{S^2(w)} (2l^2 w - (1+l^2)\, E\,\mathrm{am}\, w) + k^2 \frac{C(w)}{S(w)}\right]$$
$$= -(b-a)^2 (c-b)(c-a) \times T(x)$$

In den 2 Fällen $n = 2$, $(\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2})$ und $n = 2$, $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0)$ gibt die Rechnung für $\frac{W(x)}{T(x)}$ dieselben Werte, die man aus dem Falle $n = 2$, $(0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ durch Vertauschung von a mit b und von a mit c bekommt; also führt auch die Vertauschung von b mit c den zweiten Fall in den dritten über. Diese Wahrnehmung ist aus folgendem Grunde merkwürdig. Bei den zwei in $n = 2$, $(0, 0, 0)$ begriffenen Fällen sieht man, dass $\frac{W(x)}{T(x)}$ durch $Q(a)\, Q(b)\, Q(c)$ teilbar ist; es ist daher zu vermuten, dass im allgemeinen $P^{2\alpha}(a)\, P^{2\beta}(b)\, P^{2\gamma}(c)$ auftreten werde,

wenn $P^{2\alpha}(x) = P(x)$, $\dfrac{\partial P(x)}{\partial t}$ bedeutet, je nachdem $\alpha = 0, \frac{1}{2}$ ist. Setzt man nun

$$P^{2\alpha}(a) \times P^{2\beta}(b) \times P^{2\gamma}(c) = H \times Q(a)\,Q(b)\,Q(c)$$

und verlangt, dass das Argument x sich nur in der Nordhälfte seines Feldes bewege, so findet man

$$\begin{array}{r|l}
(\alpha,\ \beta,\ \gamma) = (0,\ 0,\ 0) & H = 1 \\
= (0,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{2}) & \quad = (c-b)^2(b-a)(c-a) \\
= (\frac{1}{2},\ 0,\ \frac{1}{2}) & \quad = (c-a)^2(b-a)(c-b) \\
= (\frac{1}{2},\ \frac{1}{2},\ 0) & \quad = (b-a)^2(c-a)(c-b) \\
\hline
(\alpha,\ \beta,\ \gamma) = (\frac{1}{2},\ 0,\ 0) & H = -(b-a)(c-a) \\
= (0,\ \frac{1}{2},\ 0) & \quad = -(b-a)(c-b) \\
= (0,\ 0,\ \frac{1}{2}) & \quad = -(c-a)(c-b) \\
= (\frac{1}{2},\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{2}) & \quad = -(c-b)^2(c-a)^2(b-c)^2
\end{array}$$

Man nehme die Fälle $(0, 0, 0)$, $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})$, die ohnehin symmetrisch sind, aus. Wenn man a mit c vertauscht, so gehen die H für $(0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ und $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0)$ in einander über; ebenso die H-werte für $(\frac{1}{2}, 0, 0)$ und $(0, 0, \frac{1}{2})$. Wenn man aber a mit b vertauscht, so gehen die zu $(0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})$, $(\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2})$ gehörenden Werte von H jeder in das entgegengesetzte des andern über; ebenso die zu $(\frac{1}{2}, 0, 0)$, $(0, \frac{1}{2}, 0)$ gehörenden. Dasselbe gilt von der Vertauschung von b mit c.

IV. $n = 3$.

1) $(\alpha, \beta, \gamma) = (\frac{1}{2}, 0, 0)$, $v = 1$.

In diesem Falle ist

$$U(z) = \frac{1}{2}\int\limits_{c} \frac{(z-d)\sqrt{(z-a)}}{\sqrt{(z-b)(z-c)}}\,dz$$

Die Wurzelausziehung wird auch hier ein wenig erleichtert, wenn man $b + c - a = 0$ annimmt. Weil

$$\frac{(z-b)(z-c)}{z-a} = z + \frac{bc}{z-a} = z\left(1 + \frac{0}{z} + \frac{bc}{z^2} + \ldots\right)$$

so ist

$$\frac{\sqrt{z-a}}{\sqrt{(z-b)(z-c)}} = z^{-1/2}\left(1 + \frac{0}{z} - \frac{1}{2}\cdot\frac{bc}{z^2} + \ldots\right),$$

$$U(z) = \tfrac{1}{3} \cdot z^{3/2} - dz^{1/2} + \tfrac{1}{2} \cdot bc \cdot z^{-1/2} + \ldots$$

Die quadratische Gleichung für d, die im allgemeinen

$$5d^2 - (2a + 4b + 4c)\,d + 3bc + a(b + c) = 0$$

ist, wird dann zu

$$5d^2 - 6\,ad + a^2 + 3\,bc = 0$$

Vermöge derselben findet man

$$U^2(z) = \tfrac{1}{9} \cdot z^3 - \tfrac{2}{3}\,dz^2 + \frac{1}{15}(18\,ad - 3a^2 - 4bc)z + \ldots$$

der Coefficient von $\frac{1}{z}$ in $\frac{U^2(z)}{(z-x)^2}$ ist also

$$\tfrac{1}{3} \cdot x^2 - \tfrac{4}{3}\,dx + \frac{1}{15}(18\,ad - 3a^2 - 4bc) = \tfrac{1}{3}(x - 2d)^2$$
$$+ \frac{1}{15}(-6ad + a^2 + 8\,bc)$$

Die Beschränkung wird aufgehoben, indem man jedem der jetzigen a, b, c, d, x noch $-(b + c - a)$ zusetzt, so dass sie in $-(b+c-2a)$, $-(c-a)$, $-(b-a)$, $d-a-(b+c-2a)$, $x-a-(b+c-2a)$ übergehen. Die gefundene Function zweiten Grades ist nun

$$F(x) = \tfrac{1}{3}(x - a - 2(d-a) + b + c - 2a)^2$$
$$+ \frac{1}{15}[6(b + c - 2a)(d - a) - 5(b + c - 2a)^2 + 8(c - a)(b - a)]$$
$$= (c-a)^2 \Bigg[\tfrac{1}{3}\left(\frac{1}{S^2(w)} - \frac{2}{S^2(\varepsilon)} + 1 + k^2\right)^2$$
$$+ \frac{1}{15}\left(6\,\frac{1+k^2}{S^2(\varepsilon)} - 5 - 2k^2 - 5k^4\right)\Bigg]$$

Man schreibe

$$\frac{1}{S^2(w)} - \frac{1}{S^2(\varepsilon)} - \frac{1}{S^2(\varepsilon)} + 1 + k^2 = \frac{S^2(\varepsilon) - S^2(w)}{S^2(w) \cdot S^2(\varepsilon)} - \frac{1}{S^2(\varepsilon)} + 1 + k^2$$

und beachte, dass

$$5\left(-\frac{1}{S^2(\varepsilon)} + 1 + k^2\right)^2 + 6 \cdot \frac{1+k^2}{S^2(\varepsilon)} - 5 - 2k^2 - 5k^4$$
$$= \frac{5}{S^4(\varepsilon)} - 4\,\frac{1+k^2}{S^2(\varepsilon)} + 8k^4 = 5k^2$$

ist, vermöge der Gleichung für $S^2(\varepsilon)$ auf Seite 135, Zeile 4 v. unt. Dann findet man

$$F(x) = \frac{(c-a)^2}{3}\left[\frac{S^2(\varepsilon)-S^2(w)}{S^4(\varepsilon)\,.\,S^2(w)}\left(\frac{S^2(\varepsilon)}{S^2(w)}-3+2(1+k^2)S^2(\varepsilon)\right)+k^2\right]$$

folglich ist

$$(I) = \frac{2\,i\pi}{3}(c-a)^3\left[\frac{C(w)\,.\,D(w)}{S^4(\varepsilon)\,.\,S^4(w)}(S^2(\varepsilon)-S^2(w)\right.$$

$$\left.\times\left(\frac{S^2(\varepsilon)}{S^2(w)}-3+2(1+k^2)S^2(\varepsilon)\right)+k^2\frac{C(w)\,.\,D(w)}{S^2(w)}\right]$$

$$U_1 = \int_a^b \frac{(z-a)\left[(z-a)-(d-a)\right]}{\sqrt{(z-a)(b-z)(c-z)}}\,dz$$

$$= 2(c-a)^{3/2}\int_0^K k^2 S^2(u)\left(k^2 S^2(u)-\frac{1}{S^2(\varepsilon)}\right)du$$

Weil

$$\frac{\partial}{\partial u}(S(u)\,C(u)\,D(u)) = 2\,\frac{S(u)\,C(u)\,D(u)\,.\,d\,.\,S(u)\,C(u)\,D(u)}{2S(w)\,.\,d\,.\,(Su)}$$

$$= \frac{d\,.\,(S^2(u)\,.\,C^2(u)\,.\,D^2(u)}{d\,.\,(S^2(u))} = 1-2(1+k^2)S^2(u)+3k^2S^4(u)$$

so ist

$$3k^2S^2(u)(k^2S^2(u)-\frac{1}{S^2(\varepsilon)}) = k^2\frac{\partial}{\partial u}(S(u)\,C(u)\,D(u))$$

$$+\left(\frac{3}{S^2(\varepsilon)}-2(1+k^2)\right)D^2(u)-\frac{3}{S^2(\varepsilon)}+2+k^2$$

also

$$U_1 = \tfrac{2}{3}(c-a)^{3/2}\left[\left(\frac{3}{S^2(\varepsilon)}-2(1+k^2)\right)\mathrm{E}+\left(-\frac{3}{S^2(\varepsilon)}+2+k^2\right)K\right]$$

$$\int_c^x \frac{(z-a)(z-d)}{\sqrt{(z-a)(z-b)(z-c)}}\,dz$$

$$= 2(c-a)^{3/2}\int_w^K \frac{1}{S^2(u)}\left(\frac{1}{S^2(u)}-\frac{1}{S^2(\varepsilon)}\right)du$$

Weil

$$\frac{3}{S^2(u)}\left(\frac{1}{S^2(u)}-\frac{1}{S^2(\varepsilon)}\right)=-\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{C(u)\,.\,D(u)}{S^3(u)}\right)$$
$$+\left[2(1+k^2)-\frac{3}{S^2(\varepsilon)}\right]\frac{1}{S^2(u)}-k^2;$$
$$\frac{1}{S^2(u)}=1-D^2(u)-\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{C(u)\,.\,D(u)}{S(u)}\right)$$

so ist

$$\int_c^x\frac{(z-a)(z-d)}{\sqrt{(z-a)(z-b)(z-c)}}\,dz$$
$$=\tfrac{2}{3}(c-a)^{3/2}\left[p\,\mathrm{E}+(p+k^2)(w-K)-p\left(E\,\mathrm{am}\,w+\frac{C(w)\,.\,D(w)}{S(w)}\right)\right.$$
$$\left.+\frac{C(w)\,.\,D(w)}{S^3(w)}\right]$$

wenn

$$p=\frac{3}{S^2(\varepsilon)}-2(1+k^2)$$

gesetzt wird; folglich ist

$$U(x_2)-U(x_1)=\tfrac{2}{3}(c-a)^{3/2}\left[\left(\frac{3}{S^2(\varepsilon)}-2(1+k^2)\right)\left(E\,\mathrm{am}\,w+\frac{C(w)\,.\,D(w)}{S(w)}\right)\right.$$
$$\left.+\left(2+k^2-\frac{3}{S^2(\varepsilon)}\right)w-\frac{C(w)\,.\,D(w)}{S^3(w)}\right]$$

und also

$$(II)+(III)=(c-a)^{3/2}\,\frac{i\pi}{S^2(\varepsilon)\,.\,S^3(w)}\,(S^2(\varepsilon)-S^2(w))\,[U(x_2)-U(x_1)]$$

Der algebraische Teil von $\frac{W(x)}{(c-a)^3}\cdot\frac{3}{2i\pi}$ ist $k^2\frac{C(w)\,.\,D(w)}{S^3(w)}$. Also ist

$$W(x)=\frac{2i\pi}{3}(c-a)^3\left[\frac{S^2(\varepsilon)-S^2(w)}{S^4(\varepsilon)\,.\,S^3(w)}((3-2(1+k^2)S^2(\varepsilon))\,E\,\mathrm{am}\,w\right.$$
$$\left.+((2+k^2)S^2(\varepsilon)-3)w)+k^2\frac{C(w)\,.\,D(w)}{S^2(w)}\right]$$

Weil

$$P(x)=(x-d)\sqrt{x-a}$$

so ist

$$P'(a)\,P(b)\,P(c)=-(b-a)(c-a)(a-d)(b-d)(c-d)$$
$$=(c-a)^5k^2\frac{C^2(\varepsilon)\,.\,D^2(\varepsilon)}{S^6(\varepsilon)}$$

so ist nach Seite 137

$$W(x)=\frac{4i\pi}{3\,.\,7}P'(a)\,P(b)\,P(c)\,.\,T(x)$$

2) $(\alpha, \beta, \gamma) = (0, \frac{1}{2}, 0), v = 1$

In diesem Falle ist

$$P(x) = (c-a)^{3/2} \frac{D(w)}{S^2(\varepsilon) \cdot S^3(w)} (S^2(\varepsilon) - S^2(w);$$

$$U = \frac{1}{2} \int\limits_c \frac{(z-d)\sqrt{(z-b)}}{\sqrt{(z-a)(z-c)}} dz$$

nimmt man an, es sei

$$a + c - b = 0$$

so ist

$$\frac{(z-a)(z-c)}{z-b} = z + \frac{ac}{z-a} = z\left(1 + \frac{0}{z} + \frac{ac}{z^3} + \dots\right)$$

also

$$\sqrt{\frac{z-b}{(z-a)(z-c)}} = z^{-1/2}\left(1 + \frac{0}{z} - \frac{1}{2} \cdot \frac{ac}{x^2} + \dots\right)$$

somit

$$U(z) = \frac{1}{3} z^{3/2} - dz^{1/2} + \frac{1}{2} ac \cdot z^{-1/2} + \dots,$$

die qnadratische Gleichnng für d ist in diesem besonderen Falle

$$5d^2 - 6bd + b^2 + 3ac = 0$$

Mittelst derselben findet man nnn

$$U^2(z) = \frac{1}{9} z^3 - \frac{2}{3} dz^2 + \frac{1}{15}(18bd - 3b^2 - 4ac)z + \dots$$

der Coefficient von $\frac{1}{z}$ in der Entwicklnng von $\frac{U^2(z)}{(z-x)^2}$ ist

$$\frac{1}{3} x^2 - \frac{4}{3} dx + \frac{1}{15}(18bd - 3b^2 - 4ac)$$

Wird nnn die Beschränknng wieder aufgehoben, indem man jedem der jetzigen a, b, c, d, x noch $-(a+c-b)$ zusetzt, so erhält man für dic Function zweiten Grades den Ausdruck:

$$\begin{aligned} F(x) &= \tfrac{1}{3}(x - b - 2(d-b) + a + c - 2b)^2 \\ &+ \frac{1}{15}[6(a+c-2b)(d-b) - 5(a+c-2b)^2 + 8(c-b)(a-b)] \\ &= (c-a)^2\left[\tfrac{1}{3}\left(\frac{D^2(w)}{S^2(w)} - \frac{2}{S^2(\varepsilon)} + 1\right)^2\right. \\ &+ \left.\frac{1}{15}\left(6(1-2k^2) \cdot \frac{D^2(\varepsilon)}{S^2(\varepsilon)} - 5 + 12k^2 - 12k^4\right)\right] \end{aligned}$$

Man schreibe

$$\frac{D^2(w)}{S^2(w)}-\frac{2}{S^2(\varepsilon)}+1=\frac{S^2(\varepsilon)-S^2(w)}{S^2(\varepsilon)\,.\,S^2(w)}-\frac{1}{S^2(\varepsilon)}+1-k^2$$

und beachte, dass vermöge der Gleichnng

$$5-2(2+k^2)\,S^2(\varepsilon)+k^2\,S^4(\varepsilon)=0$$

anch

$$5\left(-\frac{1}{S^2(\varepsilon)}+1-k^2\right)^2+6(1-2k^2)\,\frac{D^2(\varepsilon)}{S^2(\varepsilon)}-5+12k^2-12k^2=-5k^2l^2$$

ist, also

$$F(x)=\frac{(c-a)^2}{3}\left[\frac{S^2(\varepsilon)-S^2(w)}{S^4(\varepsilon)\,.\,S^2(w)}\left(\frac{S^2(\varepsilon)}{S^2(w)}-3+2(1-k^2)\,S^2(\varepsilon)\right)-l^2\,k^2\right]$$

und somit

$$(I)=\frac{2\,i\pi}{3}\,(c-a)^3\left[\frac{C(w)}{S^4(\varepsilon)\,.\,S^4(w)}\,(S^2(\varepsilon)-S^2(w)\right.$$
$$\left.\times\left(\frac{S^2(\varepsilon)}{S^2(w)}-3+2(1-k^2)S^2(\varepsilon)\right)-\frac{l^2\,k^2\,C(w)}{S^2(w)}\right]$$

$$U_1=\int_a^b\frac{(z-b)\,[(z-b)-(d-b)]}{\sqrt{(z-a)\,(b-z)\,(c-z)}}\,dz$$
$$=2(c-a)^{3/2}\,.\int_0^K k^2\,C^2(u)\left(k^2\,C^2(u)+\frac{D^2(\varepsilon)}{S^2(\varepsilon)}\right)du$$

Weil

$$\frac{\partial}{\partial u}\,(S(u)\,C(u)\,D(u))=-1+k^2+2(1-2k^2)\,C^2(u)+3k^2\,C^4(u)$$

und wenn

$$p=\frac{3}{S^2(\varepsilon)}-2+k^2$$

gesetzt wird, so ist

$$3k^2\,C^2(u)\left(k^2\,C^2(u)+\frac{D^2(\varepsilon)}{S^2(\varepsilon)}\right)=\frac{\partial}{\partial u}\,(S(u)\,C(u)\,D(u))+pk^2\,C^2(u)+l^2\,k^2$$

nnd also

$$U_1=(c-a)^{3/2}\,.\,\tfrac{2}{3}\,[pE+l^2\,(l^2-p)K]$$

$$\int_c^x \frac{(z-d)(c-b)}{\sqrt{(z-a)(z-b)(z-c)}}\,dz$$

$$= 2(c-a)^{3/2} \int_w^K \frac{D^2(u)}{S^2(u)}\left(\frac{D^2(u)}{S^2(u)} - \frac{D^2(\varepsilon)}{S^2(\varepsilon)}\right) du$$

$$= 2(c-a)^{3/2} \int_{L+w}^{L+K} k^2 C^2(u)\left(k^2 C^2(u) + \frac{D^2(\varepsilon)}{S^2(\varepsilon)}\right) du$$

also nach Obigem

$$\int_c^x \frac{(z-d)(z-b)}{\sqrt{(z-a)(z-b)(z-c)}}\,dz = (c-a)^{3/2} \cdot \tfrac{2}{3}\Big[l^2(k^2-p)(K-w)$$

$$+ p(E\,\mathrm{am}(K+L) - E\,\mathrm{am}(L+w)) + \frac{C(w) \cdot D(w)}{S^2(w)}\Big]$$

Weil nun aber

$$E\,\mathrm{am}(K+L) - E\,\mathrm{am}(L+w) = \mathrm{E} - E\,\mathrm{am}\,w - \frac{C(w) \cdot (D(w)}{S(w)}$$

so ist auch

$$\int_c^x \frac{(z-d)(z-b)}{\sqrt{(z-a)(z-b)(z-c)}}\,dz = (c-a)^{3/2} \cdot \tfrac{2}{3}\Big[l^2(k^2-p)(K-w)$$

$$+ p\left(\mathrm{E} - E\,\mathrm{am}\,w - \frac{C(w) \cdot D(w)}{S(w)}\right) + \frac{C(w) \cdot D(w)}{S^3(w)}\Big],$$

somit

$$U(x_1) - U(x_2) = (c-a)^{3/2} \cdot \tfrac{2}{3}\Big[l^2(p-k^2)w$$

$$- p\left(E\,\mathrm{am}(w) + \frac{C(w) \cdot D(w)}{S(w)}\right) + \frac{C(w) \cdot D(w)}{S^3(w)}\Big]$$

Wird dieser Ausdruck noch mit

$$- i\pi(c-a)^{3/2} \cdot \frac{D(w)}{S^2(\varepsilon) \cdot S^3(w)} \cdot (S^2(\varepsilon) - S^2(w)$$

multiplicirt, so erhält man

$$(II) + (III) = \frac{2i\pi}{3}(c-a)^3 \frac{D(w)}{S^2(\varepsilon) \cdot S^3(w)}(S^2(\varepsilon) - S^2(w))$$

$$\times\left[l^2(k^2-p)w + p\left(E\,\mathrm{am}\,w + \frac{C(w) \cdot D(w)}{S(w)}\right) - \frac{C(w) \cdot D(w)}{S^3(w)}\right]$$

Man erhält schliesslich

$$W(x) = +\frac{2i\pi}{3}(c-a)^2 \frac{D(w)}{S^4(\varepsilon) \cdot S^3(w)}(S^2(\varepsilon)-S^2(w))$$

$$\times \left[l^2 k^2 S^2(\varepsilon) \cdot w + p\, S^2(\varepsilon)\left(l^2 w - E\operatorname{am} w + k^2 \frac{S(w) \cdot C(w)}{D(w)}\right)\right.$$

$$\left. - \frac{k^2 l^2 S^4(\varepsilon)}{S^2(\varepsilon)-S^2(w)} \cdot \frac{S(w) \cdot C(w)}{D(w)}\right]$$

Es sei

$$I = S^2(\varepsilon) \cdot \frac{C(w) \cdot D(w)}{S^3(w)};$$

$$II = (-3+(2-k^2)S^2(\varepsilon)) \cdot \frac{C(w) \cdot D(w)}{S(w)};$$

$$III = -S^2(\varepsilon) \cdot \frac{C(w)}{S^3(w) \cdot D(w)};$$

$$IV = (3-2(1-k^2)S^2(\varepsilon)) \cdot \frac{C(w)}{S(w) \cdot D(w)};$$

$$V = k^2 l^2 S^4(\varepsilon) \cdot \frac{C(w) \cdot S(w)}{D(w)} \cdot \frac{1}{S^2(\varepsilon) \cdot S^2(w)}.$$

Nach der bekannten Relation

$$5-2(2+k^2)S^2(\varepsilon)+k^2 S^4(\varepsilon) = 0$$

ist auch

$$D^2(\varepsilon)(-3+(2-k^2)S^2(\varepsilon) = -3+2(1+k^2)S^2(\varepsilon)-k^2(2-k^2)S^4(\varepsilon)$$

$$= 7-5k^2+2(-3+k^2+k^4)S^2(\varepsilon)$$

Setzt man ferner

$$VI = k^2 l^2 \cdot \frac{S^4(\varepsilon)}{D^2(\varepsilon)} \cdot \frac{S(w) \cdot C(w) \cdot D(w)}{S^2(\varepsilon)-S^2(w)},$$

$$VII = k^2(-3+(2-k^2)S^2(\varepsilon)) \cdot \frac{S(w) \cdot C(w)}{D(w)},$$

$$VIII = -2k^2 \frac{C^2(\varepsilon)}{D^2(\varepsilon)} \cdot \frac{S(w) \cdot C(w)}{D(w)}$$

so ist

$$V = k^2 l^2 \cdot \frac{S^4(\varepsilon)}{D^2(\varepsilon)} \cdot \frac{S(w) \cdot C(w)}{D(w)} \cdot \frac{D^2(w)-(D^2(w)-D^2(\varepsilon))}{S^2(\varepsilon)-S^2(w)}$$

$$= k^2 l^2 \cdot \frac{S^4(\varepsilon)}{D^2(\varepsilon)} \cdot \frac{S(w) \cdot C(w) \cdot D(w)}{S^2(\varepsilon)-S^2(w)} - k^4 l^2 \cdot \frac{S^4(\varepsilon)}{D^2(\varepsilon)} \cdot \frac{S(w) \cdot C(w)}{D(w)}$$

und weil nun nach der Formel

$$5-2(2+k^2)S^2(\varepsilon)+k^2S^4(\varepsilon)=0$$

auch

$$-k^2l^2\frac{S^4(\varepsilon)}{D^2(\varepsilon)}=-3+(2-k^2)S^2(\varepsilon)-2\frac{C^2(\varepsilon)}{D^2(\varepsilon)}$$

ist, so hat man

$$V=VI+VII+VIII$$

Ferner ist

$$I+III=-k^2S^2(\varepsilon)\cdot\frac{C(w)}{S(w)\,.\,D(w)}$$

und ebenso

$$II+VII=(-3+(2-k^2)S^2(\varepsilon))\cdot\frac{C(w)}{S(w)\,.\,D(w)}$$

also

$$I+III+II+VII+IV=0$$

der algebraische Teil ist somit

$$VI+VIII=k^2l^2\cdot\frac{S^4(\varepsilon)}{D^2(\varepsilon)}\cdot\frac{S(w)\,.\,C(w)\,.\,D(w)}{S^2(\varepsilon)-S^2(w)}$$
$$-2k^2\frac{C(\varepsilon)}{D^2(\varepsilon)}\cdot\frac{S(w)\,.\,C(w)}{D(w)}.$$

Also ist

$$W(x)=-\frac{2i\pi}{3}(c-a)^3\frac{D(w)}{D^2(\varepsilon)\,.\,S^4(\varepsilon)\,.\,S^3(w)}(S^2(\varepsilon)-S^2(w))$$
$$\times\Big[k^2l^2S^4(\varepsilon)\,.\,\frac{S(w)\,.\,C(w)\,.\,D(w)}{S^2(\varepsilon)-S^2(w)}+l^2D^2(\varepsilon)(3-2S^2(\varepsilon))w$$
$$+(7-5k^2+2(-3+k^2+k^4)S^2(\varepsilon))E\,\mathrm{am}\,w-2k^2C^2(\varepsilon)\,.\,\frac{S(w)\,.\,C(w)}{D(w)}\Big]$$

Wenn man nun beachtet, dass

$$P(a)P'(b)P(c)=-(c-a)^5k^2l^2\,.\,\frac{C^2(\varepsilon)\,.\,D^2(\varepsilon)}{S^6(\varepsilon)}$$

angenommen werden kann, so ergibt eine Vergleichung mit der entsprechenden Formel für $T(x)$ auf Seite 139 dio Relation

$$W(x)=\frac{4i\pi}{3\,.\,7}\times P(a)P'(b)P(c)\times T(x)$$

3) $(\alpha,\beta,\gamma)=(0,0,\tfrac{1}{2}),\ v=1.$

$$U(z)=\tfrac{1}{2}\int\limits_c\frac{(z-d)\sqrt{z-c}}{\sqrt{(z-a)(z-b)}}dz$$

wenn hier

$$a+b-c=0$$

angenommen wird, so ist

$$\frac{(z-a)(z-b)}{z-c} = z + \frac{ab}{z-c} = z\left(1 + \frac{0}{z} + \frac{ab}{z^2} + \dots\right)$$

also

$$\frac{\sqrt{(z-c)}}{\sqrt{(z-a)(z-b)}} = z^{-1/2}\left(1 + \frac{0}{z} - \tfrac{1}{2}\frac{ab}{z^2} + \dots\right);$$

$$U(z) = \tfrac{1}{3}z^{3/2} - dz^{1/2} + \tfrac{1}{2}ab\,z^{-1/2} + \dots$$

und weil

$$5d^2 - 6\,cd + c^2 + 3\,ab = 0$$

so ist

$$U^2(z) = \tfrac{1}{9}z^3 - \tfrac{2}{3}dz^2 + \frac{1}{15}(18\,cd - 3c^2 - 4\,ab)z + \dots$$

Der Coefficient von $\frac{1}{z}$ in der Entwicklung von $\frac{U^2(z)}{(z-x)^2}$ ist

$$\tfrac{1}{3}x^2 - \tfrac{4}{3}dx + \frac{1}{15}(18\,cd - 3c^2 - 4\,ab) = \tfrac{1}{3}(x-2d)^2$$
$$+ \frac{1}{15}(-6\,cd + c^2 + 8\,ab)$$

Wird die Beschränkung wieder aufgehoben und die Function zweiten Grades von x wieder mit $F(x)$ bezeichnet, so hat man

$$F(x) = \tfrac{1}{3}[x - c - (d-a) - (d-b)]^2$$
$$+ \frac{1}{15}[-6((c-b)+(c-a))(d-c) - 5((c-a)+(c-b))^2 + 8(c-b)(c-a)]$$
$$= \tfrac{1}{3}\left[\frac{S^2(\varepsilon) - S^2(w)}{S^2(\varepsilon)\,.\,S^2(w)} - \frac{1}{S^2(\varepsilon)} - l^2\right]^2 (c-a)^2$$
$$+ \frac{1}{15}\left[-6(1+l^2)\frac{1}{S^2(\varepsilon)} + 1 + 4l^2 - 5l^4\right]$$

Weil nun nach der Formel

$$5 - 2(1+2k^2)S^2(\varepsilon) + k^2 S^4(\zeta) = 0$$

auch

$$5\left(\frac{1}{S^2(\varepsilon)} + l^2\right)^2 - 6(1+l^2)\,.\,\frac{1}{S^2(\varepsilon)} + 1 + 4l^2 - 5l^4$$
$$= \frac{1}{S^4(\varepsilon)}(5 - 2(1+2k^2)S^2(\varepsilon) + (1+4l^2)S^4(\varepsilon)) = 5l^2,$$

$$F(x) = (c-a)^2\,\tfrac{1}{3}\left[\frac{S^2(\varepsilon) - S^2(w)}{S^4(\varepsilon)\,.\,S^2(w)}\left(\frac{S^2(\varepsilon)}{S^2(w)} - 3 - 2l^2 S^2(\varepsilon)\right) + l^2\right]$$

und also ist

$$(I) = (c-a)^3 \cdot \frac{2i\pi}{3}\left[\frac{S^2(\varepsilon)-S^2(w)}{S^4(\varepsilon)\cdot S^4(w)} \cdot D(w)\left(\frac{S^2(\varepsilon)}{S^2(w)}-3-2l^2 S^2(\varepsilon)\right) + \frac{l^2 D(w)}{S^2(w)}\right]$$

Ferner ist

$$U_1 = \int_a^b \frac{(z-d)(z-c)\cdot dz}{\sqrt{(z-a)(b-z)(c-z)}}$$

$$= 2(c-a)^{3/2} \int_0^K D^2(u)\cdot\left(D^2(u)+\frac{C^2(\varepsilon)}{S^2(\varepsilon)}\right) du$$

weil aber

$$k^2 \frac{\partial}{\partial u}(S(u)\cdot C(u)\cdot D(u)) = l^2 - 2(1+l^2)D^2(u) + 3D^4(u)$$

so ist auch

$$D^2(u)\left(D^2(u)+\frac{C^2(\varepsilon)}{S^2(\varepsilon)}\right) = \frac{1}{3}\left[k^2 \frac{\partial}{\partial u}(S(u)\cdot C(u)\cdot D(u)) - l^2 + 2(1+l^2)D^2(u)\right] + \frac{C^2(\varepsilon)}{S^2(\varepsilon)} D(u)$$

und somit

$$U_1 = \tfrac{2}{3}(c-a)^{3/2}\left[-l^2 K + \left(2(1+l^2)+3\frac{C^2(\varepsilon)}{S^2(\varepsilon)}\right)E\right]$$

Auch hat man

$$\int_c^x \frac{(z-d)\sqrt{(z-c)}}{\sqrt{(z-a)(z-b)}}dz = 2(c-a)^{3/2}\int_w^K \frac{C^2(u)}{S^2(u)}\left(\frac{C^2(u)}{S^2(u)}-\frac{C^2(\varepsilon)}{S^2(\varepsilon)}\right)du$$

$$-2(c-a)^{3/2}\int_{L+w}^{L+K} D^2(u)\left(D^2(u)+\frac{C^2(\varepsilon)}{S^2(\varepsilon)}\right)du\,.$$

setzt man abkürzend

$$q = 2(1+l^2)+3\frac{C^2(\varepsilon)}{S^2(\varepsilon)}$$

so ist demnach

$$\int_c^x \frac{(z-d)\sqrt{(z-c)}}{\sqrt{(z-a)(z-b)}}\,dz = (c-a)^{3/2} \cdot \tfrac{2}{3}\Big[-l^2(K-w)$$

$$+q\left(\mathrm{E} - E\,\mathrm{am}\,w - \frac{C(w)\,.\,D(w)}{S(w)}\right) + \frac{C(w)\,.\,D(w)}{S^3(w)}\Big]$$

folglich

$$U(x_1) - U(x_2) = (c-a)^{3/2} \,.\, \tfrac{2}{3}\Big[l^2 w - q\left(E\,\mathrm{am}\,w + \frac{C(w)\,.\,D(w)}{S(w)}\right)$$

$$+ \frac{C(w)\,.\,(D(w)}{S^3(w)}\Big]$$

und demnach

$$(II)+(III) = \frac{2i\pi}{3}(c-a)^3 \frac{C(w)}{S^2(\varepsilon)\,.\,S^3(w)}(S^2(\varepsilon)-S^2(w))\Big[-l^2 w$$

$$+q\left(E\,\mathrm{am}\,w + \frac{C(w)\,.\,D(w)}{S(w)}\right) - \frac{C(w)\,.\,D(w)}{S^3(w)}\Big]$$

Es ist somit

$$W(x) = \frac{2i\pi}{3}\,.\,(c-a)^3 \frac{C(w)}{S^4(\varepsilon)\,.\,S^3(w)} \times$$

$$.\,(S^2(\varepsilon) - S^2(w)\Big[-l^2 S^2(\varepsilon)\,w + q\,S^2(\varepsilon)\left(E\,\mathrm{am}\,w - \frac{S(w)\,.\,D(w)}{C(w)}\right)$$

$$+ \frac{l^2 S^4(\varepsilon)}{S^2(\varepsilon) - S^2(w)}\,.\,\frac{S(w)\,.\,D(w)}{C(w)}\Big]$$

Weil aher nach der Relation

$$1 + \frac{3}{C^2(\varepsilon)} + \frac{1}{D^2(\varepsilon)} = 0$$

auch

$$(4 - S^2(\varepsilon))\,D^2(\varepsilon) = -\,C^2(\varepsilon)$$

so ist auch

$$-l^2 S^2(\varepsilon)\,C^2(\varepsilon) = l^2 D^2(\varepsilon)\,(4 - S^2(\varepsilon))\,.\,S^2(\varepsilon)$$

Auf gleiche Weise findet man, dass

$$k^2 C^2(\varepsilon)\,(2(1+l^2)\,S^2(\varepsilon) + 3\,C^2(\varepsilon)) = 5 - 7k^2 - 2(1+k^2-3k^4) \times S^2(\varepsilon)$$

Es sei ferner

$$I = -\,S^2(\varepsilon)\,.\,\frac{C(w(\,.\,D(w)}{S^3(w)};$$

$$II = (3+(1-2k^2)\,S^2(\varepsilon))\,.\,\frac{C(w)\,.\,D(w)}{S(w)};$$

$$III = S^2(\varepsilon)\,.\,\frac{D(w)}{S^3(w(\,.\,C(w)};$$

$$IV = -(3+2(1-k^2)S^2(\varepsilon))\,.\,\frac{D(w)}{S(w)\,.\,C(w)};$$

$$V = l^2\,.\,\frac{S^4(\varepsilon)}{S^2(\varepsilon)-S^2(w)} \times \frac{S(w)\,.\,D(w)}{C(w)}$$

Wird nun

$$VI = \frac{l^2 S^4(\varepsilon)}{C^2(\varepsilon)} \times \frac{S(w)\,.\,C(w)\,.\,D(w)}{S^2(\varepsilon)-S^2(w)};$$

$$VII = (3+(1-2k^2)S^2(\varepsilon)) \times \frac{S(w)\,.\,D(w)}{C(w)};$$

$$VIII = 2\,\frac{D^2(\varepsilon)}{C^2(\varepsilon)} \times \frac{S(w)\,.\,D(w)}{C(w)}$$

gesetzt, so findet man

$$V = l^2\,\frac{S^4(\varepsilon)}{C^2(\varepsilon)} \times \frac{S(w)\,.\,D(w)}{C(w)}\,.\,\frac{C^2(w) - (C^2(w)-C^2(\varepsilon))}{S^2(\varepsilon)-S^2(w)}$$

$$= l^2\,\frac{S^4(\varepsilon)}{C^2(\varepsilon)}\,.\,\frac{S(w)\,.\,C(w)\,.\,D(w)}{S^2(\varepsilon)-S^2(w)} - l^2\,\frac{S^4(\varepsilon)}{C^2(\varepsilon)}\,.\,\frac{S(w)\,.\,D(w)}{C(w)}$$

und weil

$$-l^2\,\frac{S^4(\varepsilon)}{C^2(\varepsilon)} = 3+(1-2k^2)\,S^2(\varepsilon)+2\,\frac{D^2(\varepsilon)}{C^2(\varepsilon)}$$

ist, so folgt

$$V = VI + VII + VIII$$

Beachte man, dass auch

$$I + III = +\,S^2(\varepsilon)\,.\,\frac{D(w)}{S(w)\,.\,C(w)},$$

$$II + VII = (3+(1-2k^2)\,S^2(\varepsilon)\,.\,\frac{D(w)}{S(w)\,.\,C(w)}$$

also

$$I + III + II + VII + IV = 0$$

Der algebraische Teil im Ausdrucke für $W(x)$ ist somit

$$VI + VIII = l^2\,\frac{S^4(\varepsilon)}{C^2(\varepsilon)}\,.\,\frac{S(w)\,.\,C(w)\,.\,D(w)}{S^2(\varepsilon)-S^2(w)} + 2\,\frac{D^2(\varepsilon)}{C^2(\varepsilon)} \times \frac{S(w)\,.\,D(w)}{C(w)}$$

Durch Einsetzen dieser Werte in $W(x)$ erhält man schliesslich

$$W(x) = (c-a)^3 \frac{2i\pi}{3} \times \frac{C(w)}{k^2 S^4(\varepsilon) \, . \, C^2(\varepsilon) \, . \, S^3(w)} (S^2(\varepsilon) - S^2(\varepsilon))$$
$$\times \Big[k^2 l^2 S^4(\varepsilon) \times \frac{S(w) \, . \, C(w) \, . \, D(w)}{S^2(\varepsilon) - S^2(w)} + 2k^2 D^2(\varepsilon) \times \frac{S(w) \, . \, D(w)}{C(w)}$$
$$+ k^2 l^2 D^2(\varepsilon)(4 - S^2(\varepsilon)) S^2(\varepsilon) w$$
$$+ (5 - 7k^2 - 2(1 + k^2 - 3k^4) S^2(\varepsilon)) E \operatorname{am} w \Big]$$

Weil ferner

$$P(a) P(b) P'(c) = (c-a)^5 l^2 \frac{C^2(\varepsilon) \, . \, D^2(\varepsilon)}{S^6(\varepsilon)}$$

so erhält man nach Seite 142, zweite Zeile, zwischen $W(x)$ und $T(x)$ die Relation

$$W(x) = \frac{4i\pi}{3 \, . \, 7} \times P(a) P(b) P'(c) \times T(x)$$

4) $(\alpha, \beta, \gamma) = (\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2})$, $v = 0$.

Da

$$f(z) = 2 \frac{\partial U(z)}{\partial z}$$

von der Ordnung $z^{5/2}$ ist, so steigt $U(z)$ auf $z^{5/2}$, $U^2(z)$ also auf z^5, $\frac{U^2(z)}{(z-x)^2}$ auf z^3, von da bis auf $\frac{1}{z}$ herab sind 4 Stufen; man muss also

$$f(z) = \sqrt{(z-a)(z-b)(z-c)}$$

bis zur relativ vierten Ordnung entwickeln und setze, um die Ausziehung der Quadratwurzel zu erleichtern,

$$a + b + c = 0, \quad \text{dann} \quad \beta = bc + ca + ab = bc - a^2, \quad \gamma = abc.$$

Nun ist

$$(z-a)(z-b)(z-c) = z^3 \left(1 + \frac{\beta}{z^2} - \frac{\gamma}{z^3}\right),$$

$$f(z) = z^{3/2} \left(1 + \tfrac{1}{2} \frac{\beta z - \gamma}{z^3} - \tfrac{1}{8} \left(\frac{\beta z - \gamma}{z^3}\right)^2 + \ldots \right)$$

$$\tfrac{1}{2} f(z) = \tfrac{1}{2} z^{3/2} + 0 \, . \, z^{1/2} + \tfrac{1}{4} \beta z^{-1/2} - \tfrac{1}{4} \gamma z^{-3/2} - \frac{1}{16} \beta^2 z^{-5/2} + \ldots ;$$

$$U(z) = \tfrac{1}{5} z^{5/2} + 0 \, . \, z^{3/2} + \tfrac{1}{2} \beta z^{1/2} + \tfrac{1}{2} \gamma z^{-1/2} + \frac{1}{24} \beta^2 z^{-3/2} + \ldots ,$$

$$U^2(z) = \frac{1}{25} z^5 + 0 \,.\, z^4 + \tfrac{1}{3}\beta z^3 + \tfrac{1}{3}\gamma z^2 + \frac{4}{15}\beta^2 z + \ldots$$

Wird dieses noch mit

$$\frac{1}{(z-x)^2} = \frac{1}{z^2} + 2 \,.\, \frac{x}{z^3} + 3 \,.\, \frac{x^2}{z^4} + 4 \,.\, \frac{x^3}{z^5} + 5 \,.\, \frac{x^4}{z^6} + \ldots$$

multiplicirt, so wird der Coeff. von $\frac{1}{z}$ in der Entwicklung von $\frac{U^2(z)}{(z-x)^2}$ gleich

$$F(x) = \frac{1}{15}(3x^4 + 9\beta x^2 + 6\gamma x + 4\beta^2) = \frac{1}{15}[3(x-a)^4 + 12a(x-a)^3$$
$$+ 9(2a^2+\beta)(x-a)^2 + 6(2a^3 + 3\beta a + \gamma)(x-a) + 3a^4 + 9\beta a^2$$
$$+ 6\gamma a + 4\beta^2]$$

Hier ist

$$2a^2 + \beta = a^2 + bc, \quad 2a^3 + 3\beta a + \gamma = -a^3 + 4abc = -a(c-b)^2;$$
$$3a^4 + 9\beta a^2 + 6\gamma a + 4\beta^2 = -2a^4 + 7a^2bc + 4b^2c^2$$
$$= -(a^2 - 4bc)(2a^2 + bc)$$

wo

$$a^2 - 4bc = (b+c)^2 - 4bc = (c-b)^2$$

und

$$2a^2 + bc = a^2 - a(b+c) + bc = (b-a)(c-a)$$

also ist

$$3a^4 + 9\beta a^2 + 6\gamma a + 4\beta^2 = -(c-b)^2(b-a)(c-a)$$

Nun ist

$$15F(x) = 3(x-a)^4 + 12a(x-a)^3 + 9(a^2+bc)(x-a)^2$$
$$- 6a(c-b)^2(x-a) - (c-b)^2(b-a)(c-a)$$

Um die Beschränkung, die durch die Bedingung

$$\bar{a} + \bar{b} + \bar{c} = 0$$

gesetzt ward, wieder aufzuheben, setze man

$$\bar{x} = x - m, \quad \bar{a} = a - m, \quad \bar{b} = b - m, \quad \bar{c} = c - m$$

die Bedingung wird

$$a + b + c - 3m = 0$$

also ist

$$m = \tfrac{1}{3}(a+b+c); \quad 3\bar{a} = -(b+c-2a), \quad \text{etc.}$$

Unterschiede wie $\bar{x}-\bar{a}$, $\bar{b}-\bar{c}$ ändern sich nicht. Setzt man für einen Augenblick

$$f = b - a, \quad g = c - a, \quad \text{also} \quad c - b = g - f$$

so ist

$$3\bar{a} = f + g, \quad 3\bar{b} = 2f - g, \quad 3\bar{c} = -f + 2g$$

folglich

$$g(\bar{a}^2 + \bar{b}\,\bar{c}) = (f+g)^2 + (2f-g)(-f+2g) = -f^2 + 7fg - g^2$$

und endlich

$$F(x) = \frac{1}{15}\,[3(x-a)^4 - 4(c-a+b-a)(x-a)^3 - [(c-a)^2$$
$$-7(c-a)(b-a)+(b-a)^2](x-a)^2 + 2(c-a+b-a)(c-b)^2(x-a)$$
$$-(c-b)^2(c-a)(b-a)]$$

oder also

$$(I) = \frac{2i\pi}{15}(c-a)^4\left[\frac{3}{S^8(w)} - 4\cdot\frac{1+k^2}{S^6(w)} - \frac{1-7k^2+k^4}{S^4(w)}\right.$$
$$\left. + 2\,\frac{l^4(1+k^2)}{S^2(w)} - k^2 l^4\right]$$

Ferner ist

$$U_1 = (c-a)^{5/2}\,.\,2\int_0^K k^4 S^2(u)\,.\,C^2(u)\,.\,D^2(u)\,.\,du$$

Weil nun

$$15\,k^4 S^2(u)\,.\,C^2(u)\,.\,D^2(u) = \frac{\partial}{\partial u}(3\,k^4 S^3(u)\,.\,C(u)\,.\,D(u)$$
$$-k^2(1+k^2)\,S(u)\,C(u)\,D(u)) - l^2(1+l^2) + 2(1-k^2+k^4)\,D^2(u)$$

so ist

$$U_1 = (c-a)^{5/2}\,.\,\frac{2}{15}\,(2(1-k^2+k^4)\,\mathrm{E} - l^2(1+l^2)\,K)$$

$$\int_c^x \sqrt{(z-a)(z-b)(z-c)} = (c-a)^{5/2}\,.\,2\int_w^K \frac{C^2(u)\,.\,D^2(u)}{S^6(u)}\,du$$

Es ist aber

$$15\,\frac{C^2(u)\,.\,D^2(u)}{S^6(u)} = \frac{\partial}{\partial u}\left((1+k^2)\,\frac{C(u)\,.\,D(u)}{S^3(u)} - 3\,\frac{C(u)\,.\,D(u)}{S^5(u)}\right)$$
$$-2(1-k^2+k^4)\,\frac{C^2(u)}{S^2(u)} - l^2(1+l^2)$$

also

$$(II)+(III)=(c-a)^4\frac{2i\pi}{15}\frac{C(w)D(w)}{S^3(w)}\Big[2(1-k^2+k^4)E\,\mathrm{am}\,w-l^2(1+l^2)\,w$$
$$-3\,\frac{C(w)\,D(w)}{S^5(w)}+(1+k^2)\,\frac{C(w)\,D(w)}{S^3(w)}+2(1-k^2+k^4)\,\frac{C(w)\,D(w)}{S(w)}\Big]$$

endlich ist

$$W(x)=(c-a)^4\,.\,\frac{2\,i\pi}{15}\Big[\frac{C(w)\,.\,D(w)}{S^3(w)}(2(1-k^2+k^4)\,E\,\mathrm{am}\,w$$
$$-l^2(1+l^2)\,w)-\frac{k^2(1+k^2)}{S^2(w)}+k^2(1+k^4)\Big]$$

Die Vergleichung mit dem Werte von $T(x)$ auf Seite 142 gibt die Relation

$$W(x)=-(c-a)^6\,k^4\,l^4\,.\,\frac{2\,i\pi}{3\,.\,5\,.\,7}\times T(x)$$
$$=-(c-a)^2\,(b-a)^2\,(c-b)\,.\,\frac{2\,i\pi}{3\,.\,5\,.\,7}\times T(x)$$

und weil

$$P'(a)\,P'(b)\,P'(c)=-(c-a)^2\,(b-a)^2\,(c-b)^2$$

so hat man

$$W(x)=\frac{2\,i\pi}{3\,.\,5\,.\,7}\times P'(a)\,P'(b)\,P'(c)\times T(x)$$

Diese wenigen Beispiele lassen vermuten, es sei

$$\frac{W(x)}{T(x)}=2\,i\pi\,.\,P^{2\alpha}(a)\,P^{2\beta}(b)\,P^{2\gamma}(c)$$

multiplicirt mit einem numerischen Factor, den ich aus denselben nicht erraten kann. Bleibe ich beim dreiaxigen Ellipsoid, so bin ich nicht im Stande, denselben zu bestimmen, und gehe ich zum Rotationsellipsoid über, so sehe ich mich genötigt, von der Heine'schen Formel

$$W(x)=\Pi(x-a)^{\prime\,2-\alpha}\,.\,(U_1\,V_2-U_2\,V_1)$$

auszugehen. Wenn

$$f(x)=\Pi(x-a)^{\alpha-1\,.\,2}\times P(x);$$

so ist

$$U_1=\int_a^b f(z'')\,dz'',\quad U_2=\int_b^c f(z')\,dz',\quad V_1=\int_a^b\frac{f(z'')\,dz''}{x-z''},$$

$$V_2 = \int_b^c \frac{f(z')\,dz'}{x - z'}$$

und also

$$W(x) = \Pi(x-a)^{1|2-\alpha} \int\int \left(\frac{1}{x-z'} - \frac{1}{x-z''}\right) f(z')\,dz' \,.\, f(z'')\,dz''$$

$$\begin{pmatrix} b < z' < c \\ a < z'' < b \end{pmatrix}$$

Weil für ein grosses x die Entwicklung von $T(x)$ mit dem Term $x^{-\frac{n+1}{2}}$ beginnt, so denke man sich den vorliegenden Ausdruck auch nach fallenden Potenzen von x entwickelt, also

$$\frac{1}{x-z'} - \frac{1}{x-z''} = \frac{z'-z''}{x^2} + \frac{z'^2-z''^2}{x^3} + \frac{z'^3-z''^3}{x^4} + \ldots$$

Da

$$\tfrac{3}{2} - \Sigma\alpha = v - \frac{n-3}{2} = v + 2 - \frac{n+1}{2}$$

so müssen alle Doppelintegrale

$$\int_a^b \int_b^0 (z'^\lambda - z''^\lambda) f(z')\,dz' \,.\, f(z'')\,dz''$$

verschwinden für

$$\lambda = 1,\ 2, \ldots v$$

erst derjenige für $\lambda = v + 1$ verschwindet nicht, sondern ist die Constante $\frac{W(x)}{T(x)}$, die bis auf eine Potenz von i mit den Heine'schen Constanten $\frac{4}{f}$ überein kommt. Es lässt sich aber auch direct zeigen, dass das Doppelintegral für die angegebenen Werte von λ verschwindet. Ob der eingeklammerte Unterschied $z'^{v+1} - z''^{v+1}$ oder $(z'-a)^{v+1} - (z''-b)^{v+1}$ geschrieben werde, ist für den Wert des Doppelintegrals gleichgültig. Denn man braucht in der zweiten Form des Unterschiedes nur nach dem binomischen Satze zu entwickeln und zu beachten, dass die zu

$$\lambda = 1,\ 2, \ldots v$$

gehörenden Doppelintegrale verschwinden. Es ist somit

$$\frac{W(x)}{T(x)} = \int_a^b \int_b^c [(z'-a)^{\nu+1} - (z''-a)^{\nu+1}] f(z')\, dz' \, . \, f(z'')\, dz''$$

Bis dahin waren $x-a$, $x-b$, $x-c$ die Halbaxenquadrate des Ellipsoides

$$P(x) = \Pi(x-a)^\alpha \times Q(x)$$

und die ganze Function

$$Q(x) = x^\nu - d_1 x^{\nu-1} + \dots$$

durch keinen der Factoren $x-a$, $x-b$, $x-c$ teilbar. Die ν Wurzeln der Gleichung

$$Q(x) = 0$$

waren alle reell und ungleich und lagen zwischen a und c; ζ derselben zwischen b und c, folglich $\nu - \zeta$ zwischen a und b. Für dasselbe (α, β, γ) gibt es $\nu+1$ Functionen $Q(x)$ (alle mit reellen Coefficienten); für keine zwei hatte ζ denselben Wert;

$$\zeta = 0, 1, 2, \dots \nu$$

Nun lasse ich $b-a$ verschwinden; die $\nu - \zeta$ Wurzeln vereinigen sich mit a; es sei

$$Q(x) = (x-a)^{\nu-\zeta} Q_1(x)$$

Wenn ich

$$\nu - \zeta + \alpha + \beta = \frac{m}{2}$$

setze, so ist m eine ganze nulle oder positive Zahl, und es folgt

$$\zeta + \gamma = \frac{n-m}{2}, \quad \gamma = \tfrac{1}{2}\sin^2\left(\frac{n-m}{2}\right)\pi$$

Wenn m gerade ist, so kann $\alpha+\beta$ sowol $=0$ als $=1$ sein; wenn aber m ungerade ist, so ist notwendig

$$\alpha + \beta = \tfrac{1}{2}$$

Man schreibe nun

$$\overline{x-c} = x, \quad \overline{c-b} = a, \quad \overline{c-a} = a;$$

$$P(x) = x^\gamma (x+a)^{\frac{m}{2}} Q_1(x)$$

wo die ganze Function

$$Q_1(x) = x^\zeta - \vartheta_1 x^{\zeta-1} + \dots$$

weder durch x, noch durch $x+a$ teilbar ist. Man kann von neuem die Bedingung, dass

$$\frac{2(x+a)\sqrt{x}}{P(x)} \cdot \frac{\partial}{\partial x}\left(2(x+a)\sqrt{x} \cdot \frac{\partial P(x)}{\partial x}\right)$$

eine lineare Function von x sei, setzen und findet als notwendige Folge, dass γ nur 0 oder $\frac{1}{2}$ sein kann, und dass m eine der Zahlen 0, 1, 2, . . . , n sein muss. Die lineare Function ist dann

$$n(n+1)(x+a) - m^2 a$$

Die Differentialgleichung für $P(x)$ nimmt also folgende Gestalt an

$$\frac{2(x+a)\sqrt{x}}{P(x)} \cdot \frac{\partial}{\partial x}\left(2(x+a)\sqrt{x} \cdot \frac{\partial P(x)}{\partial x}\right) = n(n+1)(x+a) - m^2 a$$

Dieser Differentialgleichung genügt

$$P(x) = x^{\frac{n-m}{2}}(x+a)^{\frac{m}{2}} \mathrm{F}\left(-\frac{n-m}{2}, -\frac{n-m-1}{2}, -n+\tfrac{1}{2}, -\frac{a}{x}\right)$$

Da sich aber die Gleichung nicht ändert, wenn man n durch $-n-1$ ersetzt, so genügt auch

$$T(x) = x^{-\frac{n+m+1}{2}}(x+a)^{\frac{m}{2}} \mathrm{F}\left(\frac{n+m+1}{2}, \frac{n+m}{2}+1, n+\tfrac{3}{2}, -\frac{a}{x}\right)$$

Dass die Bezeichnung mit $T(x)$ richtig ist, erhellt aus dem Anfangsterme $x^{-\frac{n+1}{2}}$ der Entwicklung nach fallenden Potenzen von x.

Aus der zuletzt angegebenen Integralformel $\frac{W(x)}{T(x)}$ geht sogleich hervor, dass für ein kleines k^2 der Ausdruck die Form

$$\frac{W(x)}{T(x)} = U_1 \int_b^c (z'-a)^{\gamma+1} f(z')\, dz' = U_1 \times L$$

annimmt, wo nun U_1 und L zu berechnen sind. Der Einfachheit wegen nehme ich $a-b=0$ und verfolge den Wert der Lamé'schen Function $P(x)$, während das Argument x sich von c nach b (b sehr klein) und von b nach 0 hinbewegt. Wir hatten

$$P(x) = (x-a)^{\alpha}(x-b)^{\beta}(x-c)^{\gamma} \times Q(x)$$

gesetzt, wo

$$Q(x) = x^{v} - d_1 x^{v-1} + d_2 x^{v-2} + \ldots + (-1)^{\lambda} d_{\lambda} x^{v-\lambda} + \ldots$$
$$\ldots + (-1)^{v} d_v$$

eine ganze Function $v$ten Grades von x ist. Die Relation, welche die Coefficienten von x in der Function $Q(x)$ mit einander verknüpft, ist bekanntlich

$$(\lambda+1)(2n-2\lambda-1)d_{\lambda+1} = [(2n-1)d - 2\lambda(n-\lambda) \,.\, \Sigma a + 4\lambda \,.\, \Sigma \alpha a] d_{\lambda}$$
$$+ (v-\lambda+1)[(2v-2\lambda+1) \,.\, \Sigma bc + 4 \,.\, \Sigma \alpha bc] d_{\lambda-1}$$
$$+ 2(v-\lambda+2)(v-\lambda+1) abc \,.\, d_{\lambda-2}$$

Setzt man nun hier $a = b = 0$, so hat man

$$(\lambda+1)(2n-2\lambda-1)d_{\lambda+1} = 2c\left[\lambda^2 - (n-2\gamma)\lambda + \frac{(2n-1)d}{2c}\right] d_{\lambda}$$

also

$$\frac{d_{\lambda+1}}{d_{\lambda}} = \frac{(\lambda-\varepsilon)(\lambda-\zeta)}{(\lambda+1)(\lambda-n+\frac{1}{2})} \times (-c)$$

wenn

$$\lambda^2 - (n-2\gamma)\lambda + \frac{(2n-1)d}{2c} = (\lambda-\varepsilon)(\lambda-\zeta)$$

angenommen wird. Weil $d_0 = 1$ ist, so ergibt sich

$$Q(x) = x^{v} \,.\, \mathrm{F}\left(-\varepsilon, -\zeta, \tfrac{1}{2}-n, \frac{c}{x}\right)$$

und da $Q(x)$ eine ganze Function von x ist, so muss die hypergeometrische Reihe abbrechen, also wenigstens ein oberer Parameter eine negative ganze Zahl sein. Wird nun $\zeta \leqq \varepsilon$ angenommen, und ist ζ eine ganze positive Zahl, so ist es wegen der Relation

$$\varepsilon + \zeta = n - 2\gamma$$

auch ε. Es ist demnach

$$Q(x) = x^{v-\zeta} \times x^{\zeta}\,\mathrm{F}\left(-\varepsilon, -\zeta, \tfrac{1}{2}-n, \frac{c}{x}\right)$$

und $x^{\zeta}\,\mathrm{F}\left(-\varepsilon, -\zeta, \tfrac{1}{2}-n, \frac{c}{x}\right)$ ist eine ganze Function ζten Grades von x; die Function $Q(x)$ ist somit durch $x^{v-\zeta}$ teilbar und von den v Wurzeln fallen somit $v-\zeta$ mit null zusammen. Ist also $a = b = 0$ und wird dem Argument x nur die nördliche Halbebene als Spielraum angewiesen, so hat man für $b < x < c$

$$P(x) = i^{2\gamma} \,.\, x^{\frac{1}{2}m}(c-x)^{\gamma} x^{\zeta}\,\mathrm{F}\left(-\varepsilon, -\zeta, \tfrac{1}{2}-n, \frac{c}{x}\right)$$

wenn

$$m = \varepsilon - \zeta = n - 2\gamma - 2\zeta = 2(\alpha + \beta + v - \zeta); \quad n = 2(\alpha + \beta + \gamma + v)$$

gesetzt wird. Da

$$\zeta = 0, 1, 2, \ldots, v$$

sein kann, so kann m wol 0 oder eine positive ganze Zahl sein, nicht aber eine negative ganze Zahl werden. Setzt man

$$x = c \sin^2\theta; \quad \cos\theta = u$$

und beachtet, dass

$$\tfrac{1}{2}(m + 2\gamma + 2\zeta) = \frac{n}{2}$$

ist, so folgt

$$P(x) = i^{2\gamma} \cdot c^{\frac{n}{2}} \sin^m\theta \cos^{2\gamma}\theta \times \sin^{2\zeta}\theta F\left(-\varepsilon, -\zeta, \tfrac{1}{2} - n, \frac{1}{\sin^2\theta}\right)$$

Wenn

$$R(x) = \sin^{2\zeta}\theta \times F\left(-\varepsilon, -\zeta, \tfrac{1}{2} - n, \frac{1}{\sin^2\theta}\right)$$
$$= (1 - u^2)^{\zeta} F\left(-\varepsilon, -\zeta, \tfrac{1}{2} - n, \frac{1}{1 - u^2}\right)$$

gesetzt und nun auf die hypergeometrische Reihe die Verwandlungsformel

$$F(\alpha, \beta, \gamma, x) = (1 - x)^{-\alpha} F\left(\alpha, \gamma - \beta, \gamma, \frac{x}{x - 1}\right)$$

angewandt wird, so erhält man

$$R(x) = (-1)^{\zeta} u^{2\zeta} F\left(-\varepsilon, -\zeta, \tfrac{1}{2} - n, \frac{1}{u^2}\right).$$

Weil nun aber

$$+\varepsilon = \frac{n+m}{2} - \gamma, \quad +\zeta = \frac{n-m}{2} - \gamma$$

so erkennt man, dass für

$$\gamma = 0 \quad \text{und} \quad \gamma = \tfrac{1}{2}$$

die beiden obern Parameter mit einander tauschen und somit ist auch

$$R(x) = (-1)^{\zeta} u^{2\zeta} F\left(-\frac{n-m}{2}, -\frac{n-m-1}{2}, -(n - \tfrac{1}{2}), \frac{1}{u^2}\right)$$

Der Coefficient von $x u^{-2\lambda}$ in der Entwicklung der Function $F(\ldots)$ ist nun aber

$$(-1)^\lambda \frac{(n-m)(n-m-1)\ldots(n-m-2\lambda+1)\times n(n-1)\ldots(n-\lambda+1)}{1.2\ldots\lambda\times 2n(2n-1)\ldots(2n-2\lambda+1)}$$

$$= \frac{(n-m)!\,n!}{(2n)!}\times(-1)^\lambda\frac{(2n-2\lambda)!}{\lambda!(n-\lambda)!\,(n-m-2\lambda)!}$$

und da

$$\frac{(2n-2\lambda)!}{(n-m-2\lambda)!}\times u^{n-m-2\lambda} = (2n-2\lambda)(2n-2\lambda-1)\ldots$$

$$\ldots(n-m-2\lambda+1)u^{n-m-2\lambda} = \frac{\partial^{n+m}}{\partial u^{n+m}}\,.\,(u^{2n-2\lambda})$$

so ist

$$u^{n-m}\times F\left(-\frac{n-m}{2}, -\frac{n-m-1}{2}, -(n-\tfrac{1}{2}), \frac{1}{u^2}\right)$$

$$= \frac{(n-m)!\,n!}{(2n)!}\,.\,\left(\frac{\partial}{\partial u}\right)^{n+m}.\sum_{\lambda=0}(-1)^\lambda\frac{1}{\lambda!\,(n-\lambda)!}\,.\,u^{2n-2\lambda}$$

$$= \frac{(n-m)!}{(2n)!}\,.\,\left(\frac{\partial}{\partial u}\right)^{n+m}.\,(u^2-1)^n$$

Wird nun die Heine'sche Kugelfunction erster Art mit $P^n(x)$ bezeichnet, so erhält man nach der Formel

$$P^n(u) = \frac{1}{n!}\left(\frac{\partial}{\partial u}\right)^n\left(\frac{u^2-1}{2}\right)^n$$

für die Lamé'schen Function $P(x)$ schliesslich den Ausdruck

$$P(x) = i^{n-m}\,.\,c^{\frac{n}{2}}\,.\,2^n\,\frac{n!\,(n-m)!}{(2n)!}\,.\,\sin^m\theta\,P^m\,P^n(u)$$

Dieselbe geht also. wie auch schon Heine gezeigt hat, in eine zugeordnete Kugelfunction über. Dasselbe zeigt auch schon die für $P(x)$ geltende Differentialgleichung. Nun soll $x = c$, also

$$\theta = \frac{\pi}{2}$$

gesetzt werden. Weil

$$n - m = 2\gamma + 2\zeta$$

so ist $n-m$ für $\gamma = 0$ gerade und für $\gamma = \frac{1}{2}$ ungerade, und die Formel

$$P(x) = i^{n-m}\,.\,c^{\frac{n}{2}}\,.\,\frac{n!\,(n-m)!}{(2n)!}\,.\,\sin^m\theta$$

$$.\sum_{\lambda=0}(-1)^\lambda\frac{(2n-2\lambda)!}{\lambda!\,(n-\lambda)!\,(n-m-2\lambda)!}\,.\,u^{n-m-2\gamma}$$

gibt nun sogleich

$$1)\quad P(c) = c^{\frac{n}{2}} \cdot \frac{n!\,(n-m)!\,(n+m)!}{(2n)!\left(\frac{n-m}{2}\right)!\,\left(\frac{n+m}{2}\right)!}$$

$$= c^{\frac{n}{2}} \cdot \frac{\Gamma\left(\frac{n-m+1}{2}\right) \cdot \Gamma\left(\frac{n+m+1}{2}\right)}{\Gamma(\frac{1}{2}) \cdot \Gamma(n+\frac{1}{2})}$$

für $\gamma = 0$ und $P(c) = 0$ für $\gamma = \frac{1}{2}$. Ferner ist

$$\frac{\partial P(x)}{\partial t} = P'(x) = i\sqrt{c}\sin\theta\,\frac{\partial P(x)}{\partial \theta} = -i\sqrt{c}\,(1-u^2)\,\frac{\partial P(x)}{\partial u}$$

also

$$2)\quad P'(c) = c^{\frac{n+1}{2}} \cdot 2 \cdot \frac{n!\,(n-m)!\,(n+m)!}{\left(\frac{n+m-1}{2}\right)!\,\left(\frac{n-m-1}{2}\right)!}$$

$$= c^{\frac{n+1}{2}} \cdot 2 \cdot \frac{\Gamma\left(\frac{n-m}{2}+1\right) \cdot \Gamma\left(\frac{n+m}{2}-1\right)}{\Gamma(\frac{1}{2}) \cdot \Gamma(n+\frac{1}{2})}$$

für $\gamma = \frac{1}{2}$. Setzt man nun

$$\frac{\partial^{2\gamma}}{\partial t^{2\gamma}} \cdot P(x) = P^{2\gamma}(x)$$

so lassen sich 1) und 2) durch folgende Formel ausdrücken:

$$P^{2\gamma}(c) = c^{\frac{n}{2}+\gamma} \cdot 2^{2\gamma}\,\frac{n!\,(n+m)!\,(n-m)!}{(2n)!\left(\frac{n+m}{2}-\gamma\right)!\,\left(\frac{n-m}{2}-\gamma\right)!}$$

Ich untersuche nun die Function $P(x)$, wenn $a = 0$, b sehr klein und das Argument x zwischen 0 und b liegt. Nach Weglassung alles dessen, was die Ordnung b übersteigt, nimmt die Recursionsscale für die d folgende Gestalt an:

$$(\lambda+1)(\lambda-n+\tfrac{1}{2})\,\frac{d_{\lambda+1}}{c} + \left[\lambda^2-(n-2\gamma)\lambda+\frac{(m-)\,d}{2o}\right.$$
$$\left.+\frac{b}{c}\,\lambda(\lambda-n+2\beta)\right]d_\lambda+(v-\lambda+1)(v-\lambda+2\alpha+\tfrac{1}{2})\,b\,d_{\lambda-1} = 0$$

Dieser Ausdruck zeigt nun sogleich, dass $d_1, d_2, d_3, \ldots, d_\zeta$ von den früher angegebenen Werten nur um ein kleines von der Ordnung b abweichen. Weil

$$\frac{d_{\lambda+1}}{d_\lambda} = \frac{(\lambda-\varepsilon)(\lambda-\zeta)}{(\lambda+1)(\lambda-n+\frac{1}{2})}\cdot(-c)$$

so ist

$$d_\lambda = \frac{(-\varepsilon)(-\varepsilon+1)(-\varepsilon+2)\ldots(-\varepsilon+\lambda-1)\times(-\zeta)(-\zeta+1)(-\zeta+2)\ldots(-\zeta+\lambda-1)}{1.2.3\ldots\lambda\times(\frac{1}{2}-n)(\frac{3}{2}-n)(\frac{5}{2}-n)\ldots(\lambda-n-\frac{1}{2})}\times(-c)^\lambda.$$

und man erkennt, dass sich die Coefficienten d für

$$\lambda = \zeta+1,\quad \zeta+2,\quad \zeta+3,\ldots$$

von 0 nur um ein Kleines von der Ordnung b unterscheiden. Setzt man $\lambda = \zeta$, so folgt

$$d_\zeta = \frac{\varepsilon(\varepsilon-1)(\varepsilon-2)\ldots(\varepsilon-\zeta+1)}{(n-\frac{1}{2})(n-\frac{3}{2})\ldots(n-\zeta+\frac{1}{2})}\cdot c^\zeta = \frac{\Gamma(\varepsilon+1)\Gamma(n-\zeta+\frac{1}{2})}{\Gamma(\varepsilon-\zeta+1)\Gamma(n+\frac{1}{2})}\cdot c^\zeta$$

und wenn man beachtet, dass

$$\zeta = \frac{n-m}{2}-\gamma,\qquad \varepsilon = \frac{n+m}{2}-\gamma$$

ist, so hat man

$$d_\zeta = \frac{\Gamma\left(\frac{n+m}{2}+1-\gamma\right).\Gamma\left(\frac{n+m}{2}+\gamma+\frac{1}{2}\right)}{\Gamma(m+1).\Gamma(n+\frac{1}{2})}\times c^\zeta$$

und d_ζ erhält also für $\gamma = 0$ und $\gamma = \frac{1}{2}$ denselben Wert. Beachtet man nun, dass nach der Formel

$$\Gamma(\tfrac{1}{2})\,\Gamma(2x) = 2^{2x-1}\,\Gamma(x)\,\Gamma(x+\tfrac{1}{2})$$

auch

$$\Gamma(\tfrac{1}{2})\,\Gamma(n+m+1) = 2^{n+m}\,\Gamma\left(\frac{n+m+1}{2}\right).\Gamma\left(\frac{n+m}{2}+1\right)$$

und

$$\Gamma(\tfrac{1}{2})\,\Gamma(2n+1) = 2^{2n}.\Gamma(n+\tfrac{1}{2})\,\Gamma(n+1)$$

ist, so hat man schliesslich

$$d_\zeta = 2^{n-m}\frac{n!\,(n+m)!}{(2n)!\,m!}\cdot c^\zeta$$

Man setze nun

$$x = b\sin^2\varphi$$

dann fallen in der Function $Q(x)$ die Terme

$$x^\nu,\quad d_1x^{\nu-1},\quad d_2x^{\nu-2},\ldots,\quad d_{\zeta-1}x^{\nu-\zeta+1}$$

als klein höherer Ordnung weg und $Q(x)$ erhält die Form

1) $Q(x) = b^v \sin^{2v}\varphi - d_1 b^{v-1} \sin^{2(v-1)}\varphi + d_2 b^{v-2} \sin^{2(v-2)}\varphi + \ldots$
$\ldots + (-1)^\lambda d_\lambda b^{v-\lambda} \sin^{2(v-\lambda)}\varphi + \ldots$
$+ (-1)^{\zeta-1} d_{\zeta-1} b^{v-\zeta+1} \sin^{2(v-\zeta+1)}\varphi + (-1)^\zeta d_\zeta b^{v-\zeta} \sin^{2(v-\zeta)}\varphi + \ldots$
$+ (-1)^v \cdot d_v$

Setzt man in der Recursionsscalo für die Coeff. d auch $\lambda = 0$ und beachtet, dass

$$d_v + 1 = 0$$

sein muss, so folgt

$$(v-\varepsilon)(v-\zeta)d_v + (2\alpha + \tfrac{1}{2}) b\, d_{v-1} = 0$$

und man erkennt, dass d_v mit $b d_{v-1}$ von derselben Ordnung der Kleinheit ist. Setzt man ferner

$$\lambda = v - 1$$

und lässt den Tern mit d_v neben den Termen mit d_{v-1} und d_{v-2} weg, so findet man ferner, dass d_{v-1} mit $b d_{v-2}$ von derselben Ordnung der Kleinheit ist. Fährt man so fort, so kommt man zu dem Schlusse, dass die Terme

$$d_v, \quad b\, d_{v-1}, \quad b^2 d_{v-2}, \quad b^3 d_{v-4}, \quad \ldots -, \quad b^{v-\zeta} d_\zeta$$

alle klein von derselben Ordnung sind und somit sind alle in der Function $Q(x)$ noch auftretenden Glieder von derselben Ordnung der Kleinheit. Die Recursionsscale verliert somit den ersten Term, und setzt man noch $v - \lambda$ für λ, so wird dieselbe

$$\frac{b^{\lambda+1} d_{v-\lambda-1}}{b^\lambda d_{v-\lambda}} = \frac{(\lambda + \varepsilon - v)(v - \zeta - \lambda)}{(\lambda+1)(\lambda + 2\alpha + \frac{1}{2})}$$

und es ist somit

2) $\quad Q(x) = (-1)^v d_v \cdot F(-(v-\zeta), \quad \varepsilon - v, \quad 2\alpha + \tfrac{1}{2}, \quad \sin^2\varphi)$

Um d_v zu bestimmen, setze man in Formel 1) und 2) die Coeff. von $\sin^{2(v-\zeta)}\varphi$ einander gleich. Man erhält

$$b^{v-\zeta} d_\zeta = \frac{(\varepsilon - v)(\varepsilon - v + 1)(\varepsilon - v + 2) \ldots (\varepsilon - \zeta - 1)}{(2\alpha + \frac{1}{2})(2\alpha + \frac{3}{2}) \ldots (2\alpha + v - \zeta - \frac{1}{2})} \times d_v$$

Nach früheren Formeln ist nun aber

$$v - \zeta = \frac{m}{2} - \alpha - \beta, \quad \varepsilon - v = \frac{m}{2} + \alpha + \beta,$$

$$\varepsilon - \zeta = m, \quad v - \zeta + 2\alpha - \tfrac{1}{2} = \frac{m-1}{2} + \alpha - \beta$$

wenn man m als von null verschieden annimmt,

$$\frac{dv}{b^{v-\zeta}d\zeta} = \frac{\Gamma\left(\frac{m+1}{2}+\alpha-\beta\right)\times\Gamma\left(\frac{m}{2}+\alpha+\beta\right)}{\Gamma(2\alpha+\frac{1}{2})\times\Gamma(m)}$$

Dieser Ausdruck liefert nun für $\beta = 0$ und $\beta = \frac{1}{2}$ denselben Wert, und man hat demnach

$$\frac{dv}{b^{v-\zeta}d\zeta} = \frac{\Gamma\left(\frac{m+1}{2}+\alpha\right)\Gamma\left(\frac{m}{2}+\alpha\right)}{\Gamma(2\alpha+\frac{1}{2})\,.\,\Gamma(m)} = \frac{1}{2^{m+2\alpha-1}}\cdot\frac{\Gamma(\frac{1}{2})\,.\,\Gamma(m+2\alpha)}{\Gamma(2\alpha+\frac{1}{2})\,.\,\Gamma(m)}$$

also

$$dv = \frac{b^{v-\zeta}d\zeta}{2^{m-1}} \text{ für } \alpha = 0 \text{ und } = m\frac{b^{v-\zeta}d\zeta}{2^{m-1}} \text{ für } \alpha = \tfrac{1}{2}$$

somit

$$dv = \frac{m^{2\alpha}}{2^{m-1}}\times b^{v-\zeta}d\zeta$$

und schlieslich

$$dv = 2^{n-2m-1}\,m^{2\alpha}\,.\,\frac{n!\,(n+m)!}{m!\,(2n)!}\times b^{\frac{m}{2}-\alpha-\beta}\times c^{\frac{n-m}{2}-\gamma}$$

Es bleibt noch zu erklären, wie dieser Ausdruck für $m = 0$ zu verstehen ist. Setzt man $m = 0$, so ist auch

$$v-\zeta+\alpha+\beta = 0,\quad \text{also}\quad \alpha = 0,\quad \beta = 0,\quad \zeta = v$$

nur aus dem Werte für $d\zeta$ folgt

$$dv = 2^n\,.\,\frac{n!\,n!}{(2n)!}\times c^v$$

und man erkennt somit, dass in dem Ausdrucke dv das Zeichen $m^{2\alpha}$ für $m = 0$, also auch $\alpha = 0$ durch $\frac{1}{2}$ zu ersetzen ist. Für die Function $P(x)$ erhält man nun den Ausdruck

$$P(x) = i^{n-2\alpha}\,.\,g\,.\,m^{2\alpha}\,.\,\sin^{2\alpha}\varphi\,.\,\cos^{2\beta}\varphi$$
$$.\,F\left(-\left(\frac{m}{2}-\alpha-\beta\right),\ \frac{m}{2}+\alpha+\beta,\ 2\alpha+\tfrac{1}{2},\ \sin^2\varphi\right)$$

wenn abkürzend

$$g = 2^{n-2m+1}\,.\,\frac{n!\,(n+m)!}{m!\,(2n)!}\times b^{\frac{m}{2}}\times c^{\frac{n-m}{2}}$$

gesetzt wird. Für die Exponentengruppen

$$(\alpha,\beta) = (0,0),\quad (\tfrac{1}{2},0),\quad (0,\tfrac{1}{2}),\quad (\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{2})$$

nimmt nun dieselbe folgende Formen an:

1) $(\alpha,\ \beta) = (0,\ 0),\ P(x) = i^n \cdot g \cdot \sum_{\lambda=0} \frac{m}{m+2\lambda} \binom{\frac{m}{2}+\lambda}{2\lambda} (-4\sin^2\varphi)^\lambda;$
(m eine gerade Zahl)

2) $(\alpha,\ \beta) = (0,\ \frac{1}{2});\ P(x) = i^{n-1} \cdot g \cdot \cos\varphi \cdot \sum_{\lambda=0} \binom{\frac{m-1}{2}+\lambda}{2\lambda}$
$\times (-4\sin^2\varphi)^\lambda$; ($m$ ungerade)

3) $(\alpha,\ \beta) = (\frac{1}{2},\ 0);\ P(x) = i^{n-1} \cdot mg \cdot \sin\varphi \cdot \sum_{\lambda=0} \frac{1}{2\lambda+1} \binom{\frac{m-1}{2}+\lambda}{2\lambda}$
$\times (-4\sin^2\varphi)^\lambda$; ($m$ ungerade)

4) $(\alpha,\ \beta) = (\frac{1}{2},\ \frac{1}{2});\ P(x) = i^{n-1} \cdot 2g\sin\varphi\cos\varphi \cdot \sum_{\lambda=0} \binom{\frac{m}{2}+\lambda}{2\lambda+1}$
$\times (-4\sin^2\varphi)^\lambda$; ($m$ gerade)

Wendet man nun auf diese Ausdrücke bekannte Summenformeln an, so lassen sich alle 4 durch die einzige Formel

$$P(x) = i^{n-2\alpha} \times g\cos(m\varphi - \alpha\pi) \quad \text{(halb für } m = 0)$$

darstellen. Beachtet man nun, dass

$$\frac{\partial}{\partial t} = -\sqrt{c}\,\frac{\partial}{\partial\varphi}$$

ist, so erhält man aus der letzten Formel sogleich

$$\frac{\partial^{2\alpha}}{\partial t^{2\alpha}} P(x) \text{ (für } x = 0) = P^{2\alpha}(0) = i^{n+2\alpha} \times c^\alpha \times m^{2\alpha} \cdot g;$$

$$\frac{\partial^{2\beta}}{\partial t^{2\beta}} (P(x) \text{ (für } x = b) = P^{2\beta}(b) = i^{n-m+2\beta} \cdot c^\beta \cdot m^{2\alpha} \cdot g$$

wo im Falle $m = 0$ die Zeichen $m^{2\alpha}$ und $m^{2\beta}$ durch $\frac{1}{2}$ zu ersetzen sind. Die Multiplication der beiden letzten Ausdrücke gibt nun

$$P^{2\alpha}(0) \times P^{2\beta}(b) = i^{2n-m+2\alpha+2\beta} \times c^{\alpha+\beta} \times m^{2\alpha+2\beta} \times g^2$$

und wenn man dieses Product noch mit $P^{2\gamma}(c)$ multipl., so folgt

$$P^{2\alpha}(0)\,P^{2\beta}(b)\,P^{2\gamma}(c) = i^{2n-m+2\alpha+2\beta} \times 2^{2\gamma} \times c^{\frac{n}{2}+\alpha+\beta+\gamma} \times m^{2\alpha+2\beta}$$
$$\times\; g^2 \frac{n!\,(n+m)!\,(n-m)!}{(2n)!\left(\frac{m+m}{2}-\gamma\right)!\,\left(\frac{n-m}{2}-\gamma\right)!}$$

wo $m^{2\alpha+2\gamma}$ für $m=0$ durch $\frac{1}{2}$ zu ersotzen ist.

Nach diesen Erörterungen können wir nun an die Ausrechnnng von U_1 nnd L gehen. Es war

$$U_1 = \int_0^b f(z'')\,dz''$$

setzt man hier

$$z'' = b \sin^2\varphi$$

so ist

$$f(z'')\,dz'' = z''^{\alpha-1/2}(z''-b)^{\beta-1/2}(z''-c)^{\gamma-1/2} \times P(z'')\,dz''$$
$$= (-1)^{\beta+\gamma-1}(z'')^{\alpha-1/2}(b-z'')^{\beta-1/2}(c-z'')^{\gamma-1/2} \times P(z'')\,dz''$$

oder also

$$f(z'')\,dz'' = (-1)^{n-v+2\alpha-1} \times 2b^{\alpha+\beta}\,.\,c^{\gamma-1/2} g \sin^{2\alpha}\varphi \cos^{2\beta}\varphi (m\varphi-\alpha\pi)\,d\varphi$$

somit

$$U_1 = (-1)^{n-v+2\alpha-1}\, 2b^{\alpha+\beta} c^{\gamma-1/2} g \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2\alpha}\varphi \cos^{2\beta}\varphi \cos(m\varphi-\alpha\pi)\,d\varphi$$

Ich sehe mich nuu gonötigt, hier die Exponentengrnppen

$$(\alpha,\beta) = (0,0),\quad (0,\tfrac{1}{2}),\quad (\tfrac{1}{2},0),\quad (\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{2})$$

gesondert zu behandeln und setze deshalb

$$S(m,\alpha,\beta) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2\alpha}\varphi \cos^{2\beta}\varphi \cos(m\varphi-\alpha\pi)\,d\varphi$$

1°) Wenn $\alpha = 0$, $\beta = 0$, so ist m gerade;

$$S(m,\ 0,\ 0) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos m\varphi \, d\varphi = \frac{1}{m} \sin \frac{m\pi}{2} = 0$$

im allgemeinen, aber $= \frac{\pi}{2}$, wenn $m = 0$.

$$U_1 = (-1)^{n-\nu-1} 2c^{\gamma-1} \pi g = (-1)^{\frac{n}{2}+\gamma-1} \cdot \pi \frac{\Gamma(\frac{1}{2})\, n!}{2^n \Gamma(n+\frac{1}{2})} \cdot c^{\frac{n}{2}+\gamma+\frac{1}{2}}$$

2⁰) Wenn $\alpha = 0$, $\beta = \frac{1}{2}$, so ist m ungerade;

$$S(m,\ 0,\ \tfrac{1}{2}) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\varphi \cos m\varphi \, d\varphi = \tfrac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos(m-1)\varphi + \cos(m+1)\, d\varphi$$

$$= \tfrac{1}{2} \left(\frac{1}{m-1} \sin\left(\frac{m-1}{2}\pi\right) + \frac{1}{m+1} \sin\left(\frac{m+1}{2}\pi\right) \right) = 0$$

wenn nicht $m = 1$ ist; dann aber $= \frac{\pi}{4}$.

Weil $b = ck^2$, so ist

$$U_1 = (-1)^{n-\nu-1} \cdot \frac{\pi}{2} \cdot k c^\gamma g = (-1)^{\frac{n-1}{2}+\gamma} \cdot \pi \frac{n+1}{4}$$
$$\cdot \frac{\Gamma(\frac{1}{2})\, n!}{2^n \Gamma(n+\frac{1}{2})} \cdot k^2 c^{\frac{n}{2}+\gamma}$$

3⁰) Wenn $\alpha = \frac{1}{2}$, $\beta = 0$, so ist m ungerado;

$$S(m,\ \tfrac{1}{2},\ 0) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\varphi \sin m\varphi \, d\varphi = 0,$$

wenn nicht $m = 1$; dann aber $= \frac{\pi}{4}$.

$$U_1 = (-1)^{n-\nu} \frac{\pi}{2} \cdot k c^\gamma g = (-1)^{\frac{n+1}{2}+\gamma} \pi \cdot \frac{n+1}{4} \cdot \frac{\Gamma(\frac{1}{2})\, n!}{2^n \Gamma(n+\frac{1}{2})}$$
$$\cdot k^2 c^{\frac{n}{2}+\gamma}$$

4°) Wenn $\alpha = \frac{1}{2}$, $\beta = \frac{1}{2}$, so ist m gerade;

$$S(m, \tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\varphi \cos\varphi \sin m\varphi \, d\varphi$$

$$= \tfrac{1}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos(m-2)\varphi - \cos(m+2\varphi)\, d\varphi = 0,$$

wenn nicht $m = 2$, dann aber $= \frac{\pi}{8}$. Es ist also

$$U_1 = (-1)^{n-v} \cdot \frac{\pi}{4} \cdot k^2 c^{\gamma+1/2} g = (-1)^{\frac{n}{2}+\gamma+1} \pi \cdot \frac{(n+1)(n+2)}{64} \cdot \frac{\Gamma(\frac{1}{2})\, n!}{2^n \Gamma(n+\frac{1}{2})} \cdot k^4 c^{\frac{n+1}{2}+\gamma}$$

Alle 4 Fälle, in welchen U_1 dargestellt wurde, setzen also nach der Formel

$$m = 2(v - \zeta + \alpha + \beta)$$

voraus, dass $\zeta = v$ sei, dass also keine Wurzel der Gleichung

$$Q(x) = 0$$

in das Intervall von a bis b falle. Diese Voraussetzung machen wir auch bei der nachfolgenden Berechnung von L. Es sei also

$$m = 2(\alpha + \beta)$$

Setzt man

$$x^1 - \bar{c} = x^1;\quad \bar{c} - \bar{a} = a;\quad \bar{c} - \bar{b} = a$$

wo aber $\bar{a} = 0$ und $\bar{b}$ sehr klein, so ist

$$L = \int_{-a}^{0} (x^1 + a)^{v+1} f(x^1)\, dx')$$

Weil

$$f(x^1) = (x^1 + a)^{\frac{m}{2}-1} x^{1\gamma - 1/2} P(x^1)$$

wenn man

$$x^1 = -a\cos^2\theta = -au^2$$

setzt, in

$$f(-a u^2) = i^{2\gamma-1}(1-u^2)^{\frac{m}{2}-1} a^{\frac{m}{2}+\gamma-\frac{3}{2}} u^{2\gamma-1} P(-a^2 u^2)$$

übergeht nnd nun nach früherem

$$P(-a u^2) = i^{n-m} a^{\frac{n}{2}} \frac{(n-m)!}{(2n)!} (1-u^2)^{\frac{m}{2}} \left(\frac{\partial}{\partial u}\right)^{n+m} (u^2-1)^n$$

ist, so ergibt sich nnter Anwendnng des Satzes

$$(1-u^2)^m \left(\frac{\partial}{\partial u}\right)^{n+m} (u^2-1)^n = (-1)^m \frac{(n+m)!}{(a-m)!} \left(\frac{\partial}{\partial u}\right)^{n-m} (u^2-1)^n$$

dass

$$L = (-1)^n (-i) \,.\, 2 \frac{(n+m)!}{(2n)!} a^{n+1/2} \int_0^1 u^{2\gamma} (u^2-1)^v \left(\frac{\partial}{\partial u}\right)^{n-m} (u^2-1)^n du$$

ist. Beachtet man, dass

$$2v + 2\gamma = n - m$$

dass also der Integrand eine ganze Function n ten Grades von u^2 ist, so kann man die untere Grenze auf -1 herabrücken, den Factor 2 tilgen und partiell integriren. Dann wird

$$L = (-1)^m (-i) \frac{(n+m)!}{(2n)!} a^{n+1/2} \int_{-1}^{+1} (u^2-1)^n \left(\frac{\partial}{\partial u}\right)^{n-m} (u^{2\gamma}(u^2-1)^v) du$$

$$= (-1^{n-m} (-i) \frac{(n+m)!\,(n-m)!}{2^{2n} n!\, \Gamma(n+\frac{1}{2})} \Gamma(\tfrac{1}{2})\, a^{n+1/2} \int_{-1}^{+1} (1-u^2)^n du$$

Weil

$$2\int_0^1 (1-u^2)^n du = \int_0^1 (1-u^2) \frac{2u\, du}{u} = \int_0^1 t^{-1/2}(1-t)^n dt = \frac{\Gamma(\frac{1}{2})\, n!}{\Gamma(n+\frac{3}{2})}$$

so ist schliesslich

$$L = (-1)^{n-m-1} \frac{2i}{2n+1} \cdot \frac{(\Gamma(\frac{1}{2}))^2 (n+m)!\,(n-m)!}{(2^n \Gamma(n+\frac{1}{2}))^2} a^{n+1/2}$$

Diese Formel werde nnn in den vier Fällen

$$(\alpha, \beta) = (0, 0), \quad (0, \tfrac{1}{2}), \quad (\tfrac{1}{2}, 0), \quad (\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2})$$

auf

$$\frac{W(x)}{T(x)} = U_1 L = 2i\pi \times \text{Prod.} \times M$$

angewandt, wenn

$$\text{Prod.} = P^{2\alpha}(0)\, P^{2\beta}(b)\, P^{2\gamma}(c) \quad \text{und} \quad \frac{m}{2} = \alpha + \beta, \quad \frac{n-m}{2} = v + \gamma$$

Zuletzt trachte man darnach, nur n und v zu behalten. In den Ausdrücken für U_1 werde der Buchstabe c durch a ersetzt.

I⁰) $(\alpha, \beta) = (0, 0)$.

$$U_1 L = (-1)^{\frac{n}{2}-\gamma} \cdot \frac{2i\pi}{2n+1} \cdot \left(\frac{\Gamma(\frac{1}{2}) \cdot n!}{2^n\, \Gamma(n+\frac{1}{2})}\right)^3 a^{\frac{3n}{2}+\gamma};$$

$$\text{Prod} = \frac{(-1)^n}{2^{n-2\gamma}} \cdot \left(\frac{\Gamma(\frac{1}{2})\, n!}{2^n\, \Gamma(n+\frac{1}{2})}\right)^3 \cdot \frac{n!}{\left(\left(\frac{n}{2}-\gamma\right)!\right)^2} a^{\frac{3n}{2}+\gamma}$$

also

$$M = (-1)^{\frac{n}{2}+\gamma}\, 2^{n-2\gamma} \cdot \frac{1}{2n+1} \cdot \frac{\left(\left(\frac{n}{2}-\gamma\right)!\right)^2}{n!}$$

1⁰) $\gamma = 0$.

Weil

$$\frac{1}{n!} = \frac{\Gamma(\frac{1}{2})}{2^n\, \Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right)}$$

so ist

$$\frac{\left(\left(\frac{n}{2}\right)!\right)^2}{n!} = \frac{\Gamma(\frac{1}{2}) \left(\frac{n}{2}\right)!}{2^n\, \Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)} = \frac{\Gamma(\frac{1}{2}) \cdot v!}{2^n\, \Gamma(n-v+\frac{1}{2})}$$

2⁰) $\gamma = \frac{1}{2}$.

$$\frac{\left(\left(\frac{n}{2}-\frac{1}{2}\right)!\right)^2}{n!} = \frac{\Gamma(\frac{1}{2}) \left(\frac{n-1}{2}\right)!}{2^n\, \Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right)} = \frac{\Gamma(\frac{1}{2})\, v!}{2^n\, \Gamma(n-v+\frac{1}{2})}$$

Beachtet man, dass

$$\gamma = \frac{n}{2} - v, \quad \text{also} \quad \frac{n}{2} + \gamma = n - v$$

so kann man beide Fälle in folgenden Ausdruck vereinigen:

$$M = (-1)^{n-v} \cdot \frac{\Gamma(\frac{1}{2}) \cdot v!}{2^{n-2v}(2n+1)\,\Gamma(n-v+\frac{1}{2})}$$

II°) $(\alpha, \beta) = (0, \frac{1}{2})$,

$$U_1 L = (-1)^{\frac{n+1}{2}-\gamma} \cdot \frac{2i\pi}{2n+1} \cdot \frac{(n+1)^2}{4n} \left(\frac{\Gamma(\frac{1}{2}) \cdot n!}{2^n\,\Gamma(n+\frac{1}{2})}\right)^3 k^2 a^{\frac{3n+1}{2}+\gamma}$$

$$\text{Prod.} = \frac{(-1)^n}{2^{n-2}\gamma+2} \left(\frac{\Gamma(\frac{1}{2}) \cdot n!}{2^n\,\Gamma(n+\frac{1}{2})}\right)^3 \frac{(n+1)^2(n-1)!}{\left(\frac{n+1}{2}-\gamma\right)!\left(\frac{n-1}{2}-\gamma\right)!} \cdot k^2 a^{\frac{3n+1}{2}+\gamma}$$

also

$$M = (-1)^{\frac{n-1}{2}+\gamma}\, 2^{n-2\gamma} \cdot \frac{1}{2n+1} \cdot \frac{\left(\frac{n+1}{2}-\gamma\right)!\left(\frac{n-1}{2}-\gamma\right)!}{(n+1)!}$$

1°) $\gamma = 0$, also $\frac{n-1}{2} = v$.

Weil

$$\frac{1}{(n+1)!} = \frac{\Gamma(\frac{1}{2})}{2^{n+1}\,\Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right)\Gamma\left(\frac{n+3}{2}\right)}$$

so ist

$$2^{n+1} \frac{\left(\frac{n+1}{2}\right)!\left(\frac{n-1}{2}\right)!}{(n+1)!} = \frac{\Gamma(\frac{1}{2}) \cdot v!}{\Gamma(n-v+\frac{1}{2})}$$

2°) $\gamma = \frac{1}{2}$, also $\frac{n}{2} - 1 = v$.

$$2^{n+1} \cdot \frac{\left(\frac{n+1}{2}-\frac{1}{2}\right)!\left(\frac{n-1}{2}-\frac{1}{2}\right)!}{(n+1)!} = \frac{\Gamma(\frac{1}{2}) \cdot v!}{\Gamma(n-v+\frac{1}{2})}$$

weil ferner

$$\gamma = \frac{n-1}{2} - v, \quad \text{also} \quad \frac{n-1}{2} + \gamma = n - v - 1,$$

so ist in beiden Fällen

$$\frac{W(x)}{T(x)} = U_1\,L = 2\,i\pi \times \text{Prod.} \times M$$

angewandt, wenn

$$\text{Prod.} = P^{2\alpha}(0)\,P^{2\beta}(b)\,P^{2\gamma}(c) \quad \text{und} \quad \frac{m}{2} = \alpha + \beta, \quad \frac{n-m}{2} = v + \gamma$$

Zuletzt trachte man darnach, nur n und v zu behalten. In den Ausdrücken für U_1 werde der Buchstabe c durch a ersetzt.

I⁰) $(\alpha, \beta) = (0, 0)$.

$$U_1 L = (-1)^{\frac{n}{2}-\gamma} \cdot \frac{2\,i\pi}{2n+1} \cdot \left(\frac{\Gamma(\frac{1}{2})\,.\,n!}{2^n\,\Gamma(n+\frac{1}{2})}\right)^3 a^{\frac{3n}{2}+\gamma};$$

$$\text{Prod} = \frac{(-1)^n}{2^{n-2\gamma}} \cdot \left(\frac{\Gamma(\frac{1}{2})\,n!}{2^n\,\Gamma(n+\frac{1}{2})}\right)^3 \cdot \frac{n!}{\left(\left(\frac{n}{2}-\gamma\right)!\right)^2}\,a^{\frac{3n}{2}+\gamma}$$

also

$$M = (-1)^{\frac{n}{2}+\gamma}\,2^{n-2\gamma} \cdot \frac{1}{2n+1} \cdot \frac{\left(\left(\frac{n}{2}-\gamma\right)!\right)^2}{n!}$$

1⁰) $\gamma = 0$.

Weil

$$\frac{1}{n!} = \frac{\Gamma(\frac{1}{2})}{2^n\,\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right)}$$

so ist

$$\frac{\left(\left(\frac{n}{2}\right)!\right)^2}{n!} = \frac{\Gamma(\frac{1}{2})\left(\frac{n}{2}\right)!}{2^n\,\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)} = \frac{\Gamma(\frac{1}{2})\,.\,v!}{2^n\,\Gamma(n-v+\frac{1}{2})}$$

2⁰) $\gamma = \frac{1}{2}$.

$$\frac{\left(\left(\frac{n}{2}-\frac{1}{2}\right)!\right)^2}{n!} = \frac{\Gamma(\frac{1}{2})\left(\frac{n-1}{2}\right)!}{2^n\,\Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right)} = \frac{\Gamma(\frac{1}{2})\,v!}{2^n\,\Gamma(n-v+\frac{1}{2})}$$

Beachtet man, dass

$$\gamma = \frac{n}{2} - v, \quad \text{also} \quad \frac{n}{2} + \gamma = n - v$$

so kann man beide Fälle in folgenden Ausdruck vereinigen:

$$M = (-1)^{n-v} \cdot \frac{\Gamma(\frac{1}{2}) \cdot v!}{2^{n-2v}(2n+1)\,\Gamma(n-v+\frac{1}{2})}$$

II°) $(\alpha, \beta) = (0, \frac{1}{2})$,

$$U_1 L_1 = (-1)^{\frac{n+1}{2}-\gamma} \cdot \frac{2i\pi}{2n+1} \cdot \frac{(n+1)^2}{4n} \left(\frac{\Gamma(\frac{1}{2}) \cdot n!}{2^n\,\Gamma(n+\frac{1}{2})}\right)^3 k^2 a^{\frac{3n+1}{2}+\gamma}$$

$$\text{Prod.} = \frac{(-1)^n}{2^{n-2}\gamma+2} \left(\frac{\Gamma(\frac{1}{2}) \cdot n!}{2^n\,\Gamma(n+\frac{1}{2})}\right)^3 \frac{(n+1)^2(n-1)!}{\left(\frac{n+1}{2}-\gamma\right)!\left(\frac{n-1}{2}-\gamma\right)!} \cdot k^2 a^{\frac{3n+1}{2}+\gamma}$$

also

$$M = (-1)^{\frac{n-1}{2}+\gamma}\, 2^{n-2\gamma} \cdot \frac{1}{2n+1} \cdot \frac{\left(\frac{n+1}{2}-\gamma\right)!\left(\frac{n-1}{2}-\gamma\right)!}{(n+1)!}$$

1°) $\gamma = 0$, also $\frac{n-1}{2} = v$.

Weil

$$\frac{1}{(n+1)!} = \frac{\Gamma(\frac{1}{2})}{2^{n+1}\,\Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right)\Gamma\left(\frac{n+3}{2}\right)}$$

so ist

$$2^{n+1} \frac{\left(\frac{n+1}{2}\right)!\left(\frac{n-1}{2}\right)!}{(n+1)!} = \frac{\Gamma(\frac{1}{2}) \cdot v!}{\Gamma(n-v+\frac{1}{2})}$$

2°) $\gamma = \frac{1}{2}$, also $\frac{n}{2} - 1 = v$.

$$2^{n+1} \cdot \frac{\left(\frac{n+1}{2}-\frac{1}{2}\right)!\left(\frac{n-1}{2}-\frac{1}{2}\right)!}{(n+1)!} = \frac{\Gamma(\frac{1}{2}) \cdot v!}{\Gamma(n-v+\frac{1}{2})}$$

weil ferner

$$\gamma = \frac{n-1}{2} - v, \quad \text{also} \quad \frac{n-1}{2} + \gamma = n - v - 1,$$

so ist in beiden Fällen

$$M = (-1)^{n-v-1} \cdot \frac{1}{2n+1} \cdot \frac{\Gamma(\frac{1}{2}) v!}{2^{n-2v} \Gamma(n-v+\frac{1}{2})}.$$

III⁰) $(\alpha, \beta) = (\frac{1}{2}, 0)$.

$$M = (-1)^{n-v} \cdot \frac{1}{2n+1} \cdot \frac{\Gamma(\frac{1}{2}) \cdot v!}{2^{n-2v} \Gamma(n-v+\frac{1}{2})}$$

IV⁰) $(\alpha, \beta) = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$.

$$U_1 L = (-1)^{\frac{n}{2}-\gamma} \cdot \frac{2i\pi}{2n+1} \cdot \frac{(n+1)^2 \cdot (n+2)^2}{64n(n-1)} \cdot \left(\frac{\Gamma(\frac{1}{2}) n!}{2^n \Gamma(n+\frac{1}{2})}\right)^3 \cdot k^4 a^{\frac{3n}{2}+\gamma+1},$$

$$\text{Prod.} = \frac{(-1)^n}{2^{n+6-2\gamma}} \cdot \left(\frac{\Gamma(\frac{1}{2}) \cdot n!}{2^n \Gamma(n+\frac{1}{2})}\right)^3 \cdot \frac{(n+1)^3 (n+2)^3 (n-2)!}{\left(\frac{n}{2}-\gamma+1\right)! \left(\frac{n}{2}-\gamma-1\right)!} \cdot k^4 a^{\frac{3n}{2}+\gamma+1}$$

also

$$M = (-1)^{\frac{n}{2}+\gamma} \cdot 2^{n-2\gamma} \cdot \frac{\left(\frac{n}{2}-\gamma+1\right)! \left(\frac{n}{2}-\gamma-1\right)!}{(2n+1) \cdot (n+2)!};$$

$$\frac{n}{2} = v+1+\gamma$$

1⁰) $\gamma = 0$, also $v = \frac{n}{2}-1$; $n-v = \frac{n}{2}+1$.

Weil

$$\frac{2^{n+2}}{(n+2)!} = \frac{\Gamma(\frac{1}{2})}{\Gamma\left(\frac{n+3}{2}\right) \Gamma\left(\frac{n}{2}+2\right)},$$

so ist

$$2^{n+2} \frac{\left(\frac{n}{2}+1\right)!}{(n+2)!} = \frac{\Gamma(\frac{1}{2})}{\Gamma(n-v+\frac{1}{2})}$$

2⁰) $\gamma = \frac{1}{2}$, also $v = \frac{n-3}{2}$, $n - v = \frac{n+3}{2}$,

$$2^{n+2} \frac{\left(\frac{n+1}{2}\right)!}{(n+2)!} = \frac{\Gamma(\frac{1}{2})}{\Gamma(n-v+\frac{1}{2})}$$

und somit ist in beiden Fällen

$$M = (-1)^{n-v-1} \cdot \frac{1}{2n+1} \cdot \frac{\Gamma(\frac{1}{2}) \cdot v!}{2^{n-2v}\Gamma(n-v+\frac{1}{2})}$$

Die vier Ausdrücke für M können nun in den einzigen

$$M = (-1)^{n-v-2\beta} \cdot \frac{1}{2n+1} \cdot \frac{\Gamma(\frac{1}{2}) \cdot v!}{2^{n-2v}\Gamma(n-v+\frac{1}{2})}$$

zusammen gefasst werden. Der Factor M ist zwar nur für diejenige Wurzel der Gleichung $d_{v+1} = 0$ bewiesen, bei welcher keine Wurzel der Gleichung $Q(x) = 0$ zwischen a und b liegt. Da derselbe aber eine rationale Zahl ist, so muss er für alle $v+1$ Wurzeln jener Gleichung $d_{v+1} = 0$, die sehr wahrscheinlich irreductibel ist, derselbe bleiben. Dann gilt allgemein für das dreiaxige Ellipsoid die Gleichung:

$$W(x) = 2i\pi \cdot (-1)^{n-v-2\beta} \cdot \frac{1}{2n+1} \cdot \frac{\Gamma(\frac{1}{2}) \cdot v!}{2^{n-2v}\Gamma(n-v+\frac{1}{2})} \times P^{2\alpha}(a)\, P^{2\beta}(b)\, P^{2\gamma}(c) \times T(x).$$

Aarau, den 10. April 1890.

XV.

Zur Mechanik der atmosphärischen Bewegungen.

Von

Emil Oekinghaus.

Wir gehen in den nachfolgenden Entwickelungen eine Fortsetzung derjenigen Arbeiten, welche wir in der „Wochenschrift der Astronomie, Meteorologie etc.“ unter dem Titel „Das Gesetz der Windbahnen in Cyklonen“ im Jahre 1891 veröffentlicht haben. In dieser Abhandlung haben wir die Theorie der Cyklonen in grösst möglicher Allgemeinheit entwickelt und die Theorie der allgemeinen Cirkulation der Luftströmungen in einer Form dargestellt, welche, soweit sie mathematisch durchführbar war, die wirklichen Verhältnisse der Luftbewegungen möglichst genau zum Ausdruck brachte. Zum Verständniss des Folgenden wird es also nötig sein, die genannte Arbeit einzusehen, von welcher wir glauben, dass dieselbe vermöge der Wichtigkeit der darin behandelten meteorologischen Principien einiger Aufmerksamkeit wert erscheint.

I.

Die Kräfte, welche auf ein Luftteilchen einer Cyklone einwirken, sind: die Centrifugalkraft, die Gradientkraft F_χ, und die ablenkende Kraft $\lambda = 2\omega \sin \varphi$ der Erdrotation, unter φ die geogr. Breite des bewegten Punktes verstanden. Diese letztere Kraft zwingt den Punkt, sich in einer Spirale dem Centrum der Cyklone zu nähern, welcher Tendenz die Reibung deren Constante k ist, entgegenwirkt. Der Ablenkungswinkel ψ der Windbahn von den Gra-

dienten der cirkular gedachten Isobaren ist also vornehmlich abhängig von diesen Grössen, und ebenso ist es die Geschwindigkeit $v = ay/\cos\psi$, worin y eine Grösse bedeutet, welche vom Radinsvector r des Punktes abhängt. Die allgemeinen Gleichungen sind

$$\text{1)} \quad \begin{aligned} F\sin\psi &= v\lambda + \frac{v^2}{\operatorname{tg} r}\sin\psi - \frac{v\,d\psi}{dt} + f\omega^2\sin\varphi\cos\varphi\cos\varepsilon \\ F\cos\psi &= kv + \frac{dv}{dt} + f\omega^2\sin\varphi\cos\varphi\sin\varepsilon \end{aligned}$$

in welchen f eine meridionale Kraft bezeichnet, und ε den Winkel bedeutet, den die Strömung mit dem Parallelkreis bildet. Die Elimination von F führt unter Benutzung von v' auf

$$\lambda\cos\psi - k\sin\psi + a\sin\psi\left(\frac{y}{\operatorname{tg} r} + \frac{dy}{dr}\right) + \frac{ay}{\cos\psi}\frac{d\psi}{dr} = 0$$

d. i. auf

$$\text{2)} \quad \frac{d\operatorname{tg}\psi}{dr} + \left(\frac{dy}{y\,dr} + \frac{1}{\operatorname{tg} r} - \frac{k}{ay}\right)\operatorname{tg}\psi + \frac{\lambda}{ay} = 0$$

r ist die sphärische Entfernung des bewegten Punktes vom Mittelpunkt der Cyklone.

Die vorstehende wichtige und merkwürdige Gleichung ist von uns a. a. O. mehrfach behandelt und integrirt worden, indem von ihr die Kenntniss des Ablenkungswinkels, die Grösse der Geschwindigkeit und die Werte des Luftdrucks an den verschiedenen Stellen der Cyklone abhängt.

Wir wollen nun an dieser Stelle auf einen Punkt aufmerksam machen, der bisher noch nicht erledigt worden ist, dessen Wichtigkeit aber eine genauere Untersuchung um so mehr verdient, als von ihm eine Menge Ungleichheiten herrühren, die man bisher nicht weiter beachtet hat.

Es betrifft den Ausdruck $\lambda = 2\omega\sin\varphi$ der ablenkenden Kraft der Erdrotation, der bisher in allen Cyklonenberechnungen als constante Grösse angenommen wurde, dies aber keineswegs ist, vielmehr namentlich in ausgedehnteren Depressionen in erheblichem Grade von der Polhöhe abhängt.

Für genauere Berechnungen ist es daher nicht gestattet, λ als unveränderlich zu betrachten, und es wird der Zweck der folgenden Auseinandersetzungen sein, diesen Einfluss in Rechnung zu ziehen.

Wir müssen, um $\sin\varphi$ anders auszudrücken, auf das sphärische Dreieck zwischen dem Centrum φ_0 der Cyklone, dem bewegten Punkt φ und dem nächsten Pol zurückgreifen. Wie früher sei der Winkel zwischen r und φ_0 wieder ϑ, welcher also mit der Bewegung wächst, dann ist

$$\sin\varphi = \sin\varphi_0\cos r - \cos\varphi_0 \sin r\cos\vartheta$$

mithin

$$3)\quad \frac{d\,\mathrm{tg}\,\psi}{dr} + \left(\frac{dy}{y\,dr} + \frac{1}{\mathrm{tg}\,r} - \frac{k}{ay}\right)\mathrm{tg}\,\psi + \frac{2\omega}{a\,y}(\sin\varphi_0\cos r - \cos\varphi_0\sin r.\cos\vartheta) = 0$$

Es ist aber

$$\frac{d\vartheta}{dr} = -\frac{\mathrm{tg}\,\psi}{\sin r}$$

also

$$\mathrm{tg}\,\psi = -\sin r\frac{d\vartheta}{dr}$$

und dies eingesetzt in die obige Gleichung giebt

$$\frac{d^2\vartheta}{dr^2} + \left(2\cot r + \frac{dy}{y\,dr} - \frac{k}{ay}\right)\frac{d\vartheta}{dr} - \frac{2\omega}{ay}\sin\varphi_0\cot r + \frac{2\omega}{a\,y}\cos\varphi_0\cos\vartheta = 0$$

Dies ist die genaue Differentialgleichung der Cyklone, in welcher y den Wert ausdrückt der über die Art der cyklonalen Bewegung entscheidet. Sie ist eine nicht lineare Differentialgleichung zweiter Ordnung, deren Integration wegen des Eintretens von $\cos\vartheta$ Schwierigkeiten unterliegt. Man kann zwar statt der Variabelen ϑ eine andere einführen, z. B. setzen $\mathrm{tg}\,\frac{1}{2}\vartheta = z$, und man würde erhalten

$$\frac{d^2z}{dr^2} + \left(2\cot r + \frac{dy}{y\,dr} - \frac{k}{ay} - z\right)\frac{dz}{dr} - \frac{2\omega}{a\,y}\sin\varphi_0\cot r(1+z^2) + \frac{2\omega}{ay}\cos\varphi_0(1-z^2) = 0$$

welche aber ebenfalls den bekannten Regeln der Integration Trotz bieten dürfte. Dahingegen können wir noch eine dritte Form aufstellen, welche auf der Relation

$$\frac{dr}{dt} = -v\cos\psi = ay$$

beruht. Hiernach ist

$$\mathrm{tg}\,\psi = \frac{\sin r}{ay}\frac{dr}{dt}$$

und man hat nach Einführung dieses Ausdrucks in die entsprechende Formel

$$4)\quad \frac{d^2\vartheta}{dt^2}+(k-2ay\cot r)\frac{d\vartheta}{dt}+2a\omega y(\cos\varphi_0\cos\vartheta-\sin\varphi_0\cot r)=0$$

Wenn nun auch diese Gleichung im allgemeinen nicht integrabel ist, so können gleichwol aus ihr mit Hülfe der Sectorengeschwindigkeit einige merkwürdige Beziehungen abgeleitet werden, welche mit andern Reibungsproblemen in Zusammenhang stehen.

Wir führen die Sectorengeschwindigkeit

$$S=\tfrac{1}{2}\sin r^2\frac{d\vartheta}{dt}$$

darin ein und erhalten

$$5)\quad \frac{dS}{dt}+kS+a\,\omega y\sin r(\cos\varphi_0\sin r\cos\vartheta-\sin\varphi_0\cos r)=0$$

oder einfacher

$$\frac{dS}{dt}+kS=a\,\omega y\sin r\,\sin\varphi\cos\vartheta$$

woraus

$$6)\quad S=e^{-kt}\left(C+a\omega\int y\sin r\sin\varphi\, e^{kt}\,dt\right)$$

Die Reibung (k) verringert also die Flächengeschwindigkeit. Für $k=0$ und $\varphi_0=90^0$, also für die grosse Cyklone um den Pol würde folgen aus 5)

$$S=C-\tfrac{1}{2}\omega\sin r^2.$$

Am a. O. S. 380 haben wir nachgewiesen, dass für das Reibungsgesetz $R=k\cos r\,.\,v$ die Sectorengeschwindigkeit durch

$$S_1=\frac{a\omega}{k-2a}\sin r^2+C\sin r^{\frac{k}{a}}$$

dargestellt werden werden kann, sofern

$$v=a\frac{\sin r}{\cos\psi}\quad \text{also}\quad y=\sin r$$

als dem Inneren der Cyklone entsprechend der Bewegung zugrunde gelegt wird.

Gehen wir wieder auf die obige Differentialgleichung zurück und setzen das Centrum der Cyklone in den Aequator, so erhalten wir wegen $\varphi_0=0$

7) $$\frac{dS}{dt} + kS + a\,\omega y \sin r^2 \,.\, \cos\vartheta = 0$$

Diese merkwürdige Gleichung können wir mit einer analogen der Pendelbewegung in Beziehung setzen.

Das Zeitintegral der Pendelbewegung ist bekanntlich

8) $$\frac{d^2\Theta}{dt^2} + \frac{g}{l}\sin\vartheta = 0$$

worin Θ der vom tiefsten Punkte gerechnete Ausschlagwinkel im Kreise vom Halbmesser l bedeutet. Statt des Pendels kann man auch den entsprechenden Kreis einführen, in welchem der schwere Punkt ohne Reibung gleitet. Wir denken uns nun dies Bewegungssystem so mit seinen parallelen Kräften gedreht, dass letztere nicht nach unten, sondern in einem rechten Winkel nach links gerichtet sind, und dass das Centrum auf dem Aequator liegt oder genauer, dass die Kreislinie durch einen Schnitt einer Ebene mit der Erdkugel gebildet werde. Nach der vorausgesetzten Richtung der (gedachten) Schwerkräfte würde also ein Punkt in diesem von ihm vollständig durchlaufenen Kreise im Ostpunkte die kleinste, im Westpunkte die grösste Geschwindigkeit besitzen. Setzen wir nun

$$\Theta = 90^0 + \vartheta,$$

so wird der jetzige Ausschlagwinkel identisch mit dem früheren, und man hat, weil in der Kreisbewegung die Flächengeschwindigkeit

$$S = \tfrac{1}{2}l^2\frac{d\vartheta}{dt}$$

die Gleichung

$$\frac{dS}{dt} + g\,\frac{l}{2}\cos\vartheta = 0$$

Setzen wir noch wegen der Einheit des Halbmessers $l = \sin r$, so ist auch

$$\frac{dS}{dt} + g\,\frac{\sin r}{2}\cos\vartheta = 0$$

worin g die Acceleration der Bewegung bedeutet.

Diese Gleichung, verglichen mit der entsprechenden reibungslosen cyklonalen Bewegungsgleichung

9) $$\frac{dS}{dt} + a\,\omega y \sin r^2 \cos\vartheta = 0$$

zeigt die Verwandtschaft beider Bewegungen und man erkennt deutlich, dass die cyklonalen reibungslosen Strömungen, deren Gradienten

sämtlich nach einem Punkt des Aequators gerichtet sind, mit der Bewegung eines von parallelen und westwärts gerichteten Kräften angegriffenen Punktes im Kreise verglichen werden können. Die notwendige Bedingung der Identität ist

$$g = 2a\,\omega\,y \sin r$$

Wählen wir für das äussere Gebiet der Cyklone wie früher

$$y = 1/\sin r, \quad \text{so ist} \quad g = 2a\,\omega$$

woraus hervorgeht, dass die im allgemeinen willkürliche Beschleunigung g der Winkelbewegung ω der rotirenden Erde proportional ist. Für die vorausgesetzte cyklonale Bewegung ist also deren Flächengeschwindigkeit gleich derjenigen im entsprechenden Kreise.

Vergegenwärtigt man sich also die Phasen der circularen Bewegung, so kann man behaupten, dass die Luftmassen, welche nördlich vom Aequator um das Centrum der Cyklone herumgeführt werden, in beschleunigter Flächengeschwindigkeit sich befinden und ihren westlichsten Punkt im Aequator mit der Maximal-Flächengeschwindigkeit erreichen, während in der zweiten Hälfte der Bewegung, also in der Südhälfte der Erde die Bewegung sich verzögert und im Ostpunkte ihren minimalen Wert erreicht.

Aber auch, wenn das obige Gesetz $y = 1/\sin r$ nicht geradezu erfüllt sein sollte, so dass g noch abhängig und also eine Function von r ist, so bleibt im allgemeinen der Vorgang ziemlich derselbe, namentlich wenn die Cyklonen in angenäherter circularer Bahn ihr Centrum umkreisen.

Nicht minder merkwürdig ist es, dass die Gleichung für reibende Luftmassen vollständig mit derjenigen identisch ist, welche die Kreisbewegung mit Rücksicht auf Reibung darstellt. Vrgl. Schell, Theorie der Bew. u. d. Kräfte.

Die betreffende Formel lautet

$$\text{10)} \qquad \frac{d^2\Theta}{dt^2} + \frac{k\,d\Theta}{dt} + \frac{g}{l}\sin\Theta = 0$$

oder transformirt für die Flächengeschwindigkeit der Kreisbewegung

$$\text{11)} \qquad \frac{dS}{dt} + kS + \frac{g \sin r}{2}\cos\vartheta = 0$$

welche mit unserer cyklonalen Differentialgleichung für $\varphi_0 = 0$



12) $$\frac{dS}{dt} + kS + a\omega y \sin r^2 . \cos\vartheta = 0$$

der Form nach übereinstimmt, wenn $y = 1/\sin r$, also

$$v = \frac{a}{\cos\psi \sin r} \text{ ist.}$$

Diese merkwürdige Uebereinstimmnng zweier sonst in sich verschiedenen Bewegungsformen ist recbt geeignet, die eine durch die andere zu erläutern. Wie gross auch die Reihung ist, die Bewegung in den westlichen Qnadranten wird im allgemeinen diejenige in den östlichen übertreffen

Verlassen wir nun den Aeqnator und lassen eine Cyklone in einer beliebigen Breite φ_0 entsteben, so ändert sich die Gleichnng insofern, als noch ein weiteres Glied zu derselben hinzntritt. D. h. es ist

13) $$\frac{dS}{dt} + kS + a\omega y \cos\varphi_0 \sin r^2 \cos\vartheta - a\omega y \sin\varphi_0 \sin r \cos r = 0$$

Für das äussere Gebiet $y = 1 : \sin r$ folgt also

14) $$\frac{dS}{dt} + kS = - a\,\omega \cos\varphi_0 \sin r \cos\vartheta + a\omega \sin\varphi_0 \cos r$$

In den nördlichen Quadranten ist $\cos\vartheta$ negativ; und da nunmehr noch das Schlussglied $a\omega \sin\varphi_0 \cos r$ hinzugetreten ist, so herrscht in diesen Gebieten der Cyklone eine beschleunigte Bewegung zum Westpnnkt derselben, während in den südlichen Qnadranten, wo $\cos\vartheta$ positiv bleibt, die Flächengeschwindigkeit gegen den Ostpnnkt abnimmt. Diese Unterschiede wachsen mit der graphischen Breite, wie ans der allgemeinen Gleichnng

$$\frac{dS}{dt} + kS = a\,\omega y \sin r . \sin\varphi \cos\vartheta$$

hervorgeht.

Anf alle Fälle erbalten die cyklonalen Luftmassen in Folge der Rotation der Erde eine wesentliche Beschleunigung welche in einem der westlichen Quadranten zn ihrem Maximnm gelangt.

Um nnn für eine beliebige Lage der Cyklone die Differentialgleichnng mit der entsprechenden der Kreisbewegung zu vergleichen, denken wir die oben genannten Parallelkräfte g nicht mehr nach Westen wirkend, welcher Fall dem Aeqnator entsprechen würde, sondern in die Nordwestrichtnng parallel verschoben, nnd zwar nm den Winkel φ_0 der geogr. Breite.

Da wir ϑ von Süden über Osten rechnen, Θ aber von der Nordwestrichtung über Süden, so ist

$$\Theta = \varphi_0 + 90^0 + \vartheta$$

und so folgt für die Bewegung im Kreise

$$15)\quad \frac{dS}{dt} + kS + \tfrac{1}{2} g \sin r \cos\varphi_0 \cos\vartheta - \tfrac{1}{2} g \sin r \sin\varphi_0 \sin\vartheta = 0$$

und für die cyklonale, wenn $y = 1/\sin r$

$$16)\quad \frac{dS}{dt} + kS + a\omega \sin r \cos\varphi_0 \cos\vartheta - a\omega \sin\varphi_0 \cos r = 0$$

Setzen wir also wieder $g = 2a\omega$, so werden in beiden Gleichungen die 3 ersten Glieder identisch, die letzten nicht, wogegen aber dieselben in den Zeichen übereinstimmen, wenigstens in der Bewegung in den östlichen Quadranten.

Hiernach steht fest, dass auch im allgemeinen Falle der cyklonalen Bewegung auf der nördlichen Halbkugel die Flächengeschwindigkeit derselben nach dem nordwestlichen Quadranten hin zunimmt, und dass sie mit der reihenden Bewegung eines schweren Punktes im verticalen Kreise verglichen werden kann. Da nun der Ablenkungswinkel ψ mit der Geschwindigkeit wächst, vermöge

$$\cos\psi = \frac{ay}{v}$$

oder für $y = \sin r$ nach früherem

$$17)\quad \operatorname{tg}\psi = \frac{2\omega}{k - 2a} - c \sin r^{\frac{k}{a} - 2}$$

ist, so ist für wachsende a der Ablenkungswinkel in der östlichen Hälfte der Cyklone kleiner als in der westlichen.

Diese Erörterungen bezogen sich im allgemeinen auf die Flächengeschwindigkeiten. Indessen kann man auch die Formeln für die Winkelgeschwindigkeiten beider Bewegung in Beziehung setzen, z. B. wenn man durch Einführung von $y = \operatorname{tg} r$ das innere Gebiet zunächst berücksichtigt. Für diesen Teil der Cyklone hat man dann wegen

$$\frac{d^2\vartheta}{dt^2} + (k - 2ay \cot r)\frac{d\vartheta}{dt} + \frac{2a\omega y}{\sin r}(\cos\varphi_0 \sin r \cos\vartheta - \sin\varphi_0 \cos r) = 0$$

die Gleichung



$$18)\quad \frac{d^2\vartheta}{dt^2}+(k-2a)\frac{d\vartheta}{dt}+2a\omega\cos\varphi_0\,\mathrm{tg}\,r\,.\,\cos\vartheta-2a\omega\sin\varphi_0=0$$

und für die Kreisbewegung

$$19)\quad \frac{d^2\vartheta}{dt^2}+k\frac{d\vartheta}{dt}+\frac{g}{l}\cos\vartheta=0$$

Beide Gleichungen lassen im allgemeinen Vergleichungen zu, welche das oben Gesagte zum Teil bestätigend wiederholen. Die vorletzte Gleichung ist integrabel, wenn $\varphi_0=90^0$ oder die Cyklone den Pol zum Centrum hat. Sie wird dann

$$20)\quad \frac{d^2\vartheta}{dt^2}+(k-2a)\frac{d\vartheta}{dt}=2a\omega$$

woraus wegen $v=\frac{a\,\mathrm{tg}\,r}{\cos\psi}$ folgt

$$\frac{d\vartheta}{dt}=\frac{2\omega a}{k-2a}+C_1\,e^{-(k-2a)t}$$

und

$$\vartheta=\frac{2\omega a t}{k-2a}+C_2\,e^{-(k-2a)t}$$

oder wegen

$$\mathrm{tg}\,\psi=\frac{d\vartheta}{a\,dt}\,\frac{\sin r}{y}\quad\text{und}\quad y=\mathrm{tg}\,r$$

$$21)\quad \begin{aligned}\mathrm{tg}\,\psi&=\frac{2\omega\cos r}{k-2a}+C\cos r\,e^{-(k-2a)t}\\ \sin r&=\sin r_0\,e^{-at}\end{aligned}$$

und wenn man sich auf die polaren Zonen beschränkt, die äquatorialen also ausschliesst, als Gleichung für den Luftdruck

$$\begin{aligned}\frac{P_r-P_v}{\varrho}=&-ak\log\cos r+\frac{2a\omega^2}{k-2a}\sin r^2+\frac{2a^2\omega}{k}C\sin r^{\frac{k}{a}}\\ &-a^2\log\cos r-\frac{a^2}{2}(\mathrm{tg}\,r^2+2\log\cos r)+\frac{2\omega^2a^2}{(k-a)^2}\sin r^2\\ &+\frac{4\omega a^3C}{k(k-2a)}\sin r^{\frac{k}{a}}+\frac{a^3C^2}{2(k-a)}\sin r^{\frac{2k}{a}-2}\end{aligned}$$

oder einfacher

$$22)\quad \operatorname{tg}\psi = \frac{2\omega}{k-2a}\cos r\left(1 - c\sin r^{\frac{k}{a}-2}\right)$$

$$\frac{P_r - P_v}{\varrho} = -ak\log\cos r - \frac{a^2}{2}\operatorname{tg} r + \frac{2a\omega^2(k-a)\sin r^2}{(k-2a)^2} \times \left(1 - \frac{ac}{k-a}\sin r^{\frac{k}{a}-2}\right)^2$$

II.

In Bezug auf die Hauptgleichungen der cyklonischen Bewegung

$$F\sin\psi = 2\omega v\cos r + \frac{v^2\sin\psi}{\operatorname{tg} r} - \frac{v\,d\psi}{dt} = 0$$

$$F\cos\psi = kv + \frac{dv}{dt} = 0$$

können wir leicht ein Integral für den Fall aufstellen, dass keine Gradientkräfte wirksam sind. Aus

$$\frac{d\psi}{dt} = -\frac{d\psi}{dr}v\cos\psi$$

folgt nämlich aus der ersten Formel

$$\frac{d\sin\psi}{dr} + \cot r\sin\psi + \frac{2\omega\cos r}{v} = 0$$

und vermöge der zweiten oder

$$\frac{dv}{dr} = \frac{k}{\cos\psi}$$

$$v = -\frac{2\omega\cos r}{\cot r\sin\psi + \frac{d\sin\psi}{dr}}$$

Ferner ist nach einer Differentiation

$$\frac{d^2\sin\psi}{dr^2} + \frac{1}{\sin r\cos r}\frac{d\sin\psi}{dr} - \sin\psi\cot r^2 = \frac{k\left(\sin\psi\cot r + \frac{d\sin\psi}{dr}\right)}{2\omega\cos\psi\cos r}$$

oder einfacher, wenn

$$u = \sin r\sin\psi$$

eingeführt wird,

$$23)\quad \frac{d^2u}{dr^2} - 2\cot 2r \cdot \frac{du}{dr} = \frac{k \operatorname{tg} r}{2\omega\sqrt{\sin r^2 - u^2}} \cdot \frac{du}{dr}$$

Dies ist die Differentialgleichung der Trägheitscurve für reibende Bewegung. Für reibungslose ($k = 0$) wird aus ihr

$$24)\quad u = \frac{C + \omega \cos r^2}{v} \quad \text{also} \quad \sin\psi = \frac{C + \omega\cos r^2}{v \sin r}$$

Ist dagegen $\omega = 0$, die Erde also rotationslos, so folgt

$$25)\quad u = C = \sin r \sin\psi$$

und das ist der Clairaut'sche Satz.

Wir wollen noch aus den allgemeinen Gleichungen einen speciellen Fall ableiten, indem wir nämlich die cyklonalen Bewegungen als in einer Ebene vor sich gehend betrachten. Dieselben vereinfachen sich dann in

$$26)\quad f\sin\psi = \lambda v - \frac{v\,d\psi}{dt}, \quad f\cos\psi = kv + \frac{dv}{dt}$$
$$l = 2\omega \sin\varphi$$

Die X-Achse sei nach Westen, die Y-Achse nach Norden gerichtet. Man hat

$$\frac{dx}{dt} = v\cos\psi, \quad \frac{dy}{dt} = v\sin\psi$$

also

$$x'' = -v\sin\psi\,\psi' + v'\cos\psi, \quad y'' = v\cos\psi\,\psi' + v'\sin\psi$$

und

$$-\frac{v\,d\psi}{dt} = x''\sin\psi - y''\cos\psi$$

$$\frac{dv}{dt} = x''\cos\psi + y''\sin\psi$$

mithin

$$f\sin\psi = \lambda v + x''\sin\psi - y''\cos\psi$$
$$f\cos\psi = kv + x''\cos\psi + y''\sin\varphi$$

woraus

$$f = kx' + \lambda y' + x''$$
$$ky' = \lambda x' - y''$$

oder

$$27)\quad \frac{d^2x}{dt^2} = f - k\frac{dx}{dt} - \lambda\frac{dy}{dt}$$
$$\frac{d^2y}{dt^2} = -k\frac{dy}{dt} + \lambda\frac{dx}{dt}$$

folgt, welche Gleichungen zuerst von Herrn F. Roth aufgestellt worden sind.

III.

Einige bemerkenswerte Sätze folgen noch aus dem Integral der Gleichung 2)

$$28)\quad \begin{aligned} \operatorname{tg}\psi &= \frac{e^{\int \frac{k}{a}\frac{dr}{y}}}{y\sin r}\left(C - \int \frac{\lambda}{a}\sin r\, e^{-\int \frac{k}{a}\frac{dr}{y}}\, dr\right) \\ v &= \frac{ay}{\cos\psi} \end{aligned}$$

Man kann nämlich nach den Werten von ψ fragen, welche dem Anfangs- und Endzustand der cyklonischen Bewegung zukommen. Im allgemeinen werden die Werte von 0 oder 90° verschieden sein, während aus der obigen Formel für $r = 0$ ein Wert $\psi = 90^0$ zu folgen scheint. Da es aber vorkommen kann, dass mit dem Nenner auch der Zähler des obigen Ausdrucks verschwindet, so ist es möglich, dass für die Grenzverhältnisse der Cyklone der obige Quotient sich in der Form $\frac{0}{0}$ darstellt, weshalb für die Auswertung derselben eine Differentiation seiner Glieder nötig ist. Differentiiren wir also in

$$29)\quad \operatorname{tg}\psi = \frac{C - \int \frac{\lambda}{a}\sin r\, e^{-\int \frac{k}{a}\frac{dr}{y}}}{y \sin r\, e^{-\int \frac{k}{a}\frac{dr}{y}}}$$

den Zähler und Nenner, so erhalten wir wegen $\lambda = 2\omega\sin r$

$$30)\quad \operatorname{tg}\psi = \frac{2\omega\sin\varphi}{k - \frac{a\,dy}{dr} - ay\cot r}$$

welche Gleichung den Ablenkungswinkel zu Anfang oder Ende der cyklonischen Bahn bestimmt.

Um eine Anwendung davon zu geben, führen wir das schon früher aufgestellte Geschwindigkeitsgesetz

$$31)\quad v = \frac{a\sin nr}{\cos\psi},\quad y = \sin nr$$

ein, aus welcher wir nach den Formeln 85) bis 89) S. 206 die folgende (verbesserte) Relation entwickeln.

$$32)\quad \operatorname{tg}\psi = \frac{4\lambda}{nk}\frac{\sin\frac{1}{2}nr}{\sin r}\left(\frac{\log\cot\frac{1}{4}nr - \cos\frac{1}{2}nr}{\cos\frac{1}{2}nr^3} + \frac{1}{3}\cdot\frac{n^2-4}{6n^2}\right.$$

$$+\frac{(n^2-4)(9n^2-4)}{120n^4}\left(\tfrac{1}{3}-\tfrac{1}{5}\cos\tfrac{1}{2}nr^2\right)$$

$$+\frac{(n^2-4)(9n^2-4)(25n^2-4)}{5040n^6}\left(\tfrac{1}{3}-\tfrac{2}{5}\cos\tfrac{1}{2}nr+\tfrac{1}{7}\cos\tfrac{1}{2}nr^4\right)$$

$$\left. + \ldots\right)$$

$$G = \frac{\varrho k^2 \sin nr}{2un}\left(1+\frac{\lambda}{k}\operatorname{tg}\psi - \tfrac{1}{2}\cos nr + \frac{1}{2n}\sin nr\cot r\operatorname{tg}\psi^2\right)$$

Hierin ist $\frac{k}{an} = 2$ und $C = 0$.

Setzen wir nun wegen

$$y = \sin nr,\quad \frac{dy}{dr} = n\cos nr$$

diese Beziehungen in die Formel für $\operatorname{tg}\psi$ ein, so folgt

$$33)\quad \operatorname{tg}\psi = \frac{2\omega\sin\varphi}{k - an\cos nr - a\cot r\sin nr}$$

Im Anfang der Bewegung ist nun $nr = 180^0$, oder die Geschwindigkeit = null, und die entsprechenden Ablenkungswinkel der Cyklone folgen aus

$$34)\quad \begin{aligned} \operatorname{tg}\psi_a &= \frac{2\omega\sin\varphi}{k+an},\quad v_a = 0 \\ \operatorname{tg}\psi_e &= \frac{2\omega\sin\varphi}{k-2an},\quad v_e = 0 \end{aligned}$$

Zunächst bemerkt man, dass die Ablenkungswinkel in der Cyklone stetig zunehmen.

Setzen wir nun in 32) statt nr den Grenzwert 180^0 ein, so folgt

$$\operatorname{tg}\psi_a = \frac{2\lambda}{3k\sin r}\left(\frac{2}{n}+\frac{2}{n}\cdot\frac{n^2-4}{6n^2}+\frac{2}{n}\frac{(n^2-4)(9n^2-4)}{120n^4}\ldots\right)$$

und da

$$k = 2an,\quad \sin r = \sin\frac{2}{n}90^0 = \frac{2}{n}+\frac{2}{n}\frac{n^2-4}{6n^2}+\ldots$$

so folgt

$$\operatorname{tg}\psi_a = \sin\frac{\lambda}{3na} = \frac{2\omega}{3na}\sin\varphi$$

was mit der obigen Formel wegen $k = 2na$ übereinstimmt. Diese letztere Bedingung bringt es mit sich, dass in beiden Formeln

$$\psi_s = 90^0$$

ist, und man erkennt aus diesen Bestimmungen, dass die Grenzgleichung 30) genau ist.

Daraus ergeben sich nun einige weitere Folgerungen.

Denken wir uns, dass auf der nördlichen Hemisphäre sich eine Cyklone gebildet habe, deren südlichster Punkt etwa den Aequator berührt. In dem Grenzkreise beginnen die Strömungen mit der Geschwindigkeit = null und werden durch die Erdrotation um so bedeutender von ihrer zunächst nach dem Centrum gerichteten Bewegung abgelenkt, so nördlicher die Strömungen sind. Hiernach zeigt die Formel

$$\operatorname{tg} \psi_a = \frac{2\omega \sin \varphi}{k + an}$$

dass der Ablenkungswinkel der Strömung um den aequatorialen Berührungspunkt = null ist, so dass also nur an dieser Stelle die eingeleitete Bewegung zunächst nach Norden gerichtet ist. Je weiter wir uns aber auf der Peripherie des Grenzkreises von dem vorausgesetzten Berührungspunkt nach Norden entfernen, also zu höheren Breiten gelangen, um so grösseren Ablenkungswinkel werden wir begegnen, die demnach im nördlichsten Punkt ihr Maximum erreichen. Hieraus ist ohne weiteres erklärlich, weshalb die verschiedenen Teilgebiete der Cyklonen verschiedene Ablenkungswinkel haben, und warum sie in den nördlichsten Quadranten grösser sein müssen, als in den südlichen, wogegen in den östlichen im Vergleich zu den westlichen kein Unterschied obwaltet.

Ferner zeigt die Formel, dass für grössere Reibung ein kleinerer Ablenkungswinkel eintritt, und dass dies auch bei grösserer Geschwindigkeit der Fall ist, da v von a abhängt.

Was den Einfluss von n betrifft, welcher Coefficient in Bezug auf die Ausdehnung der Cyklone eine Rolle spielt, so sieht man, dass für grössere n, also bei kleineren Ausdehnungen der Ablenkungswinkel kleiner wird.

Unter allen Umständen hat natürlich ω oder die Rotationsgeschwindigkeit dem massgebendsten Einfluss.

Am Ende der Bewegung ist

$$\operatorname{tg}\psi_e = \frac{2\omega\cos\varphi}{k - 2na}$$

also $\psi_e > \psi_a$ und ist im Grenzfall, wenn $k = 2na$, gleich 90°.

Bei anticyklonaler Bewegung dagegen gelten die Formeln

$$35)\quad \operatorname{tg}\psi_a = \frac{2\omega\sin\varphi}{k + 2na}, \quad \operatorname{tg}\psi_e = \frac{2\omega\sin\varphi}{k - an}$$

welche Werte kleiner als die der cyklonalen Bewegung sind.

Es scheint nützlich zu sein, die Grenzwerte für die schon früher betrachteten Fälle

$$v = \frac{a}{\cos\psi\sin r}, \quad y = \frac{1}{\sin r} \quad \text{des äussern Gebietes}$$

und

$$v = \frac{a}{\cos\psi}\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}r, \quad y = \operatorname{tg}\tfrac{1}{2}r \quad \text{des inneren Gebietes}$$

einer Cyklone zu berechnen. Man findet beziehungsweise

$$\operatorname{tg}\psi_a = \frac{\lambda}{k}, \quad \operatorname{tg}\psi_i = \frac{\lambda}{k - a}$$

welche mit den entsprechenden Werten in VII. a. a. O. genau übereinstimmen, da $a = c$ ist.

IV.

In den bisherigen Berechnungen waren wir immer davon ausgegangen, zunächst einen Ausdruck für die Geschwindigkeit anfzustellen, aus demselben vermittelst einer Differentialgleichung ein Integral für den Ablenkungswinkel zu finden und durch eine nochmalige Integration den Ausdruck für die Luftdruckdifferenzen zu gewinnen.

Die Gleichungen waren

$$v = \frac{ay}{\cos\psi}$$

$$36)\quad \begin{aligned} &\frac{d\operatorname{tg}\psi}{dr} + \left(\frac{dy}{y\,dr} + \frac{1}{\operatorname{tg} r} - \frac{k}{ay}\right)\operatorname{tg}\psi + \frac{\lambda}{ay} = 0 \\ &\frac{dP}{\varrho\,dr} = aky + a\lambda y\operatorname{tg}\psi - a^2 y\frac{dy}{dr} + \frac{a^2y^2}{\operatorname{tg} r}\operatorname{tg}\psi^2 \end{aligned}$$

Wie wir schon früher hemerkt, hahen wir vermittelst dieser Gleichnngon cinen hedentenden Teil der atmosphärischen Bewegnngen zn erklären versncht, indem wir zunächst über y als Fnnction des Radiusvector eine dem inneren oder äusseren Gebiete der Cyklone entsprechendo Annahme machten. Um z. B. die Verhältnisse für den Nordostpassat hinsichtlich seiner Goschwindigkeit, Ahlenkungswinkel nnd Lnftdrnckdifforenzen zn horochnen, würden wir für dessen anticyklonale Bewcwegung zn setzen hahen

$$v = -\frac{a \sin r}{\cos \psi}, \quad \text{also} \quad y = \sin r$$

$$\text{37)} \quad \operatorname{tg} \psi = \frac{2\omega}{k+2a} + e \sin r^{-\frac{k}{a}-2} \qquad \text{vergl. F. 124) a. a. O.}$$

$$-\frac{P_r - P_0}{\varrho} = \tfrac{1}{2} a^2 \left(\frac{k}{a}+1\right)\left(1+\frac{4\omega^2}{(k+2a)^2}\right)(\sin r^2 - \sin r_0^2)$$
$$-\frac{4a^2\omega^2 \sin r_0^2}{(k+2a)^2}\left(-\left(\frac{\sin r_0}{\sin r}\right)^{\frac{k}{a}}\right)$$
$$-\frac{2a^3\omega^2 \sin r_0^2}{(k+2a)(k+a)}\left(1-\left(\frac{\sin r_0}{\sin r}\right)^{\frac{2k}{a}+2}\right)$$

Nimmt man als Grenzen dos Nordostpassates theoretisch dio Grenzen $\varphi = 30^0$ nnd $\varphi = 0$, also $r = 60^0$ und 90^0 nnd nehmen an, dass

$$a = 0{,}00000333 = 2{,}11\,m, \quad k = 0{,}0000364$$

nnd zwar anf Grnnd des Roihnngsgesetzes

$$R = k \cos r v$$

so werden die Potenzen von $\sin r_0 / \sin r$ sehr kloin, nnd die Lnftdrnckformel wird, wenn der Anfangswert von $\psi = 0$ ist,

$$\text{38)} \quad -\frac{P_r - P_0}{\varrho} = \frac{a^2}{2}\left(\frac{k}{a}+1\right)\left(1+\frac{4\omega^2}{(k+2a)^2}\right)\cos r_0^2$$
$$-\frac{4a^2\omega^2}{(k+2a)^2}\left(1+\frac{\frac{1}{2}a}{k+a}\right)\sin r_0^2$$

Führon wir hierin die ohigen Constanten mit

$$\omega = 0{,}0000729, \quad r_0 = 60^0$$

ein, so folgt nach Rednction anf die Barometerstände zwischen Aequator nnd 30^0 Broite anf Grund der Relation

$$b_r - b_0 = \frac{760}{10333\,g}(P_r - P_0)$$

$$b_a - b_9 = -9{,}2\,mm.$$

Ist also der Luftdruck am Aequator $757\,mm$, so ist er in 30^0 geogr. Breite $766{,}2\,mm$, ein Resultat, welches den wirklichen Verhältnissen ziemlich gut entspricht.

Die Anfangsgeschwindigkeit beginnt mit

$$v_a = -2{,}11 \,.\, \tfrac{1}{2}\sqrt{3} = 1{,}8\,m$$

und endet am Aequator mit $9\,m$, indem dort der Ableitungswinkel bis zu 76^0 gewachsen ist.

Diese Zahlen sind selbstverständlich nur hypothetische, und ändern sich mit der Annahme der Constanten Im allgemeinen aber dürften sie der Wirklichkeit entsprechen, wiewol die Grenzen der Passate andere sind, als diejenigen, welche wir der Bequemlichkeit der Rechnung wegen angenommen haben.

Will man für den unteren Passat unter zu Grundelegung des Reibungsgesetzes

$$R = k\cos r \,.\, v$$

die Geschwindigkeitsformel

39) $$v = -\frac{a}{\cos\psi} \,.\, \frac{1}{\sin r}$$

benutzen, so erhält man für den Ablenkungswinkel

40) $$\operatorname{tg}\psi = \frac{2\omega}{k} + C\,e^{-\frac{k}{2a}\sin r^2}$$

und für die Luftdruckdifferenzen

41) $$\frac{P_r - P_0}{\varrho} = -\left(ak + \frac{4a\omega^2}{k}\right)\log\frac{\sin r}{\sin r_0} - \frac{a^2}{2}\left(\frac{1}{\sin r^2} - \frac{1}{\sin r_0^2}\right)$$
$$- \frac{2\omega^2 a^2}{k^2}(\cot r^2 - \cot r_0^2) - a\,\omega\,C\int e^{-\frac{kx}{2a}}\frac{dx}{x}$$
$$+ \frac{2\omega a^2 C}{k}\int\frac{e^{-\frac{k}{2a}x}}{x^2}dx + \frac{a^2 C^2}{2}\int\frac{e^{-\frac{k}{a}x}}{x^2}dx$$

Hierin bedeutet

$$C = -\frac{2\omega}{k} e^{\frac{3k}{8a}}, \quad \sin r^2 = x$$

Die Anfangsbewegung des Passates ist also zunächst von Nord nach Süd gerichtet, und zwar in 30° Breite. Demnach ist

$$42) \quad \operatorname{tg}\psi = \frac{2\omega}{k}\left(1 - e^{-\frac{k}{2a}(\sin r^2 - \frac{3}{4})}\right)$$

Die Integrale können vermittelst der Gammafunctionen in Reihen ausgedrückt werden. So ist, wenn

$$\frac{k}{2a} x = v$$

$$\int_{3/4}^{1} \frac{e^{-\frac{k}{2a}x}}{x} dx = \int_{\frac{3}{8}\frac{k}{a}}^{\frac{k}{2a}} \frac{e^{-v}}{v} dv = \frac{2a\omega^2}{k}\left(\frac{8a}{3k}\left(1 - \frac{1}{\frac{3k}{8a}+1}\right)\right.$$

$$\left. - \frac{2a}{k} e^{-\frac{k}{8a}} \left(1 - \frac{1}{\frac{k}{2a}+1}\right)\right)$$

ferner

$$\int_{3/4}^{1} \frac{e^{-\frac{k}{2a}}}{x^2} dx = \frac{k}{2a}\left(\frac{e^{-\frac{3}{8}\frac{k}{a}}}{\left(\frac{3}{8}\frac{k}{a}\right)^2}\left(1 - \frac{2}{\frac{3}{8}\frac{k}{a}+1}\right)\right.$$

$$\left. - \frac{e^{-\frac{k}{2a}}}{\left(\frac{k}{2a}\right)^2}\left(1 - \frac{2}{\frac{3}{8}\frac{k}{a}+1}\right)\right)$$

Im allgemoinen sind diese Glieder sehr klein, soweit sie sich auf die beiden Grenzen des Passates beziehen, und so wird hierfür die Luftdruckdifferenz

$$43) \quad \frac{P_a - P_0}{a^2 \varrho} = -\tfrac{1}{2}\frac{k}{a}\left(1 + \frac{4\omega^2}{k^2}\right)\log\tfrac{4}{3} + \tfrac{1}{6} + \frac{6\omega^2}{k^2}$$

also, wenn

$$a = 0{,}000000333, \quad k = 0{,}0000364 \quad \text{ist,}$$

$$b_a - b_0 = 10{,}5\ mm$$

Der Luftdruck in 80° Breite ist also jetzt um 10,5 *mm* grösser als am Aequator.

Aus diesen Beispielen erhellt, dass man aus v zunächst ψ und dann b erhält.

Es ist indessen noch möglich, v zu bestimmen, wenn ψ als Function von r bekannt ist.

Wie aus der Differentialgleichung für $\operatorname{tg}\psi$ hervorgeht, kann man dieselbe umgestalten in

$$44)\quad \frac{dy}{dr} + \left(\cot r + \frac{d\operatorname{tg}\psi}{\operatorname{tg}\psi\, dr}\right) y + \frac{\lambda}{\operatorname{tg}\psi} - k = 0$$

und integrirt

$$45)\quad y = \frac{1}{\sin r \operatorname{tg}\psi}\left(C - k\int\left(\frac{\lambda}{k} - \operatorname{tg}\psi\right)\sin r\, dr\right)$$

Ist für die Berechnung der allgemeinen Circulation

$$\lambda = 2\omega\cos r$$

darin eingeführt, so folgt

$$46)\quad v = \frac{1}{\sin r\,\sin\psi}\left(C - \frac{\omega}{a}\sin r^2 + \frac{k}{a}\int \operatorname{tg}\psi \sin r\, dr\right)$$

und man erkennt, dass, wenn $\operatorname{tg}\psi$ als Function von r gegeben ist, die Ermittelung von v keine Schwierigkeiten mehr macht.

Endlich wollen wir noch erwähnen, dass, wenn das Gesetz der Luftdruckdifferenzen bekannt ist, sich hieraus vermittelst einer Differentialgleichung höherer Ordnung die Formel für die Geschwindigkeit und damit für den Ablenkungswinkel herleiten lässt, welche Rechnung wir indessen übergehen.

V.

Wir wollen noch einige Beziehungen aufsuchen, welche in den Gleichungen für die cyklonale Bewegung im inneren Gebiete derselben enthalten sind, und welchen wir die Form

$$47)\quad v = \frac{c}{\cos\psi}\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}r,\quad \operatorname{tg}\psi = \frac{\lambda}{k-c}\left(1 - \frac{c}{k}\left(\frac{\sin\frac{1}{2}r}{\cos\frac{1}{2}r_1}\right)^{2\frac{k}{c}-2}\right)$$

gegeben haben.

Im Folgenden setzen wir dagegen gemäss der Grenzen der räumlichen Bewegung $\frac{1}{2}r$ statt $\operatorname{tg}\frac{1}{2}r$ und $\sin\frac{1}{2}r$.

Wir suchen zunächst das Maximum der Geschwindigkeit, indem wir v differentiiren. Es resultirt eine quadratische Gleichung mit den Wurzeln

$$48)\quad \left(\frac{r}{r_1}\right)^{\frac{2k}{c}-2} = \frac{1 \pm \sqrt{1 - \frac{c^2}{k^2}\left(\frac{2k}{c}-1\right)\left(1+\frac{(k-c)^2}{\lambda^2}\right)}}{\frac{c^2}{k^2}\left(\frac{2k}{c}-1\right)}$$

Wollte man das obige Geschwindigkeitsgesetz überhaupt der cyklonischen Bewegung zu Grunde legen, so liesse sich unter bestimmten Verhältnissen auch noch das äussere Gebiet durch dasselbe darstellen, da die letzte Formel zeigt, dass die Geschwindigkeit zuerst einen kleinsten und dann einen grössten Wert erhalten kann, welches der Bewegung im Gesamtgebiet der Cyklone durchaus entspricht. Als besonderer Fall ist die Annahme $\lambda = k$ zu betrachten, wie man findet, wenn in

$$49)\quad \left(\frac{r}{r_1}\right)^{\frac{2k}{c}-2} = \frac{1 \pm \left(1-\frac{c}{k}\right)^2}{\frac{c^2}{k^2}\left(\frac{2k}{c}-1\right)}$$

das untere Zeichen gewählt wird. Hierfür ist $r_i = r_1$, oder die Maximalgeschwindigkeit fällt in den Grenzkreis der beiden Gebiete, während die Minimalgeschwindigkeit in den äusseren Teil fällt. Ist z. B. $c = \frac{4}{5}k$, so folgt

$$\frac{r}{r_1} = \left(\frac{25 \pm 1}{24}\right)^2$$

Ist c noch kleiner als $^4/_5 k$ angenommen, so rücken die Orte der beiden extremen Geschwindigkeiten noch näher aneinander, während sie weiter auseinandergehen, wenn z. B. $c = k$ ist. In diesem Falle ist

$$50)\quad \operatorname{tg}\psi = \frac{\lambda}{k} + \frac{2\lambda}{k}\ln\frac{r_1}{r},\quad v = \frac{kr}{2\cos\psi}$$

Das Maximum der Sectorengeschwindigkeit $\frac{r}{2}v\sin\psi$ findet dann statt für

$$\operatorname{tg}\psi = \frac{\lambda}{k}$$

welcher Ablenkungswinkel dem Radiusvector r_1 entsprechen möge.

Das Minimum der Geschwindigkeit findet man vermittelst

$$51)\quad \frac{r_i}{r_1} = e^{\frac{1}{2}\sqrt{1-\frac{k^2}{\lambda^2}}}$$

das Maximum durch

$$52)\quad \frac{r_a}{r_1} = e^{-\frac{1}{2}\sqrt{1-\frac{k^2}{\lambda^2}}}$$

worin r_i und r_a die entsprechenden Radien bedeuten, welche durch die Beziehung

$$r_i r_m = r_1^2,$$

mit einander verknüpft sind.

Die entsprechenden Ablenkungswinkel folgen dann aus

$$53)\quad \operatorname{tg}\psi_i = \frac{\lambda}{k} - \sqrt{\frac{\lambda^2}{k^2}-1}, \quad \operatorname{tg}\psi_a = \frac{\lambda}{k} + \sqrt{\frac{\lambda^2}{k^2}-1}$$

woraus ähnlich

$$\operatorname{tg}\psi_i \operatorname{tg}\psi_a = 1 \quad \text{also}$$

$$54)\quad \psi_i + \psi_a = 90^0 \quad \text{folgt.}$$

Diese Längen- und Winkelrelationen lassen eine einfache geometrische Construction zu.

Das Maximum der Sectorengeschwindigkeit befindet sich also in dem durch die Radien r_i und r_a begrenzten Raume. Die denselben entsprechenden Geschwindigkeiten sind

$$55)\quad \begin{aligned} v_i &= \frac{\lambda r_i}{\sqrt{2}}\sqrt{1-\sqrt{1-\frac{k^2}{\lambda^2}}} \\ v_a &= \frac{\lambda r_a}{\sqrt{2}}\sqrt{1+\sqrt{1-\frac{k^2}{\lambda^2}}} \end{aligned}$$

Die Luftdruckformel und die Curvengleichung sind endlich noch

$$56)\quad \begin{aligned} \frac{P_i - P_0}{\varrho} &= \frac{\lambda^2 r^2}{2}\left(\frac{1}{4}\frac{k^2}{\lambda^2} + \left(\frac{3}{2} + \log\frac{r_1}{r}\right)^2\right) \\ \vartheta &= \frac{k}{4\lambda}(\operatorname{tg}\psi^2 - \operatorname{tg}\psi_0^2) \end{aligned}$$

Das Verhältniss der extremen Geschwindigkeiten ist

$$\frac{v_i}{v_a} = \frac{\lambda}{k}\left(1 - \sqrt{1 - \frac{k^2}{\lambda^2}}\right) e^{\sqrt{1 - \frac{k^2}{\lambda^2}}}$$

Ist z. B.

$$\frac{k}{\lambda} = \frac{1}{4}$$

also im allgemeinen eine geringe Reibung vorausgesetzt, so findet man

$$\frac{v_i}{v_a} = 0{,}334$$

oder die Minimalgeschwindigkeit ist ungefähr $^1/_3$ der maximalen.

Wenn also $k < \lambda$ ist, so kann man für

$$v = \frac{kr}{2 \cos \psi}$$

zwei Gebiete der Cyklone der Rechnung zu Grunde legen, in welchen zuerst zunehmende und dann abnehmende Geschwindigkeit auftritt. Nur ist dann das äussere Gebiet kleiner als dasjenige, welches der Beziehung

$$v = \frac{c}{\cos \psi} \cdot \frac{1}{r}$$

entspricht. Immerhin ist dieser engere Fall von Interesse, schon deswegen, weil für beide Gebiete ein Geschwindigkeitsgesetz genügt. Dieser Fall entspricht übrigens demjenigen, welchen wir schon bei der Berechnung der allgemeinen Circulation der Atmosphäre benutzt haben.

Um ein Beispiel zu geben, nehmen wir an, dass sich in der Breite von $55^1/_2{}^0$ eine Cyklone gebildet habe; und setzen voraus, dass $k = \frac{3}{5}\lambda$ sei. Da nun

$$\lambda = 0{,}00012$$

ist, so ist der Reibungscoefficient

$$k = 0{,}000072 \quad \text{und}$$

$$\frac{r_i}{r_1} = e^{2/5}, \quad \frac{r_a}{r_1} = e^{-2/5} \quad \text{oder annähernd} \quad r_i = \tfrac{3}{2} r_1, \quad r_a = \tfrac{2}{3} r_1$$

Es ist r_1 der Radiusvector des Maximums der Flächengeschwindigkeit. Ist derselbe z. B. $= 450\,km$, so würden die Radien der Minimal- und Maximalgeschwindigkeit

$$r = 675\,km, \quad r_a = 300\,km$$

sein, mit den Ablenkungswinkeln

$$\psi_i = 18^1/_2{}^0 \quad \psi_a = 71^1/_2{}^0$$

und den Geschwindigkeiten

$$v_i = 25{,}5\,m \quad v_a = 34\,m$$

Die Luftdruckformeln für die bezeichneten Orte sind

57) $$\frac{P_i - P_0}{\varrho} = \frac{\lambda^2 r_i^2}{4}\left(5 - 3\sqrt{1 - \frac{k^2}{\lambda^2}}\right),$$

$$\frac{P_a - P_0}{\varrho} = \frac{\lambda^2 r_a^2}{4}\left(5 + 3\sqrt{1 - \frac{k^2}{\lambda^2}}\right)$$

und die Barometerdifferenzen nach der Formel

$$b - b_0 = \frac{760}{10333\,g}(P - P_0)$$

$$b_i - b_0 = 41{,}3\,mm \qquad b_a - b_0 = 23{,}2\,mm$$

In der Entfernung von $450\,km$, wo die grösste Flächengeschwindigkeit eintritt, ist

$$r_1 = 450\,km, \quad \psi_1 = 59^0 \quad v_1 = 31\,m, \quad b_1 - b_0 = 28{,}3\,mm$$

Der mittlere Sturmgradient in dem Cyklonenraume zwischen 675 und $450\,km$ ist demnach $6{,}4\,mm$, der zwischen 450 und $300\,km$ ist $3{,}7\,mm$, und der im innern Raume $8{,}6\,mm$, im Centrum ist natürlich der Gradient = null.

Diese Zahlen beziehen sich auf Durchschnittswerte. Im allgemeinen muss man, um genaue Werte zu erhalten, verfahren wie früher. S. S. 186. a. a. O.

Wir wählen noch ein Beispiel. Die Reibung sei geringer, nämlich

$$k = 0{,}00004$$

der Oberfläche des Meeres etwa entsprechend. Die geogr. Breite des Centrums sei wieder $55^1/_2{}^0$, also

$$\lambda = 0{,}00012,$$

demnach

$$\frac{k}{\lambda} = {}^1/_3$$

Die grösste Flächengeschwindigkeit findet statt in

$$r_1 = 450\,km$$

Entfernung vom Centrum. Dann findet man folgende Werte

r_i im Minimum $720\,km$ $\psi_i = 9^0 50'$, $v_i = 14{,}9\,m$ $b_i - b_0 = 39{,}3\,mm$
r_1 $450\,km$ $\psi_1 = 71^0 30'$, $v_1 = 27\,m$ $b_1 - b_0 = 32{,}2\,mm$
r_a im Maximum $281\,km$ $\psi_a = 80^0 10'$, $v_v = 32{,}2$ $b_a - b_0 = 21{,}5\,mm$

Es gewinnt hiernach den Anschein, dass man für den Grenzfall $c = k < \lambda$ das Gesetz

$$v = \frac{cr}{2\cos\psi}$$

für die ganze Cyklone als gültig ansehen kann, sofern k nur einen Bruchteil von λ ausmacht, was in nördlicheren Breiten und auf dem Ocean der Fall ist Es steht dann frei, über die Grenze r_i das Geschwindigkeitsgesetz

$$v = \frac{c}{\cos\psi}\,\frac{1}{r}$$

herrschen zu lassen, wenn man das noch für nötig hält.

VI.

Wir kehren nun zu dem allgemeineren Falle zurück, indem wir annehmen, dass die Geschwindigkeit im ganzen Gebiet derselben durch die Formel

$$v = \frac{a \sin nr}{\cos\psi}$$

definirt sei und mit null beginne. Der Ausdruck r bezeichne wieder den Radius der Curve, dessen grösster r_0 vermittels

$$n r_0 = 180^0$$

den Wert n bestimmt. Gemäss der Formel nimmt die Geschwindigkeit bis zu einem gewissen Grade zu und dann bis zum Centrum wieder ab.

Der entsprechende Ablenkungswinkel ergiebt sich aus

$$58)\quad \operatorname{tg}\psi = \frac{\operatorname{tg}\frac{1}{2}nr^{\frac{k}{na}}}{\sin r \sin nr}\left(C - \frac{\lambda}{a}\int \frac{\sin r\,dr}{\operatorname{tg}\frac{1}{2}nr^{\frac{k}{na}}}\right), \quad \lambda = 2\omega\sin\varphi$$

Wie wir schon früher nachgewiesen, ist der Ablenkungswinkel im Grenzkreise r_0 durch

$$\operatorname{tg}\psi_a = \frac{2\omega\sin\varphi}{k+na}$$

und im Centrum durch

$$\operatorname{tg}\psi_c = \frac{2\omega\sin\varphi}{k-2na}$$

bestimmt.

Der grösste Wert von ψ^c ist 90^0. Dies tritt ein, wenn

$$k = 2na$$

ist. Damit ist auch a bestimmt, nämlich

$$a = \frac{kr_0}{360}$$

und mit ihm v. Da nun aber λ oder $2\omega\sin\varphi$ eigentlich durch $2\omega(\sin\varphi_0\cos r - \cos\varphi_0\sin r\cos\vartheta)$ ausgedrückt werden müsste, die Integration aber des letzten in Bezug auf ϑ periodischen Gliedes auf Schwierigkeiten stösst, so kann man immerhin als genauern Wert

$$\lambda = 2\omega\sin\varphi_0\cos r$$

setzen, worin φ_0 die geogr. Breite des Cyklonencentrums bedeutet. Die obige Formel wird dann

$$59)\quad \operatorname{tg}\psi = \frac{\operatorname{tg}\frac{1}{2}nr^2}{\sin r\sin nr}\left(C - \frac{2\omega\sin\varphi_0}{a}\int\frac{\sin r\cos r\,dr}{\operatorname{tg}\frac{1}{2}nr^2}\right)$$

und man kann

$$\lambda_0 = 2\omega\sin\varphi_0 \text{ setzen.}$$

Wählt man den ersteren Fall, und führt ein $\frac{1}{2}nr = x$, also

$$r = \frac{2x}{n}$$

und entwickelt das Integral

$$\int\frac{\cos x^2}{\sin x^2}\sin\frac{2}{n}x\,dx$$

in Reihenform, so erhält man nach einer Reihe von Reductionen

$$60)\quad \operatorname{tg}\psi = \frac{4\lambda}{nk}\,\frac{\sin\frac{1}{2}nr}{\sin r}\Bigg[\frac{\log\cot\frac{1}{4}nr-\cos\frac{1}{2}nr}{\cos\frac{1}{2}nr^3}+\frac{n}{6}\sin\frac{180}{n}$$

$$-\tfrac{1}{3}-\frac{\left(\frac{4}{n^2}-1\right)\left(\frac{4}{n^2}-9\right)}{5!}\,\frac{\cos\frac{1}{2}nr^2}{5}$$

$$+\frac{\left(\frac{4}{n^2}-1\right)\left(\frac{4}{n^2}-9\right)\left(\frac{4}{n^2}-25\right)}{7!}\left(\tfrac{3}{5}\cos\tfrac{1}{2}nr^2-\tfrac{1}{7}\cos\tfrac{1}{2}nr^4\right)$$

$$-\frac{\left(\frac{4}{n^2}-1\right)\left(\frac{4}{n^2}-9\right)\left(\frac{4}{n^2}-25\right)\left(\frac{4}{n^4}-36\right)}{9!}$$

$$\times\left(\tfrac{3}{5}\cos\tfrac{1}{2}nr^2-\tfrac{3}{7}\cos\tfrac{1}{2}nr^4+\tfrac{1}{9}\cos\tfrac{1}{2}nr^6\right)\ldots\Bigg]$$

Im Beginn der Bewegung ist $nr_0 = 180^0$. Alle Ausdrücke in der Klammer verschwinden bis auf $\frac{n}{6}\sin\frac{180}{n}$ und $\operatorname{tg}\psi$ wird $= \frac{2}{3}\frac{\lambda}{k}$

Dies stimmt vollständig mit der Formel für $\operatorname{tg}\psi_a$ überein, wenn man darin $na = \frac{1}{2}k$ setzt.

Die obige Formel ist etwas weitläufig. Man kann indessen auch ohne Reihenentwickelung einen geschlossenen Ausdruck für $\operatorname{tg}\psi$ gewinnen, wenn n zahlenmässig gegeben ist, z. B. $n = 12$.

Wählen wir einer bequemeren Integration wegen die zweite Form desselben, so können wir dasselbe in seinem Integral

$$-\frac{\lambda_0}{a}\int\frac{\sin r\cos r\,dr}{\operatorname{tg}\frac{1}{2}nr^2}\ \text{umgestalten in}\ -\frac{\lambda_0}{4a}\int\frac{\sin 2r\,d2r}{\operatorname{tg}6r^2}$$

oder wenn $2r = u$

$$\text{in}\ \frac{\lambda_0}{4a}\int\frac{1-\sin 3u^2}{\sin 3u^2}\,d\cos u.$$

Da aber

$$\sin 3u^2 = (4\cos u^2 - 1)^2(1-\cos u^2)$$

st, so kann man den Ausdruck unter dem Integralzeichen

$$\frac{d\cos u}{\sin 3u^2} - d\cos u$$

durch Einführung von $\cos u = y$ zerlegen in Partialbrüche

$$\frac{1}{(4y^2-1)^2(1-y^2)} = \frac{4/3}{(4y^2-1)^2}+\frac{4/9}{4y^2-1}+\frac{1/9}{1-y^2}$$

und da

$$\int \frac{dy}{(4y^2-1)^2} = -\frac{y}{2(4y^2-1)} + \tfrac{1}{8}\log\frac{2y+1}{2y-1}$$

$$\int \frac{dy}{4y^2-1} = -\tfrac{1}{4}\log\frac{2y+1}{2y-1}, \quad \int \frac{dy}{1-y^2} = \tfrac{1}{2}\log\frac{1+y}{1-y}$$

Vermöge der Relation

$$\frac{2\cos 2r+1}{2\cos 2r-1} = \frac{\operatorname{tg} 3r}{\operatorname{tg} r}$$

erhalten wir schliesslich nach vollständiger Reduction und Bestimmung der Constanten

$$61)\quad \operatorname{tg}\psi = \frac{3\lambda_0}{k}\,\frac{\sin 6r}{\sin r\cos 6r^3}\left(\frac{1}{6}\log\cot r - \frac{1}{18}\log\cot 3r - \cos 2r - \frac{1}{3}\frac{\sin 4r}{\sin 6r} - \frac{1}{6}\log\cot 15^0 + \frac{2}{3}\sqrt{3}\right)$$

und die Gradientbeschleunigung

$$62)\quad G_k = \frac{1}{24}\frac{\varrho}{u}k^2\sin 12r\left(1+\frac{\lambda_0}{k}\cos r\operatorname{tg}\psi - \frac{1}{2}\cos 12r + \frac{1}{24}\sin 12r\cot r\operatorname{tg}\psi^2\right)$$

Es sei

$$\lambda = 0{,}00012, \quad k = 0{,}00006$$

Da $n = 12$, so ist der Grenzkreis der Cyklone 15 Meilen $= 1665\,km$. In der Entfernung von 7,5 Meilen $= 832{,}5\,km$ ist die Geschwindigkeit auf Grund der Formel

$$v = \frac{k}{24}\,\frac{\sin 12r}{\cos\psi} \quad \text{gleich} \quad 40{,}7\,m$$

und der Ablenkungswinkel $\psi = 68^0\,18'$. Hieraus erhält man als Gradientkraft ca. $7\,mm$. Hierbei ist daran zu erinnern, dass die vorausgesetzte Annahme $k = 2na$ der Grenzfall der Geschwindigkeit und des Ablenkungswinkel ist, welcher letztere im Centrum den höchsten Wert 90^0 erreicht, welcher nicht überschritten werden darf. In dieser speciellen Cyklone erreichen die Geschwindigkeiten den höchsten Wert.

Der vorhin benutzte Wert $n = 12$ brachte es mit sich', dass die Cyklone eine bedeutende Ausdehnung erhielt.

Setzen wir dagegen $n = 16$, so ist der Grenzradius durch den kleineren Wert

$$r_0 = 180/16 = 11^1/_4 = 1249\,km \quad \text{bestimmt.}$$

Die Gleichung für ψ ist dann

$$\operatorname{tg}\psi = \frac{\sin 8r}{2\sin r\cos 8r^3}\left(C - \frac{\lambda}{4a}\int\frac{\sin 2r\, d\,2r}{\operatorname{tg} 8r^2}\right)$$

Es ist aber

$$\int\frac{\sin 2r}{\operatorname{tg} 8r^2}\, d\,2r = -\int\left(\frac{1}{\sin 8r^2} - 1\right) d\cos 2r$$

Führen wir ein $\cos 2r = y$, so hat man

$$\int\frac{d\cos 2r}{\sin 8r^2} = \frac{1}{16}\int\frac{dy}{(2y^2-1)^2(1-y^2)y^2}$$

$$\frac{1}{(2y^2-1)^2(1-y^2)y^2} = \frac{4}{(2y^2-1)^2} + \frac{1}{1-y^2} + \frac{1}{y^2}$$

also

$$\int\frac{d\cos 2r}{\sin 8r^2} = -\frac{1}{8(2y^2-1)} + \frac{1}{16\sqrt{2}}\log\frac{\sqrt{2}y+1}{\sqrt{2}y-1}$$
$$+\frac{1}{32}\log\frac{1+y}{1-y} - \frac{1}{16y}$$

Demnach

$$63)\quad \operatorname{tg}\psi = \frac{4\lambda}{k}\,\frac{\sin 8r}{\sin r\cos 8r^3}\Big[C + \frac{1}{16\sqrt{2}}\log\cot\left(\frac{45}{2}+r\right)\cot\left(\frac{45}{2}-r\right)$$
$$+\frac{1}{16}\log\cot r - \cos 2r - \frac{\cos 2r}{8\cos 4r}$$
$$-\frac{1}{16\cos 2r}\Big]$$

C wird so bestimmt, dass der Wert in der Klammer für $r = \frac{180}{16}$ verschwindet. ψ ist an dieser Grenze nicht $=$ null, vielmehr folgt sein Grenzwert aus

$$\operatorname{tg}\psi_a = \frac{2\omega\sin\varphi}{k+na}, \quad na = \tfrac{1}{2}k$$

Die Gradientkraft ist

$$64)\quad G = \frac{1}{32}\frac{\varrho}{u}k^2\sin 16r\left(1 + \frac{\lambda_0}{k}\cos r\operatorname{tg}\psi - \tfrac{1}{2}\cos 16r\right.$$
$$\left.+\frac{1}{32}\sin 16r\cot r\operatorname{tg}\psi^2\right)$$

Nehmen wir andererseits $\frac{k}{na} > 2$ an, so ist der Ablenkungswinkel im Centrum $< 90^0$. Es sei z. B.

$$\frac{k}{na} = 3$$

Dann wird der betreffende Wert zu Ende der Bewegung

65) $\operatorname{tg} \psi_e = \frac{2\omega \sin \varphi}{k - 2an} = 3 \frac{\lambda_0}{k}$

nnd im Beginn derselben

66) $\operatorname{tg} \psi_a = \frac{2\omega \sin \varphi}{k + an} = \frac{3}{4} \frac{\lambda_0}{k}$

Allgemein ist

67) $\operatorname{tg} \psi = \frac{\operatorname{tg} \frac{1}{2} nr^3}{\sin r \sin nr} \left(C - \frac{\lambda_0}{a} \int \frac{\sin r \cos r dr}{\operatorname{tg} \frac{1}{2} nr^3} \right)$

Ist $n = 12$, also $r_0 = 15$ Meilen, so kann man das Integral wie folgt schreiben, wenn $2r = u$,

$$- \frac{\lambda_0}{4a} \int \sin 2r \cot 6r^3 d2r = - \tfrac{1}{3} \sin u (\tfrac{1}{3} \cot 3u^2 + \log \sin 3u)$$
$$+ \tfrac{1}{3} \int \cos u (\tfrac{1}{3} \cot 3u^2 + \log \sin 3u) du$$

Es ist aber

$$\int \log \sin 3u \cos u \, du = \log \sin 3u \sin u - 3 \int \cot 3u \sin u \, du$$

$$\int \cot 3u \sin u \, du = \sin u - \frac{1}{2\sqrt{3}} \log \frac{\sqrt{3} + 2 \sin u}{\sqrt{3} - 2 \sin u}$$

$$\int \cos u \cot 3u^2 du = - \frac{\cos u}{3} (\cot 3u + 3u) - \tfrac{1}{3} \int \sin u (\cot 3u + 3u) du$$

$$\int u \sin u \, du = \sin u - u \cos u$$

nnd combinirt unter Beachtung, dass

$$\frac{\sqrt{3} + 2 \sin 2r}{\sqrt{3} - 2 \sin 2r} = \frac{\operatorname{tg}(30^0 + r)}{\operatorname{tg}(30^0 - r)}$$

ist, und nach Bestimmung der Constanten

68) $\operatorname{tg} \psi = \frac{9 \lambda_0 \sin 6r^2}{2k \sin r \cos 6r^4} \Big[\frac{19}{16\sqrt{3}} \log \cot(30^0 + r) - \frac{19}{36\sqrt{3}} \log \cot(30^0 - r)$

$$+ \frac{19}{36\sqrt{3}} \log \cot 15^0 + \frac{1}{18} \cos 2r \cot 6r$$
$$+ \frac{1}{6} \sin 2r \cot 6r^2 + \frac{11}{9} \sin 2r - \frac{11}{18} \Big]$$

$$G = \frac{1}{36}\frac{\varrho}{u} k^2 \sin 12r \left(1 + \frac{\lambda_0}{k}\cos r \operatorname{tg}\psi - \tfrac{1}{3}\cos 12r + \frac{1}{36}\sin 12r \cot r \operatorname{tg}\psi^2\right)$$

$$v = \frac{k}{36}\frac{\sin 12r}{\cos\psi}$$

Ist dagegen wieder die Ausdehnung der Cyklone eine kleinere, nämlich $= 11^1/_4$ Meilen für $n = 16$, und wie oben $k = 3na$, so ist

$$69)\quad \operatorname{tg}\psi = \frac{6\lambda_0 \sin 8r^2}{k \sin r \cos 8r^4}\Big[C + \tfrac{1}{8}\sin 2r \cot 8r^2 + \frac{1}{32}\cos 2r \cot 8r + \frac{37}{32}\sin 2r - \frac{33}{256}\log\frac{\operatorname{tg}(45^0+r)}{\operatorname{tg}(45^0-r)} - \frac{33}{128\sqrt{2}}\log\frac{\operatorname{tg}(22^1/_2{}^0+r)}{\operatorname{tg}(22^1/_2{}^0-r)}\Big]$$

$$G = \frac{1}{48}\frac{\varrho}{u} k^2 \sin 16r \left(1 + \frac{\lambda_0}{k}\cos r \operatorname{tg}\psi - \tfrac{1}{3}\cos 16r + \frac{1}{48}\sin 16r \cot r \operatorname{tg}\psi^2\right)$$

$$v = \frac{k}{48}\frac{\sin 16r}{\cos\psi}$$

Allgemein ist, wenn n unbestimmt gelassen,

$$70)\quad \operatorname{tg}\psi = \frac{3n\lambda_0}{8k}\frac{\sin\frac{1}{2}nr^2}{\sin r \cos\frac{1}{2}nr^4}\Big[C + \frac{2}{n}\cot\tfrac{1}{2}nr^2 \sin 2r + \frac{8}{n^2}\cot\tfrac{1}{2}nr \cos 2r + \frac{2}{n}\sin 2r + \left(1 + \frac{8}{n^2}\right) \times \int \cot\tfrac{1}{2}nr \sin 2r\, d\,2r\Big]$$

Wenn z. B. $n = 20$ und also die Cyklone ein Gebiet von $1000\,km$ hat, so ist

$$\operatorname{tg}\psi = \frac{15}{2}\frac{\lambda_0}{k}\frac{\sin 10r^2}{\sin r \cos 10r^4}\Big[C + \frac{1}{10}\cot 10r^2 \sin 2r + \frac{1}{50}\cot 10r \cos 2r + \frac{1}{10}\sin 2r + \frac{51}{50}\int \cot 10r \sin 2r\, d\,2r\Big]$$

Man findet nun leicht

$$\int \cot 5u \sin u\, du = \int \frac{1-12\sin u^2+16\sin u^4}{5-20\sin u^2+16\sin u^4}\, d\sin u$$

$$= \sin u - \tfrac{1}{5}\sin 72^0 \log \frac{\sin 72^0+\sin 2r}{\sin 72^0-\sin 2r} - \tfrac{1}{5}\sin 36^0 \log \frac{\sin 36^0+\sin 2r}{\sin 36^0-\sin 2r}\ .$$

nnd damit anch ψ.

VII.

Sieht man die Wetterkarten mit ihren vielgestaltigen Cyklonen durch, so erkennt man, dass nur in seltenen Fällen die Isobaren Kreise sind. Weit häufiger tritt eine elliptische Form derselben auf, nnd selbst paraholische oder ähnliche mit nach Norden gerichteter Oeffnung sind nicht selten. Diese Unterschiede sind zum Teil in der allgemeinen atmosphärischen Luftcirculation mit ihren nach Norden hin abnehmenden Gradienten begründet. Zuweilen scheint es sich zu ereignen, dass die Luftströmung in den innern Gebieten fast genau den Isobaren folgen. Wenn diese nun elliptisch geformt sind, so kann man, wenn die Strömung in der Ellipsenbahn selbst erfolgt, nach der Kraft fragen, welche die Strömungen diese zu verfolgen zwingt. Allerdings wird im allgemeinen die cyklonische Bewegung in der logarithmischen Curve einhergehen. Gleichwol wollen wir den Versuch unternehmen, die Berechnung einer ellipischen wenigstens versuchsweise einzuleiten.

Dabei nehmen wir an, dass das Centrum der Bewegung ein Brennpunkt der sphärischen Curve sei, und setzen fest, dass ihre Gleichung

71) $\sin r = \dfrac{A}{1-e\cos\Theta}$, $\quad \sin r_1 = \dfrac{A}{1-e\cos\Theta_1}$ sei.

Wir bezeichnen mit rr_1 die Radienvectoren von den beiden Brennpunkten, deren Entfernung $2c$ sei, und berechnen die durch sie gebildeten Winkel. Hiernach ist

$$\sin r \sin\Theta = \sin r_1 \sin\Theta_1 \quad \text{also}$$

$$\frac{1-e\cos\Theta}{1-e\cos\Theta_1} = \frac{\sin\Theta}{\sin\Theta_1}$$

Wendet man auf das Dreieck $2crr_1$, welches natürlich durch grösste Kreise gebildet ist, eine Gauss'sche Formel an, so folgt

$$e = \frac{\operatorname{tg} c}{\operatorname{tg}\frac{1}{2}(r+r_1)}$$

Wir setzen in Analogie mit der ebenen Ellipse

$$r + r_1 = 2a$$

so folgt

72) $e = \frac{\operatorname{tg} c}{\operatorname{tg} a}$

welche für die zur Ebene deformirte Kugel in

$$e = \frac{c}{a} \text{ übergeht.}$$

Man hat ferner noch

73) $e = \frac{\cos \frac{\Theta + \Theta_1}{2}}{\cos \frac{\Theta - \Theta_1}{2}}$

Da nun

$$\cos r' = \cos r \cos 2c + \sin r \sin 2c \cos \Theta$$

ist, und $r_1 = 2a - r$, so folgt nach Elimination von Θ

$$A = \frac{(\sin a^2 - \sin c^2)}{\sin a \cos c^2} \cos (a - r)$$

also

$$\sin r = \frac{\sin a^2 - \sin c^2}{\sin a \cos c^2} \cdot \frac{\cos (a - r)}{1 - e \cos \Theta}$$

und endlich als Curvengleichung der sphärischen Ellipse

74) $\operatorname{tg} r = \frac{\sin a \cos a (1 - e^2)}{\cos a^2 / \cos c^2 - e \cos \Theta}$

oder auch

75) $\operatorname{tg} r = \frac{\sin (a + c) \sin (a - c)}{\sin a \cos a - \sin c \cos c \cos \Theta}$

In der ebenen Ellipse schliesst die Normale mit den Radienvectoren gleiche Winkel γ ein. Ob dies in der sphärischen Curve zutrifft, wollen wir sehen.

Wir bezeichnen mit σ den Winkel zwischen dem Vector r und der sphärischen Tangente, dann ist

$$\operatorname{tg} \sigma = - \sin r \frac{d\Theta}{dr}$$

Aus

$$\operatorname{tg} r \left(\frac{\cos a^2}{\cos c^2} - e \cos \Theta \right) = \sin a \cos a (1 - e^2) = B$$

folgt aber

$$e \operatorname{tg} r \sin \Theta d\Theta + \frac{B \cot r}{\cos r^2} dr = 0$$

d. i.

$$e \sin r^2 \sin \Theta \frac{d\Theta}{dr} = B$$

also

$$\operatorname{tg} \sigma = \frac{\sin a \cos a (1 - e^2)}{e \sin r \sin \Theta}$$

oder für das Complement $\gamma = 90^0 - \sigma$

$$\operatorname{tg} \gamma = \frac{e \sin r \sin \Theta}{\sin a \cos a (1 - e^2)}$$

und ebenso

$$\operatorname{tg} \gamma_1 = \frac{e \sin r_1 \sin \Theta_1}{\sin a \cos a (1 - e^2)}$$

und demnach

76) $\gamma = \gamma_1$

Bezeichnen wir wieder den Ablenkungswinkel mit ψ, so ist

77) $2\gamma = 2\psi - 180^0, \quad \gamma = \psi - 90^0$

und demnach

$$\sin \Theta \sin 2c + \sin 2\psi \sin r' = 0$$

Wird diese Gleichung differentiirt, so folgt

$$\sin 2c \cos \Theta \frac{d\Theta}{dt} + 2 \sin r' \cos 2\psi \, \psi' + \sin 2\psi \cos r' \, . \, v \cos \psi = 0$$

da

$$\frac{dr_1}{dt} = - \frac{dr}{dt} = + v \cos \psi$$

ist. Da nun aus dem Obigen $\frac{d\Theta}{dt}$ bekannt ist, so folgt

$$\frac{2 \sin r' \cos 2\psi}{v \cos \psi} \frac{d\psi}{dt} + \cos r' \sin 2\psi + 2 \cos \Theta \frac{(\cos c^2 \sin a^2 - \sin c^2 \cos a^2)}{\sin r^2 \sin \Theta}$$

Drückt man hierin $\cos \Theta$, $\sin \Theta$ etc. durch r und r_1 aus und benutzt

$$\cos 2c \sin r = \cos \Theta \cos r \sin 2c - \sin r' \cos 2\psi$$
$$\sin \Theta \cot 2\psi = \cot 2c \sin r - \cos r \cos \Theta$$

so erhält man schliesslich

$$\frac{d\psi}{dt} = \frac{v \sin(r' - r) \sin \psi}{2 \sin r \sin r'}$$

Da nun die Gradientgleichung

$$F \sin\psi = \lambda v + \frac{v^2}{\operatorname{tg} r} \sin\psi - v \frac{d\psi}{dt}$$

bekannt ist, so resultirt nach Einsetzen von ψ' als Endresultat

78) $$F = \frac{\lambda v}{\sin\psi} + v^2 \frac{\sin a \cos a}{\sin r \sin r'}$$

so dass vermöge der Gleichung

79) $$\frac{\sin\psi}{\operatorname{tg} r} - \frac{\psi'}{v} = \frac{1}{\operatorname{tg} \varrho}$$

der Krümmungshalbmesser der sphärischen Ellipse durch

80) $$\operatorname{tg} \varrho = \frac{\sin r \sin r'}{\sin a \cos a \sin\psi}$$

definirt ist.

Beim Uebergang der Kugelfläche in eine Ebene ist

81) $$\varrho = \frac{rr'}{a \cos\gamma} = \frac{b^2}{a \cos\gamma^3} = \frac{N^3}{p^2}$$ wie bekannt.

Hinsichtlich der Geschwindigkeit der Luftmassen in den elliptischen Bahnen wollen wir annehmen, dass dieselbe sich umgekehrt wie der Sinus der Normale auf die Tangente verhalte. Dann ist

$$v = \frac{c}{\sin r \sin\psi}$$

und die Gradientkraft der elliptischen Bewegung

81) $$F_e = \frac{c}{\sin\psi^2}\left(\frac{\lambda}{\sin r} + \frac{c \sin a \cos a}{\sin r^3 \sin r_1}\right)$$

Lassen wir die Ellipse in einen Kreis übergehen, so wird

$$r = r_1 = a \quad \text{und} \quad \psi = 90^0$$

und es ist dann

$$F_k = \frac{\lambda c}{\sin r} + \frac{c^2}{\sin r^2 \operatorname{tg} r}, \quad \lambda = 2\omega \sin\varphi \quad \text{vergl. a. a. O. Gl. 38)}$$

als Gradientkraft der Bewegung im Kreise. In der logarithmischen Spirale ist bekanntlich $\psi = \text{const.}$, also $\psi' = 0$, und die obige Formel 79) für den Krümmungshalbmesser wird für diese Curve sehr einfach

$$\operatorname{tg} \varrho = \frac{\operatorname{tg} r}{\sin\psi}$$

VIII.

Wir nehmen an, dass an irgend einer Stelle der Erdoberfläche durch Sonnenstrahlung eine aufsteigende Bewegung der Luftmassen eingeleitet sei, und fragen nach der Grösse der Ablenkung dieses aufsteigenden Stromes in Folge der Erdrotation. Durch den unteren Punkt legen wir ein Axensystem, dessen X, Y, Z-Achse bezüglich nach Osten, Norden und oben gerichtet sind, und beziehen die aufsteigende Bewegung auf dieses System.

Die allgemeinen Formeln für dieses sind

82)
$$\frac{d^2x}{dt^2} = 2\omega\sin\varphi\,\frac{dy}{dt} - 2\omega\cos\varphi\,\frac{dz}{dt}$$
$$\frac{d^2y}{dt^2} = -2\omega\sin\varphi\,\frac{dx}{dt},\quad \frac{d^2z}{dt^2} = -g + 2\omega\cos\varphi\,\frac{dx}{dt}$$

und beziehen sich auf die Bewegung eines schweren Punktes.

Wir machen hier indes die einfache Annahme, dass die Bewegung unabhängig von der Schwerkraft sei und gleichförmig in vertikaler Richtung erfolge, etwa wie bei einem Luftballon. Dann folgt aus

$$z'' = 2\omega\cos\varphi x'$$

die Beziehung

$$z' = c + 2\omega\cos\varphi x$$

und analog aus

$$x'' = 2\omega\sin\varphi y' - 2\omega c\cos\varphi$$
$$x' = 2\omega\sin\varphi y - 2\omega c\cos\varphi t$$

und aus

$$y'' = -2\omega\sin\varphi x'$$
$$y' = -2\omega\sin\varphi x$$

demnach ist

83)
$$x = -\omega c\cos\varphi t^2$$
$$y = +\tfrac{2}{3}\omega^2 c\sin\varphi\cos\varphi t^3$$

Der erste dieser Ausdrücke zeigt nun, dass die Ablenkung der gleichförmig aufsteigenden Luftmassen eine westliche ist, dass dieselbe im Aequator ihr Maximum erreicht und an den Polen null ist. Die durch die Rotation der Erde modificirte aufsteigende gleichförmige Bewegung erhält also eine Tendenz nach Westen bzhw. nach links, eine Tendenz, deren Analogon wir bei der cyklonischen Bewegung in der ablenkenden Kraft der Erdrotation wiederfinden, welch letztere die auf der Oberfläche bewegten Körper auf der nördlichen Halbkugel nach rechts ablenkt.

Wir wollen die Grösse der Ablenkung berechnen. Am Aequator

steige ein Luftquantum mit der constanten Geschwindigkeit $c = 4m$ zu einer Höhe von $4000m$. Dann ist seine westliche Ableitung in dieser Höhe

$$x = -4 \,.\, 0{,}0000729 \,.\, 1000^2 = -291{,}6m$$

Bemerkt möge werden, dass ausser dieser Ablenkung noch eine kleine polare Componente

$$y = \tfrac{2}{3} c\,\omega^2 \sin\varphi \cos\varphi t^3$$

auftritt.

Es ist Grund zur Annahme, dass im Inneren einer Cyklone ein aufsteigender Luftstrom vorhanden ist, welcher oben abfliesst und zur Bildung von Luftdruckmaximis Veranlassung giebt. Wenden wir auf diesen Erfahrungssatz die obige Theorie an, so zeigt letztere, dass der aufsteigende Strom einer stationären Cyklone eine schräge Lage erhalten wird, und zwar wird diese Abweichung von der Verticalen um so stärker nach links hin verschoben sein, je bedeutender die Geschwindigkeit der centralen Luftmassen ist. Ist die Cyklone fortschreitend und also ihr Fuss in Bewegung, so wird diese Abweichung wahrscheinlich am grössten sein, wenn das Centrum nach Osten wandert. Selbstverständlich werden noch andere Gründe massgebend sein, welche die schräge Lage der Achse der Cyklone bedingen, aber der soeben aus mechanischen Principien abgeleitete ist jedenfalls ein mit zu berücksichtigender.

IX.

Bisher haben wir auf die translatorische Bewegung der cyklonischen Bewegung keine Rücksicht genommen, um die Gleichungen in einfachst möglicher Form zu erhalten. Stationäre Cyklonen dürfen indessen nur selten vorkommen; die praktische Meteorologie weist vielmehr nach, dass die Ortsveränderung der Depressionen je nach den localen Umständen mehr oder weniger schnell erfolgt. Eine einigermassen vollständige Analyse der cyklonalen Bewegungen hat auf dieselben um so mehr Rücksicht zu nehmen, als durch die vereinte Wirkung der Rotation und Translation Resultanten entstehen, deren Wirkung tatsächlich in sehr ausgeprägter Weise in der Natur zu Tage tritt.

Man kann nun fragen, in welcher Curve oder Zugstrasse die Wanderung des Cyklonencentrums vor sich gehen soll. Wir werden annehmen, dass dies in einem Kreise geschieht, welchen der Mittelpunkt der Cyklone mit gleichförmiger Geschwindigkeit beschreibt. Diese Annahme dürfte sich im Hinblick auf die durch die Beobachtung

annähernd genau ermittelten Tatsachen hinlänglich empfehlen, da sie auch die Rechnung wesentlich vereinfacht und gleichwol die Eigentümlichkeit der cyklonischen Bewegung hervortreten lässt.

Der leichteren Orientirung wegen haben wir die geometrischen Verhältnisse in einer Figur hinlänglich verständlich skizzirt.

C_1 bezeichne das Centrum der Cyklone, welche ausser ihrer eigenen Spiralbewegung noch die zweite hat, welche sie auf einem Kreise vom Radius ϱ links drehend um das feste Centrum C mit der Winkelgeschwindigkeit nt herumführt. C habe die geographische Breite φ_0, die entsprechende Breite und Länge von C_1 sei φ_1 bzhw. L, vom Meridian durch C gemessen. Das sphärische Dreieck zwischen Pol, dem festen Kreis- und dem beweglichen Cyklonencentrum, PCC_1 hat also die Seiten $90^0-\varphi_0$, $90^0-\varphi_1$, ϱ, und die Winkel u, 180^0-nt, L. Ferner sei A ein beliebiger Punkt der Cyklone und die Seiten des Dreiecks PC_1A seien bezeichnet durch $90^0-\varphi_1$, $90^0-\varphi$, r und die Winkel $\varepsilon+\psi-90^0$, $180^0-\vartheta-u$, $l=\lambda-L$. Hierin bedeutet ε den Winkel zwischen der Richtung der cyklonischen Luftmassen in A und dem durch ihn hindurchgehenden Parallelkreis, und u den Winkel zwischen $90^0-\varphi_1$ und ϱ.

Wir werden uns nun der Formeln der sphärischen Astronomie bedienen, wie sie nebst den hier besonders wichtigen Relationen der sphärischen Dreiecke in Brünnows Lehrbuch S. 14 zu finden sind.

Für ein sphärisches Dreieck ABC werden wir also benutzen:

$$da = \cos C\,db + \cos B\,dc + \sin b \sin C\,dA$$

84) $\cot a\,da + \cot B\,dB = \cot b\,db + \cot A\,dA$

$$\sin a\,dB = \sin C\,db - \sin B \cos a\,dc - \sin b \cos C\,dA$$

$$dA = -\cos c\,dB - \cos b\,dC + \sin b \sin C\,da$$

Ist abc bezüglich r, $90^0-\varphi$, $90^0-\varphi_1$, so hat man zunächst

$$\frac{dr}{dt} = -\cos A\frac{d\varphi}{dt} + \cos(\vartheta+u)\frac{d\varphi_1}{dt} + \cos\varphi\sin A\left(\frac{d\lambda}{dt}-\frac{dL}{dt}\right)$$

Um $\frac{d\varphi_1}{dt} = \varphi_1'$ zu finden, benutzen wir die Relatien

$$\sin\varphi_1 = \sin\varphi_0\cos\varrho - \cos\varphi_0\sin\varrho\cos nt$$

woraus

$$\cos\varphi_1\frac{d\varphi_1}{dt} = n\cos\varphi_0\sin\varrho\sin nt$$

oder

$$\frac{d\varphi_1}{dt} = n\cos\varphi_0 \sin L \quad \text{folgt.}$$

Um L' zu berechnen, benutzen wir

$$\cos\varrho = \sin\varphi_0 \sin\varphi_1 + \cos\varphi_0 \cos\varphi_1 \cos L$$

woraus

$$0 = n\sin\varphi_0 \cos\varphi_1 \cos\varphi_0 \sin L - \cos\varphi_0 \cos\varphi_1 \sin L L'$$
$$- n\cos{\varphi_0}^2 \sin\varphi_1 \cos L \sin L$$

also

$$\frac{dL}{dt} = \frac{n}{\cos\varphi_1}(\sin\varphi_0 \cos\varphi_1 - \cos\varphi_0 \sin\varphi_1 \cos L)$$

oder

$$\frac{dL}{dt} = n\,\frac{\sin\varrho\cos u}{\cos\varphi_1} \quad \text{folgt.}$$

Da nun aber

$$\varphi' = v\sin\varepsilon, \quad \lambda'\cos\varphi = v\cos\varepsilon,$$

so folgt nach Einsetzen all dieser Ausdrücke in r'

$$\frac{dr}{dt} = -v\cos\psi + n\left(\cos(\vartheta + u)\sin\varrho\sin u - \frac{\cos\varphi}{\cos\varphi_1}\sin A \sin\varphi\cos u\right)$$

d. i.

$$\frac{dr}{dt} = -v\cos\psi - n\sin\varrho\sin\vartheta$$

oder wenn wir den Winkel zwischen der Zugrichtung der Cyklone und dem Vector r mit γ bezeichnen,

$$\frac{dr}{dt} = -v\cos\psi - n\sin\varrho\cos\gamma$$

$n\sin r$ ist die Geschwindigkeit c des Centrums auf dem Kreise, also endlich

$$\frac{dr}{dt} = -v\cos\psi - c\cos\gamma$$

Wir ziehen jetzt die 3te der obigen Differentialgleichungen heran und erhalten

$$-\sin r\left(\frac{d\vartheta}{dt} + \frac{du}{dt}\right) = -\sin A\,\frac{d\varphi}{dt} + \sin(\vartheta + u)\cos r\,\frac{d\varphi_1}{dt}$$
$$- \cos\varphi\cos A\left(\frac{d\lambda}{dt} - \frac{dL}{dt}\right)$$

Um u' zu finden, benutzen wir

$$\sin\varphi\sin u = \sin L\cos\varphi_0$$

woraus

also
$$\sin\varrho\cos uu' = \cos\varphi_0\cos LL'$$
$$u' = \frac{n\cos\varphi_0\cos L}{\cos\varphi_1}$$

Wir haben also nach Substitntion von u', $\varphi'\varphi_1'$ λ', L' in die obige Gleichnng

$$-\sin r\frac{d\vartheta}{dt} - n\frac{\cos\varphi_0}{\cos\varphi_1}\cos L\sin r$$
$$= -v\sin A\sin\varepsilon + n\sin(\vartheta+u)\cos r\cos\varphi_0\sin L$$
$$-v\cos A\cos\varepsilon + n\frac{\cos\varphi}{\cos\varphi_1}\cos A\sin\varrho\cos u$$

Es ist aber
$$\frac{\cos\varphi_0\cos L}{\cos\varphi_1} = \cos\varrho - \sin\varrho\frac{\sin\varphi_1}{\cos\varphi_1}\cos u$$

Nach mehreren Transformationen erhalten wir dann
$$\sin r\frac{d\vartheta}{dt} = v\sin\psi - n(\sin r\cos\varrho + \cos r\sin\varrho\sin\gamma)$$
oder
$$\sin r\frac{d\vartheta}{dt} = v\sin\psi - \frac{c\sin r}{\operatorname{tg}\varrho} - c\cos r\sin\gamma$$
$$\frac{dr}{dt} = -v\cos\psi - c\cos\gamma$$

Die Geschwindigkeit in der Cyklone folgt nun aus der Formel
$$V^2 = \sin r^2\vartheta'^2 + r'^2$$
oder nach Einsetzen der obigen Werte für r' nnd ϑ'

84) $$V^2 = (v\cos\psi + c\cos\gamma)^2 + \left(v\sin\psi - c\cos r\sin\gamma - \frac{c\sin r}{\operatorname{tg}\varrho}\right)^2$$

Man kann diese Formel noch anders ausdrücken, wenn man das Dreieck ACC_1 einführt. Schliesst der Bogen $AC = R$ mit $AC_1 = r$ den Winkel β ein, so ist
$$\frac{dr}{dt} = -v\cos\psi - n\sin R\sin\beta$$
$$\sin r\frac{d\vartheta}{dt} = v\sin\psi - n\sin R\cos\beta$$
und also

85) $$V^2 = v^2 + n^2\sin R^2 + 2nv\sin R\sin(\beta - \psi)$$

Ist die Fortpflanzungsgeschwindigkeit c des Cyklonencentrums $= 0$, so ist $V = 0$.

Beschreibt das Centrum der Cyklone einen grössten Kreis, so wird $\varrho = 90^0$ und die Geschwindigkeit folgt aus

86) $$V^2 = (v\cos\psi + c\cos\gamma)^2 + (v\sin\psi - c\sin\gamma)^2 \quad \text{oder}$$
$$V^2 = v^2 + c^2 + 2cv\cos(\psi + \gamma)$$

Die resultirende Geschwindigkeit der rotatorischen und translatorischen Bewegung hängt also ausser von dieser ganz besonders von dem Winkel γ zwischen der Zugrichtung und dem Radiusvector ab.

Ziehen wir eine Linie durch das Cyklonencentrum senkrecht zur Zugrichtung, und beachten, dass der Winkel γ rechts von der Zugstrasse einen positiven, links davon einen negativen Wert hat, so ist für diejenigen Punkte, in welche die genannte Linie die Cyklone rechts schneidet, wegen $\gamma = +90^0$

87) $V_r^2 = v^2 + c^2 - 2cv\sin\psi$

und wo jene Linie sie links schneidet

88) $V_l^2 = v^2 + c^2 + 2cv\sin\psi$

Hieraus folgt unmittelbar, dass die Geschwindigkeit der Cyklone an der linken Seite der Bahn grösser ist, als in der rechten, was mit der Erfahrung übereinstimmt.

Und da an der Vorderseite der vorwärts schreitenden Cyklone $\gamma = 0$ und an der Hinterseite $\gamma = 180^0$ ist, so ist die Geschwindigkeit der Cyklone an der Vorderseite

89) $V_v^2 = v^2 + c^2 + 2cv\cos\psi$

und an der Hinterseite

90) $V_h^2 = v^2 + c^2 - 2cv\cos\psi$

Die Geschwindigkeit der Cyklone ist also an der Vorderseite grösser als an der Hinterseite, was ebenfalls ein Erfahrungsresultat ist.

Hat etwa die Cyklone die Bewegung nach Osten, so ist das Maximum der Geschwindigkeit im Nordostquadranten, das Minimum im Südwestquadranten.

Hat ferner im Südwestquadranten, oder allgemeiner im Quadranten an der hintern rechten Seite eine Luftmasse für einen Augen-

blick die Richtung des Centrums, so ist $\gamma + \psi = 180^0$ und die Geschwindigkeit ist

91) $V = v - c$ oder $c - v$

welche eventuell null oder gar negativ werden kann.

Hiernach kann es vorkommen, dass bei gleichen Geschwindigkeiten des fortschreitenden Centrums und der cyklonischen Luftmasse im hintern Quadranten letztere nur die Cyklone begleitet, ohne mechanische Wirkungen zu äussern. In diesem Quadranten würde also auch am ehesten ein Erlöschen des Windes oder eine Auflösung der Cyklone stattfinden, da wenigstens hier die Bedingung der Fortdauer der Cyklone nicht mehr vollständig erfüllt ist. Die Ortsveränderung schliesst also eine reine circulare Gestaltung, wie wir sie bei den stationären vorausgesetzt, aus. Der wirksamste Teil der Cyklone befindet sich links vorn, denn in diesem Quadranten ist, wenn ein Teil des Wirbels die entgegengesetzte Geschwindigkeit des Cyklonencentrums hat, $\gamma + \psi = 0$, also

92) $V = v + c$

und die Geschwindigkeit ist dann ein Maximum,

Diese Verhältnisse setzen voraus, dass die Bahn der Cyklone ein grösster Kreis ist.

Ist dies nicht der Fall, so hat man noch auf die Componente

$$\frac{c \sin r}{\operatorname{tg} \varrho}$$

Rücksicht zu nehmen, welche den Einfluss zeigt, den eine mehr oder weniger gekrümmte Kreisbahn des Cyklonencentrums auf deren Geschwindigkeit ausübt.

Diese Beziehungen lassen sich auch aus einem andern Gesichtspunkt betrachten, wenn wir die 4. Differentialformel zu Grunde legen. Wir können indessen auch die Betrachtungen an die beiden sphärischen Dreiecke PBC_1 und PC_1A anknüpfen, indem wir den Cosinussatz heranziehen.

Man hat

$$\sin \varphi_0 \cos \varrho - \cos \varphi_0 \sin \varrho \cos nt = \sin \varphi \cos r + \cos \varphi \sin r \sin (\varepsilon + \psi)$$

und differentiirt

$$n \cos\varphi_0 \sin\varrho \sin nt = -\sin\varphi \cos r\, r' + \cos\varphi \cos r\, \varphi'$$
$$+ \cos\varphi \sin r \cos(\varepsilon+\psi)(\varepsilon'+\psi') + \cos\varphi \cos r \sin(\varepsilon+\psi)\, r'$$
$$- \sin\varphi \sin r \sin(\varepsilon+\psi)\varphi'$$

Hierin vereinigen wir rechter Hand die zu ψ und r' gehörenden Ausdrücke, und erhalten nach Einsetzen der sphärischen Werte

$$n \cos\varphi_0 \sin\varrho \sin nt = \cos\varphi_1 \cos(\vartheta+u) r' + \cos\varphi_1 \cos l\, \varphi'$$
$$- \cos\varphi \cos\varphi_1 \sin l(\varepsilon'+\psi')$$

Da nun

$$\cos\varphi_0 \sin nt = \sin\varphi_1 \sin u \quad \text{und} \quad \gamma+\vartheta = 90^0$$

so folgt

$$n \sin\varrho \sin u = -(v \cos\psi + n \sin\varrho \cos\gamma)\cos(\vartheta+u) + v \sin\varepsilon \cos l$$
$$- \cos\varphi \sin l(\varepsilon'+\psi')$$

also

$$\cos\varphi \sin l(\varepsilon'+\psi') = v(\cos l \sin\varepsilon - \cos(\vartheta+u)\cos\psi)$$
$$- n(\sin\varrho \sin u + \cos(\vartheta+u)\sin\varrho \cos\gamma)$$

Hierzu addiren wir beiderseits

$$v \sin\varphi \cos\varepsilon \sin l$$

und beachten, dass

$$\varepsilon = 90^0 - (\psi - A) \quad \text{ist.}$$

Nach Einführung dieser Beziehungen folgt unter Berücksichtigung von

$$\cos l \sin A + \sin l \cos A \sin\varphi = \sin(\vartheta+u)\cos r$$
$$\sin u + \cos(\vartheta+u)\cos\gamma = \sin\vartheta \sin\gamma$$
$$\sin r \sin\vartheta = \cos\varphi \sin l$$

das Resultat:

$$93) \quad \varepsilon'+\psi' = \frac{v \sin\psi}{\operatorname{tg} r} - v \operatorname{tg}\varphi \cos\varepsilon - \frac{n \sin\varrho \sin\gamma}{\sin r}$$

Es ist aber $\varepsilon+\psi$ der Winkel zwischen dem Radiusvector r der Cyklone und dem Parallelkreis, $\varepsilon'+\psi'$ ist also die Drehungsgeschwindigkeit dieses Winkels, dessen Aenderung, soweit sie von der fortschreitenden Cyklone hervorgebracht wird, durch

$$-\frac{n \sin\varrho \sin\gamma}{\sin r}$$

bestimmt ist.

Demnach äussert die fortschreitende Bewegung der Cyklone in Bezug auf die Drehungsgeschwindigkeit der Luftmassen sich in folgender Weise:

Die Drehungsgeschwindigkeit wird um so bedeutender beeinflusst, je grösser die Fortpflanzungsgeschwindigkeit $c = n \sin r$ der Cyklone ist,

Da γ positiv ist an der rechten, und negativ an der linken Seite der Cyklone, so ist die Drehungsgeschwindigkeit eines fortschreitenden Wirbels an seiner rechten Seite kleiner als an seiner linken,

An seiner Vorder- und Rückseite ist sie null.

Bei grossen Fortpflanzungsgeschwindigkeiten kann überhaupt die Drehungsgeschwindigkeit verschwinden, aber dieser Fall kann nur in den rechtsseitigen Teilen der Cyklone eintreten, während zur Linken derselben, wo γ negativ, der Wert

$$+\frac{c \sin \gamma}{\sin r}$$

je nach den Umständen eine bedeutende Drehungsgeschwindigkeit sich entwickeln kann, was mit den vorhin abgeleiteten Sätzen über die Geschwindigkeitsänderungen vollkommen harmonirt.

In Bezug auf die Gradientkräfte, welche durch den Ortswechsel der Cyklone vermindert werden, haben wir aus

94)
$$\frac{F}{V}\sin\psi = \lambda + \frac{V\sin\psi}{\operatorname{tg} r} + \frac{f\omega^2}{V}\sin\varphi\cos\varphi\cos\varepsilon - \frac{d\psi}{dt}$$
$$\frac{F}{V}\cos\psi = k + \frac{dV}{dt} + \frac{f\omega^2}{V}\sin\varphi\cos\varphi\sin\varepsilon$$

nach Elimination von F

$$\frac{d\psi}{dt} = 2\omega\sin\varphi - k\operatorname{tg}\psi - \frac{V'}{V}\operatorname{tg}\psi + \frac{V\sin\psi}{\operatorname{tg} r} + \frac{f\omega^2}{V}\,\frac{\sin\varphi\cos\varphi\cos(\varepsilon+\psi)}{\cos\psi}$$

Hierin bedeutet der letzte Ausdruck den Wert des Unterschiedes zwischen der Centrifugal- und Attractionscomponente, welche also nach Süden hin wirkt. S. a. a. O. Will man f als eine von φ abhängige Gradientkraft ansehen, welche meridional nach Norden wirkt, so ist f negativ zu setzen. Der Ausdruck ist periodisch.

Der Ausdruck für V ist nach früherem

$$V^2 = (v\cos\psi + c\cos\gamma)^2 + \left(v\sin\psi - c\cos r\sin\gamma - \frac{c\sin r}{\operatorname{tg} r}\right)^2$$

Die Veränderung des Ablenkungswinkels ψ ist nun in besonderem Masse abhängig von

$$-\frac{V'}{V}\operatorname{tg}\psi$$

indem er zeigt, dass mit zunehmender Beschleunigung eine Abnahme desselben verbunden ist.

Da wir nun eben nachgewiesen, dass die Geschwindigkeit an der rechten Seite des Wirbels kleiner ist, als an der linken, so folgt unmittelbar, dass die Ablenkungswinkel an der rechten Seite grösser sein müssen, als an der linken.

Nach den Ausdrücken der Geschwindigkeiten an der Vorder- und Rückseite der Cyklone folgt ferner, dass der Ablenkungswinkel der einströmenden Luftmassen an der Vorderseite kleiner ist, als an der Rückseite.

Die vollständige Uebereinstimmung dieser Theorie mit den Beobachtungsreihen von Clement Ley und Hildebrandsohn, wie sie von Dr. Sprung in seinem Lehrb. der Meteorologie S. 248 und 250 mitgeteilt sind, ist damit nachgewiesen.

XVI..

Ueber eine neue geometrische Construction der Lemniskate.

Von

Ernst Schultz.

Ist die Gleichung der Lemniskate

$$(x^2+y^2)^2 = a^2(x^2-y^2)$$

so lassen sich die einzelnen Lemniskatenpunkte durch folgende einfachte geometrische Construction finden.

Ich mache $BN = a$, wo a eine beliebige Strecke ist, und ich errichte auf BN in N das Lot $ND = a$, so ist

$$BD = b = a\sqrt{2}$$

Der um BD als Durchmesser geschlagene Kreis geht durch N. Jetzt ziehe ich von B aus eine beliebige Sehne BS, so dass der Punkt S auf dem Bogen ND liegt. Der mit $BN = a$ um B geschlagene Kreis treffe BS in T, wenn wir den anderen Schnittpunkt nicht weiter berücksichtigen. Die durch T zu BD gezogene Parallele schneidet das auf BS in B errichtete Lot in U. Der mit BS um B geschlagene Kreis trifft die Gerade ND in R_1 und R_1'. Die Geraden BR_1 und BR_1' werden von dem mit BU um B geschlagenen Kreise in L_1, L_1', L_1''; L_1''' geschnitten, welches 4 Punkte einer Lemniskate sind, deren Achse die Gerade BN ist.

Zieht man BS', und führt dieselbe Construction aus, so erhält man 4 andere Lemniskatenpunkte. Auf diese Weise kann man fort-

fahren, bis man sämtliche Punkte erhalten hat. BN ist dann die Abscissenachse und B der Doppelpunkt der Lemniskate. Fällt der Punkt S in N, so wird

$$BU = a = BN$$

und hiermit erhalten wir die Punkte, deren Ordinate 0, Abscisse gleich $\pm a$ ist. Fällt ferner der Punkt S in D, so wird $BU = 0$ und B ist der Doppelpunkt der Lemniskate.

Der Beweis für die Richtigkeit dieser Construction ergiebt sich folgendermassen: Es sei das Coordinatensystem (x, y) gegeben, und eine Schaar concentrischer Kreise, deren Mittelpunkt der Coordinatenanfangspunkt ist. Einen Teil dieser Schaar von Kreisen durchschneidet die Gerade, deren Gleichung

$$y = ax + b$$

ist. Die Kreise, welche die Gerade schneiden resp. berühren, wollen wir äussere Kreise nennen, und ihren Radius allgemein mit R bezeichnen. Die anderen Kreise, welche die Gerade nicht schneiden resp. berühren, mögen innere Kreise heissen, und ihr Radius sei allgemein r. Zur Vereinfachung wollen wir noch die die äusseren Kreise schneidende Gerade Schnittgerade nennen. Ist die Gleichung irgend eines äusseren Kreises

1) $$x^2 + y^2 = R^2$$

so sind die Coordinaten der Schnittpunkte des äusseren Kreises 1) und der Schnittgerade

$$y = ax + b,$$

$$y_1 = \frac{b \pm a\sqrt{R^2(1+a^2) - b^2}}{1+a^2}; \quad x_1 = \frac{-ab \pm \sqrt{R^2(1+a^2) - b^2}}{1+a^2}$$

Die Gleichung der Verbindungslinie dieser Schnittpunkte mit dem Coordinatenanfangspunkt ist

$$y = \frac{x_1}{y_1} x$$

oder, wenn wir die Werte für y_1 und x_1 einsetzen:

$$y = \frac{b \pm a\sqrt{R^2(1+a^2) - b^2}}{-ab \pm \sqrt{R^2(1+a^2) - b^2}} x$$

Die Gerade soll einen Kreis der inneren Schaar schneiden, und als Coordinaten dieser Schnittpunkte ergeben sich

2) $$x' = \pm \frac{x_1 r}{R}; \quad y' = \pm \frac{y_1 r}{R}$$

wenn die Gleichung des betr. inneren Kreises ist

$$x^2 + y^2 = r^2$$

Setzen wir die vorhin erhaltenen Werte für x_1 und y_1 ein, so ist

$$x' = \pm \frac{r(-ab \pm \sqrt{R^2(1+a^2)-b^2})}{R(1+a^2)};$$

$$y' = \pm \frac{r(b \pm a)\sqrt{R^2(1+a^2)-b^2})}{R(1+a^2)}$$

Das doppelte Zeichen vor dem Bruch können wir fortlassen, wenn wir dieses mit r verbinden. Die Schnittpunkte der Verbindungslinie mit dem inneren Kreise liegen immer in gegenüberliegenden Quadranten. Bezeichnen wir den zwischen dem Coordinatenanfangspunkt und der Schnittgeraden liegenden Radius als positiv, so muss der nach dem anderem Schnittpunkt gehende Radius negativ sein.

Führt man diese Construction mit unendlich vielen äusseren und inneren Radien aus, so werden die Schnittpunkte auf den inneren Radien eine Curve bilden, deren Gleichung ist

3) $$x' = \frac{r(-ab \pm \sqrt{R^2(1+a^2)-b^2})}{R(1+a^2)};$$

$$y' = \frac{r(b \pm a\sqrt{R^2(1+a^2)-b^2})}{R(1+a^2)}$$

wenn zwischen R und r eine bestimmte Relation $r = f(R)$ besteht. In diesen Gleichungen sind die Coordinaten der Curve proportional dem Radius d. h. der Entfernung des Curvenpunkts vom Coordinatenanfangspunkt. Dasselbe ist der Fall bei den Polarcoordinaten

$$x' = r\cos\varphi; \quad y' = r\sin\varphi$$

Nach unserer Methode suchen wir für ein beliebiges R das zugehörige r gemäss der Gleichung

$$r = f(R)$$

was jedoch weiter nichts ist als zu einem beliebigen Azimut φ das zugehörige r zu suchen, wenn die Gleichung der Curve in Polarcoordinaten

$$r = g(\varphi)$$

ist. Dieses ergiebt sich auch aus den Gleichungen 2). Es ist

$$\frac{x_1}{R} = \cos\varphi; \quad \frac{y_1}{R} = \sin\varphi$$

mithin wird

$$x' = \pm r\cos\varphi;\quad y' = \pm r\sin\varphi$$

Diese beiden letzten Gleichungen stellen die Curve dar, sobald zwischen r und φ eine Relation z. B.

$$r = g(\varphi)$$

besteht. Die Gleichung

$$r = g(\varphi)$$

bedeutet die Gleichung der Curve in Polarcoordinaten. In gleicher Weise bedeutet

$$r = f(R)$$

die Gleichung der Curve in den Coordinaten r und R, wo die zusammengehörigen r und R immer auf einer Geraden liegen.

Es sind zwei Arten von Aufgaben möglich dadurch, dass wir zu einer gegebenen Function zwischen r und R die zugehörige Curve suchen, oder dass wir zu der gegebenen Curve die zugehörige Relation zwischen r und R aufsuchen.

Als Beispiel für die erste Art wollen wir

$$\frac{R}{r} = n$$

setzen, wo n eine positive Zahl ist. Alsdann gehen die Gleichungen 3) über in

$$x = \frac{-ab \pm \sqrt{R^2(1+a^2)-b^2}}{n(1+a^2)};\quad y = \frac{b \pm a\sqrt{R^2(1+a^2)-b^2}}{n(1+a^2)}$$

wenn wir noch die Striche an den Coordinaten x' und y' fortlassen.

Diese Gleichungen stellen eine Gerade dar, denn es ist

$$\frac{dy}{dx} = a$$

Diese Gerade ist also der der Schnittgerade parallel. Nehmen wir n negativ an, so muss r negativ sein, da R stets positiv ist. Hiefür erhalten wir ebenfalls eine Gerade, welche der Schnittgerade parallel ist. Beide Geraden sind ferner gleich weit vom Coordinatenanfangspunkt entfernt.

Ist das Product der Radien constant, so ist die Curve ein Kreis, auf dessen Peripherie der Coordinatenanfangspunkt liegt. Es entsteht hierbei noch ein zweiter dem ersten congruenter Kreis.

Bei der zweiten Art von Aufgaben, die Relation zwischen r und R zu suchen, wenn die Curve gegeben ist, kommen wir auf den

Fall der Lemniskate. Znr Vereinfachung nehmen wir an, dass

$$a = -1$$

sei. Ferner wollen wir das Coordinatensystem nm 45° drehen. Sind die nenen Coordinaten x', y', so bestehen die Transformationsgleichnngen:

$$x' = \frac{1}{\sqrt{2}}(x+y); \quad y' = \frac{1}{\sqrt{2}}(y-x)$$

Es ist mithin

$$\sqrt{2}x' = \frac{br}{R}; \quad \sqrt{2}y' = -\frac{\sqrt{2R^2-b^2}}{R}r$$

Wir wollen jetzt die Striche fortlassen, nnd diese Werte für x nnd y in die Gleichung der Lemniskate 1) einsetzen. Es ist nnn

$$2(x^2+y^2) = \frac{b^2r^2}{R^2} + \frac{2r^2R^2}{R^2} - \frac{b^2r^2}{R^8} = 2r^2$$

$$(x^2+y^2)^2 = r^4$$

$$2(x^2-y^2) = \frac{b^2r^2}{R^2} - \frac{2R^2r^2}{R^2} + \frac{b^2r^2}{R^2} = \frac{2b^2r^2}{R^2} - 2r^2$$

Ans der Gleichnng der Lemniskate folgt nnn

$$r^4 = \frac{a^2b^2r^2}{R^2} - a^2r^2 \quad \text{oder} \quad r^2 = \frac{a^2b^2}{R^2} - a^2$$

Also ist

$$r = \frac{4\sqrt{b^2-R^2}}{R}$$

die zwischen den Radien R und r bestehende Relation, wenn die Curve eine Lemniskate sein soll. Anf das doppelte Vorzeichen von r brancht nach den vorhin gemachten Bemerkngen nicht mehr eingegangen zn werden.

Die Gleichnngen der Lemniskate in rechtwinkligen Coordinaten mil Hülfe der Variablon R sind

$$4) \quad x\sqrt{2} = \pm\frac{ab\sqrt{b^2-R^2}}{R^2}; \quad y\sqrt{2} = \mp\frac{a\sqrt{b^2-R^2}\sqrt{2R^2-b^2}}{R^2}$$

Nach der Gleichnng der Lemniskate ist für $y = 0$

$$x = \pm a, \quad x = 0$$

Es ist $x = y = 0$, wenn $R = b$ ist. Es wird ferner $y = 0$, wenn $R = \frac{b}{\sqrt{2}}$ ist. Für diesen Wert von R wird $x = \pm a$, was

die Gleichung der Lemniskate erfordert. Wir ersehen ferner hieraus, dass b beliebig sein kann. Durch die Drehung des Coordinatensystems schneidet die Schnittgerade die neue Ordinatenachse unter

$$b' = \frac{b}{\sqrt{2}}$$

Die Construction für r wird am einfachsten, wenn $b' = a$, also

$$b = a\sqrt{2}$$

ist. Nach der Formel

$$r = \frac{a\sqrt{2a^2 - R^2}}{R}$$

ist die zu Anfang angeführte Construction ausgeführt. Zum Beweise für die Richtigkeit der Construction ist zu beachten, dass

$$BN = a = ND \quad \text{und} \quad ND \perp BN$$

ist. Infolgedesssen ist

$$BD = a\sqrt{2}; \quad BS = R$$

mithin

$$SD = \sqrt{2a^2 - R^2}$$

Aus der Aehnlichkeit der Dreiecke BSD und TBU folgt:

$$\frac{SD}{BS} = \frac{BU}{BT}$$

Da $BU = r$; $BT = a$, so ist

$$r = BU = \frac{a\sqrt{2a^2 - R^2}}{R}$$

was zu beweisen war.

Nehmen wir b willkürlich, so gestaltet sich die Construction analog der ersteren. Es sei

$$BD = b > a$$

Man construire um BD als Durchmesser den Kreis, welcher den mit a um B geschlagenen Kreis in N trifft. Das in der Mitte von BD errichtete Lot schneidet den Kreis um BD in N_1', so ist

$$BN_1' = R_0 = \frac{b}{\sqrt{2}}$$

Jetzt mache man auf BN

$$BN_1 = BN_1'$$

so ist die durch N_1 senkrecht auf BN gezogene Gerade die Schnittgerade. Da

$$BN_1' = \frac{b}{\sqrt{2}}$$

ist, so können die Punkte S nur auf dem Bogen $N_1'D$ liegen. Die weitere Ausführung der Construction verläuft wie in dem Falle $b = a$.

Der Ausführlichkeit wegen ist noch zu zeigen, dass

$$BU = a$$ [1])

wird, wenn der Punkt S auf N_1' fällt.. Es ist nämlich

$$N_1'BD = \frac{\pi}{4}$$

$TU \parallel BJ$, mithin

$$\text{Wkl. } UTB = \frac{\pi}{4}$$

ferner ist

$$\text{Wkl. } BUT = \frac{\pi}{4}$$

Es muss also $\triangle\, TBU$ ein gleichschenkliges sein, und folglich ist

$$BU = BT = a$$

Der mit BN_1' um B geschlagene Kreis berührt die Schnittgerade im Punkte N_1 und der mit $BU = a$ um B geschlagene Kreis schneidet die Gerade BN_1 in N_1 und N_{11}, welches die beiden Lemniskatenpunkte sind, deren Ordinate null, und deren Abscisse gleich $\pm a$ ist. Bei constantem a erhalten wir für jedes beliebige b eine und dieselbe Lemniskate.

Die allgemeinen Transformationsgleichungen 3) lassen sich mit Vorteil zur Construction von Curven anwenden, wenn dieselben durch den Coordinatenanfangspunkt gehen. Die Gleichung der Curve in rechtwinkligen Coordinaten enthält alsdann kein constantes Glied. Haben wir z. B. eine Gleichung dritten Grades zwischen den Coordinaten x und y ohne ein constantes Glied, und wenden wir hierauf die Transformationsgleichungen 3) an, so erhalten wir eine Gleichung zwischen r und R, welche für r nur vom zweiten Grade ist. Bei der Lemniskate kommen wir ebenfalls auf eine Gleichung zwischen r und R, welche r nur in der zweiten Potenz enthält.

Nicht uninteressant ist die Anwendung dieser Transformationsmethode auf homogene Gleichungen zwischen x und y ohne constantes Glied. Es sei die Gleichung

5) $$f(x, y) = x^n + \alpha x^{n-1}y + \beta x^{n-2}y^2 + \ldots + \gamma y^n = 0$$

1) Die übrigen Buchstaben sind die der ersten Figur.

gegeben, wo α, β, γ Constanten sind. Der einfacheren Bezeichnung wegen wollen wir setzen

$$x = \frac{r}{R}(A + \varphi(R)) \quad \text{und} \quad y = \frac{r}{R}(B + a\varphi(R))$$

wo sich die Bedeutungen von A, B, $\varphi(R)$ ohne weiteres aus den Gleichungen 3) ergeben. Setzt man die Werte von x und y in die Gleichung 5) ein, so kommt man auf die Gleichung:

$$(A + \varphi(R))^n + \alpha(A + \varphi(R))^{n-1}(B + a\varphi(R)) + \ldots + (B + a\varphi(R))^n = 0$$

Diese Gleichung giebt im allgemeinen n verschiedene Werte für $\varphi(R)$. Um eine Relation zwischen r und R zu erhalten, müssen wir auf den Differentialquotienten übergehen. Es ist

$$6) \qquad \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy = 0$$

Es ist nun

$$dx = \frac{A + \varphi(R)}{R}dr + \frac{r}{R}\varphi'(R)dR - \frac{r(A + \varphi(R))}{R^2}dR$$

$$dy = \frac{B + a\varphi(R)}{R}dr + \frac{ra\varphi'(R)}{R}dR - \frac{r(B + a\varphi(R))}{R^2}dR$$

Da $f(x, y)$ eine homogene Function in x und y von $n$ter Ordnung ist, so sind es die partiellen Ableitungen ebenfalls, jedoch von $(n-1)$ter Ordnung. Setzen wir die Werte von x und y ein, so werden die partiellen Ableitungen als Functionen von r und R von der Form sein:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{r^{n-1}}{R^{n-1}}\varrho_1(R); \quad \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{r^{n-1}}{R^{n-1}}\varrho_2(R)$$

wo $\varrho_1(R)$ und $\varrho_2(R)$ Functionen von R sind. Mit Berücksichtigung von dx und dy geht die Gleichung in die Form

$$\Phi_1(R)dr + r\,\Phi_2(R)dR = 0$$

über, wo $\Phi_1(R)$, $\Phi_2(R)$ bestimmte Functionen von R sind. Mithin

$$\frac{dr}{r} = -\frac{\Phi_2(R)}{\Phi_1(R)}dR$$

also

$$r = Ce^{-\psi(R)} \qquad 7)$$

wenn

$$\int \frac{\Phi_2(R)}{\Phi_1(R)}dR = \psi(R)$$

gesetzt wird. Eine solche Relation zwischen r und R besteht für alle homogenen Functionen von der Form 5).

Die Constante C ist so zu bestimmen, dass die vermittelst der Relation 7) construirte Curve durch den auf R liegenden Punkt geht. Geben wir der Constanten C beliebige Werte, so erhalten wir Curven, welche in den auf R liegenden Punkten parallele Tangenten haben. Bei Polarcoordinaten muss man natürlich zu einer ähnlichen Relation wie 7) zwischen Radius und Azimuth gelangen.

Zum Schluss sei darauf hingewiesen, dass man R und r auch als rechtwinklige Coordinaten ansehen kann, sodass die zwischen ihnen bestehende Relation die Gleichung der Curve in rechtwinkligen Coordinaten (R, r) angiebt. Als Beispiel möge der schon oben angeführte Fall dienen, wo das Product der Radien constant ist. Es stellt dann $R \cdot r = n$ eine gleichseitige Hyperbel dar in rechtwinkligen Coordinaten (R, r), und man gelangt dann zu einer einfachen Construction der Coordinaten für die Hyperbelpunkte.

Zur graphischen Darstellung von Curven dürfte in vielen Fällen die Constructionsmethode mit den Kreisen einige Vorteile gewähren.

Stettin, Juni 1893.

XVII.

Gleichseitiges Tetraeder.

Von

R. Hoppe.

---

§ 1. Vier Eigenschaften können einem Tetraeder nur gemeinsam zukommen: 1) Congruenz aller Seiten, 2) parweise Gleichheit der Gegenkanten, 3) Gleichheit aller Seiten, 4) Gleichheit aller Höhenlote. Die 2 ersten und die 2 letzten bedingen sich offenbar gegenseitig, und der dritte ist in der ersten enthalten. Daher reducirt sich die Behauptung, dass alle 4 Eigenschaften durch einander bedingt sind, auf folgenden

Lehrsatz.

„Sind alle Seiten eines Tetraeders einander gleich, so sind sie „auch einander congruent."

Dieser Satz gilt nicht für die Grenzgebilde von 1 und 2 Dimensionen, in welche das Tetraeder stetig degeneriren kann.

Beweis.

Die Ecken des Tetraeders seien A, B, C, D, die Kanten $a = BC$, $b = CA$, $c = AB$, $d = AD$, $e = BD$, $f = CD$; die Seiten seien bezeichnet durch die Grenzkanten in Klammern. Dann ist

$$\left.\begin{aligned}
16\,(aef)^2 &= 2(e^2f^2 + a^2f^2 + a^2e^2) - a^4 - e^4 - f^4 \\
16\,(bfd)^2 &= 2(f^2d^2 + b^2d^2 + b^2f^2) - b^4 - f^4 - d^4 \\
16\,(cde)^2 &= 2(d^2e^2 + c^2e^2 + c^2d^2) - c^4 - d^4 - e^4 \\
16\,(abc)^2 &= 2(b^2c^2 + c^2a^2 + a^2b^2) - a^4 - b^4 - c^4
\end{aligned}\right\} \quad (1)$$

Nach Voraussetzung müssen diese 4 Grössen einander gleich sein. Durch Subtraction der auf einander folgenden erhält man:

$$2f^2(a^2-d^2-b^2+e^2)+2(a^2e^2-b^2d^2)-a^4+d^4+b^4-e^4=0$$
$$2d^2(b^2-e^2-c^2+f^2)+2(b^2f^2-c^2e^2)-b^4+e^4+c^4-f^4=0$$
$$2c^2(d^2-a^2-b^2+e^2)+2(d^2e^2-a^2b^2)+a^4-d^4+b^4-c^4=0$$

Sei nun

$$\left.\begin{array}{lll} \alpha=d^2-a^2; & \beta=e^2-b^2; & \gamma=f^2-c^2 \\ \delta=d^2+a^2; & \varepsilon=e^2+b^2; & \zeta=f^2+c^2 \end{array}\right\} \qquad (2)$$

Dann werden diese 3 Gleichungen:

$$(\alpha+\beta)(\varepsilon-\delta)+(\alpha-\beta)(\zeta+\gamma)=0 \qquad (3)$$
$$(\beta+\gamma)(\zeta-\varepsilon)+(\beta-\gamma)(\delta+\alpha)=0 \qquad (4)$$
$$(\alpha-\beta)(\varepsilon-\delta)+(\alpha+\beta)(\zeta-\gamma)=0 \qquad (5)$$

Durch Subtraction und Addition der Gl. (3) und (5) ergeben sich die zwei ersten der 3 folgenden Relationen, durch Verbindung mit Gl. (4) dann die dritte:

$$\left.\begin{array}{l} \alpha(\varepsilon+\zeta-\delta)-\beta\gamma=0 \\ \beta(\zeta+\delta-\varepsilon)-\gamma\alpha=0 \\ \gamma(\delta+\varepsilon-\zeta)-\alpha\beta=0 \end{array}\right\} \qquad (6)$$

Ist nun keine der 3 Grössen α, β, γ null, so findet man:

$$\delta=\alpha\frac{\beta^2+\gamma^2}{2\beta\gamma}, \quad \varepsilon=\beta\frac{\gamma^2+\alpha^2}{2\gamma\alpha}; \quad \zeta=\gamma\frac{\alpha^2+\beta^2}{2\alpha\beta} \qquad (7)$$

und nach Gl. (2)

$$\left.\begin{array}{lll} a^2=\left(\alpha\frac{\beta-\gamma}{\pi}\right)^2; & b^2=\left(\beta\frac{\gamma-\alpha}{\pi}\right)^2; & c^2=\left(\gamma\frac{\alpha-\beta}{\pi}\right)^2 \\ d^2=\left(\alpha\frac{\beta+\gamma}{\pi}\right)^2; & e^2=\left(\beta\frac{\gamma+\alpha}{\pi}\right)^2; & f^2=\left(\gamma\frac{\alpha+\beta}{\pi}\right)^2 \end{array}\right\} \qquad (8)$$
$$\pi^2=4\alpha\beta\gamma$$

Da der Dreiecksinhalt rational in den Quadraten der Seiten ist, so kann man, wenn es sich um die Seiten des Tetraeders handelt, den obigen Ausdrücken der 6 Kanten beliebige Vorzeichen geben. Stellt man das 16fache Quadrat jedes Dreiecks als Product von 4 algebraischen Summen der 3 Kanten dar, so zeigt sich aus den eben gefundenen Werten der Kanten, dass in jedem der 4 Producte ein

Factor null ist. Demnach sind alle Seiten des Tetraeders null, und das Tetraeder degenerirt in eine gerade Linie.

Ist ferner eine der Grössen α, β, γ, z. B. γ, null, so zeigt die letzte Gl. (6), dass noch eine zweite, z B. β, null sein muss, und es bleibt als Bedingung nur übrig:

$$\alpha(\varepsilon+\zeta-\delta) = 0$$

Ist α nicht null, also $\varepsilon+\zeta-\delta=0$, so hat man vermöge der Gl. (2):

$$d^2+a^2 = 2(b^2+c^2); \quad e=b; \quad f=c \tag{9}$$

Es fragt sich, ob diese Relationen an einem Tetraeder möglich sind. Wir projiciren das Tetraeder, dessen Höhe über der Basis $(abc) = h$ sei, auf die Basisebene und bezeichnen die Projectionen von d, e, f durch d', e', f'; dann ist

$$a^2 = b^2+c^2-2bc\cos(bc) \tag{10}$$
$$d'^2 = e'^2+c^2-2e'c\cos(e'c)$$

mithin nach Addition von h^2

$$d^2 = e^2+c^2-2e'c\cos(e'c) \tag{11}$$

Addirt man die Gl. (10) (11), so erhält man mit Anwendung der vorausgesetzten Gl. (9):

$$b\cos(bc)+e'\cos(e'c) = 0$$

Diese Grösse drückt aber die Differenz von c und von der Projection des f' auf c aus. Folglich ist c gleich der Projection von f', und man hat:

$$c \overline{<} f' \overline{<} f = c$$

folglich $f=f'$, das ist

$$h = 0$$

und das Tetraeder degenerirt in ein ebenes Gebilde.

Es hat sich ergeben, dass wenn keine der Grössen α, β, γ null ist, das Tetraeder, um lauter gleiche Seiten zu haben, in eine Gerade, wenn eine, und demzufolge auch eine zweite, aber nicht die dritte null ist, in ein ebenes Gebilde degeneriren müsste. Daher bleibt nur der Fall übrig

$$\alpha = \beta = \gamma = 0$$

das ist

$$a=d; \quad b=e; \quad c=f$$

in welchem alle 4 Seiten des Tetraeders einander congruent sind.

Demnach können nur congruente Seiten des Tetraeders sämtlich einander gleich sein, w. z. b. w.

§ 2. In Betreff der 2 Grenzfälle, welche ausser der wirklichen Lösung der untersuchten Frage übrig bleiben, ist folgendes zu bemerken.

Ist keine der Grössen α, β, γ null, so kann man

$$\alpha \overset{=}{>} \beta \overset{=}{>} \gamma$$

annehmen. Dann erfüllen die Werte (8) die Gleichungen:

$$e = a + f; \quad d = b + f; \quad d = c + e; \quad b = a + c$$

woraus:

$$d = a + c + f$$

Man sieht also, dass, indem das Tetraeder in eine Gerade degenerirt, eine Kante d die ganze Länge darstellt, zwei andre b, e von je zwei Kanten gedeckt werden, und die Ecken in der Reihenfolge A, B, C, D liegen.

Fragt man nun, ob bei stetigem Uebergang des Tetraeders in eine solche Gerade seine Seiten stetig zur Gleichheit gelangen, so ist zu beachten, dass wir bisher nur vorausgesetzt haben, dass die Differenzen der Seiten null seien. Da aber bei jenem Uebergang die Seiten selbst verschwinden, so ist das Verschwinden ihrer Differenzen bedeutungslos. Die Annäherung zu ihrer Gleichheit kann nur darin bestehen, dass ihre Quotienten den Grenzwert 1 haben. Macht man dies zur Forderung, so ergibt sich die ausreichende und notwendige Bedingung:

$$(2a + c + f)(c^2 - f^2) = 0$$

Der erste Factor ist > 0, der zweite ist nach anfänglicher Voraussetzung nicht null. Folglich hat der in Rede stehende Grenzfall nicht einmal finale Beziehung zu der Frage nach gleichseitigen Tetraedern.

Der zweite Grenzfall $\beta = \gamma = 0$ ergibt ein Parallelogramm nebst seinen Diagonalen. Er zeigt, dass in der Tat ein Tetraeder sich der Gleichseitigkeit ohne Grenzen stetig annähern kann, während seine Seiten nur parweise congruent werden.

§ 3. Wenn wir jetzt ein Tetraeder gleichseitig nennen, so ist in dem Attribut schon einbegriffen, dass seine Seiten einander congruent, mithin seine Gegenkanten einander gleich sind. Ein gleich-

seitiges Tetraeder ist demnach durch 3 Kanten: a, b, c, bestimmt, unter denen keine Gegenkanten vorkommen.

Diese 3 Grössen haben indes 2 Bedingungen zu erfüllen, damit die Kantenpare ein Tetraeder bilden können: 1) muss in jedem ebenen Dreieck (abc) jede Kante kleiner sein als die Summe der beiden andern; 2) in jeder Ecke $[abc]$ jeder Seitenwinkel kleiner als die Summe der beiden andern. Da nun die 3 Seitenwinkel einer Ecke auch Winkel eines Dreiecks (abc) sind, so verlangt letztere Bedingung, dass alle Seitenwinkel $<$ R sind. Ist aber dies der Fall, so folgt von selbst, dass die erste Bedingung erfüllt ist.

Notwendige und ausreichende Bedingung dafür, dass a, b, c ein Tetraeder bilden können ist also:

$$a^2 < b^2+c^2; \quad b^2 < c^2+a^2; \quad c^2 < a^2+b^2$$

Zu den specifischen Eigenschaften der gleichseitigen Tetraeder gehören noch folgende.

Da in jeder Seite die Kanten den Sinus der Gegenwinkel, diese wieder den Sinus der gegenüberliegenden Flächenwinkel proportional sind, so hat man a priori:

$$\sin\alpha = aq; \quad \sin\beta = bq; \quad \sin\gamma = cq \tag{12}$$

Sei

$$s = a+b+c; \quad t = bc+ca+ab; \quad u = abc \tag{13}$$

$$s_1 = a^2+b^2+c^2; \quad t_1 = b^2c^2+c^2a^2+a^2b^2, \quad u_1 = a^2b^2c^2$$

$$\frac{1}{n} = t_1 - \tfrac{1}{4}s_1^2 = s(st - \tfrac{1}{4}s^3 - 2u) \tag{14}$$

dann findet man:

$$q^2 = 2n(s_1 - 2nu_1) = 2n(s^2 - 2t - 2nu^2) \tag{15}$$

und ferner:

$$\cos\alpha = na^2(s - 2a^2); \quad \text{etc.} \tag{16}$$

Hieraus ergibt sich der Wert der Ecke, sphärisch gemessen

$$E = \alpha+\beta+\gamma-2\text{R}$$

durch

$$\sin E = \frac{4q}{s^2}\left(\frac{1}{ns}+u\right); \quad \cos E = 8\frac{nu^2+t}{s^2} - 3 \qquad (17)\ (18)$$

Der Abstand der Endpunkte beliebiger Strecken v, w auf den Gegenkanten a, a von einander sei $= R$; dann ist R^2 von der Form:

$$R^2 = v^2+w^2-2vw\cos\vartheta+Lv+Mw+N \tag{19}$$

Dies ist ein Minimum für

$$\left.\begin{array}{l} v - w\cos\vartheta + \tfrac{1}{2}L = 0 \\ w - v\cos\vartheta + \tfrac{1}{2}M = 0 \end{array}\right\} \qquad (20)$$

und zwar bedeutet ϑ den Winkel zwischen den Gegenkanten a, a, die Schenkel in der Richtnng der Strecken v, w gedacht. Setzt man nun zur Bestimmung von ϑ, L, M, N die Anfangs- und Endwerte 0 und a für v und für w, so wird

$$R(00) = R(aa) = b; \quad R(a0) = R(0a) = c$$

(oder umgekehrt, was gleichgültig ist), man erhält aus Gl (19) die 4 Gleichungen:

$$b^2 = N = 2a^2(1-\cos\vartheta) + (L+M)a + N$$
$$c^2 = a^2 + La + N = a^2 + Ma + N$$

Aus diesen nnd den Gl. (20) (19) ergibt sich leicht:

$$L = M = -\frac{a^2+b^2-c^2}{a}; \quad N = b^2 \qquad (21)$$

$$\cos\vartheta = \frac{c^2-b^2}{a^2} \qquad (22)$$

$$v = w = \tfrac{1}{2}a \qquad (23)$$

$$R^2 = \frac{b^2+c^2-a^2}{2} \qquad (24)$$

Gl. (24) zeigt die Normalabstände der Gegenkanten als die Werte von R und dessen analoge. Nach Gl. (23) werden die Gegenkanten von ihren gemeinsamen Loten in ihren Mitten getroffen. Gl. (22) gibt die Winkel zwischen den Gegenkanten. Setzt man die Werte (21) (22) (23) in Gl. (19) ein, so findet man den Abstand zweier beliebigen Punkte der Gegenkanten.

Bezeichnet man die gemeinsamen Lote der 3 Gegenkantenpare a, b, c durch a_1, b_1, c_1, so ist eines derselben a_1 normal zn 2 parallelen Ebenen, in denen die Kanten a, mithin auch die 8 Endpunkte der Kanten b, b, c, c liegen. Daraus folgt beiläufig, dass

$$\cos(ba_1) = \frac{a_1}{b}; \quad \cos(ca_1) = \frac{a_1}{c}$$

nebst den analogen Formeln. Wichtiger ist der Schluss, dass die Mitten der 4 Kanten b, b, c, c in einer Ebene E_a parallel zu den genannten Ebenen liegen, und dass E_a durch die Mitte von

a_1 geht, normal zu a_1 ist und b_1 und c_1 enthält. Hiernach sind a_1, b_1 und c_1 normal zu einander und liegen in 3 orthogonalen Ebenen. Da nun in jeder der Ebenen E_a, E_b, E_c zwei der Lote a_1, b_1', c_1 liegen, so liegt jedes der letztern in 2 Ebenen, und alle schneiden und halbiren sich im Durchschnittspunkt der 3 Ebenen, deren Durchschnittslinien sie sind. Geht man also von einem rechtwinkligen Axensystem der xyz aus, welches die Lage des Tetraeders bestimmt, so kann man alle möglichen gleichseitigen Tetraeder durch die Eckencoordinaten anfstellen:

$$(x,\ y,\ z)\,(x,\ -y,\ -z)\,(-x,\ y,\ -z)\,(-x,\ -y,\ z)$$

das sind die Ecken eines rechtwinkligen Parallelepipedons, dessen Kanten

$$2x = a_1;\quad 2y = b_1;\quad 2z = c_1$$

und dessen Seitendiagonalen a, b, c sind.

Nach der letzten Gl. (1) ist

$$16(abc)^2 = 4t_1 \quad -s_1{}^2 = \frac{4}{n}$$

$$(abc) = \frac{1}{2\sqrt{n}} \tag{25}$$

Die Höhe des Dreiecks über der Basis a ist

$$= \frac{2(abc)}{a}$$

also die Höhe des Tetraeders über der Basis (abc)

$$h = \frac{2\,(abc)}{a}\sin\alpha = 2\,(abc)q$$

und das Volum des Tetraeders

$$T = \tfrac{2}{3}(abc)^2 q = \frac{q}{6n} \tag{26}$$

Mittelst vorstehender Formeln lässt sich nun die Aufgabe lösen:

„Die Kanten eines gleichseitigen Tetraeders zu finden, wenn „dessen Volum, Oberfläche und Ecke gegeben sind."

Zur Lösung dienen die Gl. (17) (18) (25) (26) (14) (15) (13). Bezeichnet S die Oberfläche, so ist nach Gl. (25) und (26)

$$S = 4(abc) = \frac{2}{\sqrt{n}}$$

also

$$n = \frac{4}{S^2} \qquad (27)$$

$$q = 6n\,T = \frac{24\,T}{S^2} \qquad (28)$$

Wir betrachten daher n nnd q als bekannt und haben znr Bestimmnng von s, t, u die 4 Gl. (14) (15) (17) (18), nnd zwar aus Gl. (15) (18) die Werte:

$$u^2 = \frac{s^2 - 2t}{2n} - \frac{q^2}{4n^2} = \frac{3 + \cos E}{8n} s^2 - \frac{t}{n} \qquad (29)$$

ans Gl. (14) (17):

$$u = \frac{st}{2} - \frac{s^3}{8} - \frac{1}{2ns} = \frac{s^2}{4q} \sin E - \frac{1}{ns} \qquad (30)$$

Gl. (29) gibt direct s, dann Gl. (30) t. Man hat also:

$$s = \frac{q}{\sqrt{n}\sin\frac{1}{2}E}; \quad t = \frac{q}{4n\sin^2\frac{1}{2}E} + \frac{\cos\frac{1}{2}E}{\sqrt{n}} - \frac{\sin^2\frac{1}{2}E}{q^2}$$

$$u = \frac{q}{2n\,\mathrm{tg}\,\frac{1}{2}E} - \frac{\sin\frac{1}{2}E}{q\sqrt{n}} \qquad (31)$$

und $l = a, b, c$ sind die Wnrzeln der Gleichnng:

$$l^3 - sl^2 + tl - u = 0 \qquad (32)$$

Alle diese Bestimmnngen sind eindeutig, es kann also nie mehr als ein Tetraeder als Lösnng erscheinen. Als Bedingnng der Möglichkeit eines Tetraeders ist notwendig nnd hinreichend, dass Gl. (32) 3 positive reelle Wnrzeln habe, nnd dass diese die Seiten eines spitzwinkligen Dreiecks darstellen. Hierzn ist schon vorher nötig, dass die Werte (31) positiv sind. Damit bzhw. t und u positiv sei, mnss sein

$$q^2 > 2\sqrt{n}\sin^2\tfrac{1}{2}E\left(\sqrt{1+\cos^2\tfrac{1}{2}E} - \cos\tfrac{1}{2}E\right); \quad q^2 > \frac{2\sqrt{n}\sin^2\frac{1}{2}E}{\cos\frac{1}{2}E}$$

Letztere Grenze ist die grössere. Ans ihr geht die Bedingnng hervor:

$$\cos\tfrac{1}{2}E > \sqrt{\left(\frac{72\,T^2}{S^3}\right)^2 + 1} - \frac{72\,T^2}{S^4}$$

XVIII.

Beweis des Satzes von Leman pag. 224.

Von

Prof. Dr. **F. W. Fischer.**

1. Beschreibt man über den Seiten eines beliebigen Dreiecks ABC die gleichkenkligen Dreiecke ABJ, BCG, ACH, deren Basiswinkel gleich sind nnd zieht die Linien AG, BH, CJ, welche die Seiten des Dreiecks in den Pnnkten D, E, F schneiden mögen, so schneiden sich diese Verbindnngslinien in einem Punkte. Es ist (Fig. 1):

$$\frac{\triangle CJA}{\triangle CJB} = \frac{AF}{FB},$$ da die Dreiecke die Seite CJ gemein haben

$$\frac{\triangle AGB}{\triangle AGC} = \frac{BD}{DC}$$

$$\frac{\triangle BHC}{\triangle BHA} = \frac{CE}{EA};$$ also

$$\frac{\triangle CJA}{\triangle CJB} \cdot \frac{\triangle AGB}{\triangle AGC} \cdot \frac{\triangle BHC}{\triangle BHA} = \frac{AF}{FB} \cdot \frac{BD}{DC} \cdot \frac{CE}{EA}$$

Nun ist aber

$$\frac{AB}{AC} = \frac{AJ}{AH}$$ oder

$AB \,.\, AH = AC \,.\, AJ$, und Wkl. $HAB = JAC$, also $\triangle\, BHA = CJA$; ebenso ist $\triangle\, AGB = CJB$ nnd $\triangle\, BHC = AGC$.

Es ist also

$$\frac{AF}{FB} \cdot \frac{BD}{DC} \cdot \frac{CE}{EA} = 1$$

und folglich schneiden sich AG, BH, CJ in einem Punkte.

2. Wenn das Dreieck ein sphärisches ist, so lässt sich die Richtigkeit des Satzes in folgender Weise dartnn. Es ist, wenn

man (Fig. 2) Wkl. $CHE = v$, Wkl. $AHE = w$, Wkl. $AJF = v'$, Wkl. $BJF = w'$, Wkl. $BGD = v''$, Wkl. $CGD = w''$, ferner Wkl. $BCH = ACG = \gamma'$, Wkl. $HAB = CAJ = \alpha'$, Wkl. $ABG = JBC = \beta'$ bezeichnet:

$$\frac{\sin v}{\sin w} = \frac{\sin \gamma' \cdot \sin CB}{\sin \alpha' \cdot \sin AB}$$

$$\frac{\sin v'}{\sin w'} = \frac{\sin \alpha' \cdot \sin AC}{\sin \beta' \cdot \sin BC}$$

$$\frac{\sin v''}{\sin w''} = \frac{\sin \beta' \cdot \sin AB}{\sin \gamma' \cdot \sin AC}; \quad \text{also}$$

$$\frac{\sin v}{\sin w} \cdot \frac{\sin v'}{\sin w'} \cdot \frac{\sin v''}{\sin w''} = 1 \qquad (1)$$

Nun ist aber

$$\frac{\sin v}{\sin w} = \frac{\sin HCE \cdot \sin CE}{\sin HAE \cdot \sin AE} \quad \text{oder}$$

$$\frac{\sin v}{\sin w} = \frac{\sin CE}{\sin EA}; \quad \text{ebenso}$$

$$\frac{\sin v'}{\sin w'} = \frac{\sin AF}{\sin FB} \quad \text{und}$$

$$\frac{\sin v''}{\sin w''} = \frac{\sin BD}{\sin DC}; \quad \text{also ist}$$

$$\frac{\sin v}{\sin w} \cdot \frac{\sin v'}{\sin w'} \cdot \frac{\sin v''}{\sin w''} = \frac{\sin CE}{\sin AE} \cdot \frac{\sin AF}{\sin FB} \cdot \frac{\sin BD}{\sin DC} \qquad (2)$$

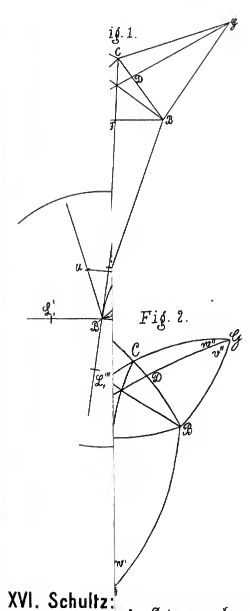
Ans (1) und (2) folgt]

$$\frac{\sin CE}{\sin EA} \cdot \frac{\sin AF}{\sin FB} \cdot \frac{\sin BD}{\sin DC} = 1$$

womit der Satz bewiesen ist.

Ein **trigonometrischer Beweis** für das ebene Dreieck ergiebt sich, wenn man in dem Beweise unter 2. an Stelle der sin. der Seiten, die Seiten selbst setzt.

Kempen (Rhein), den 17. Aug. 1893.



XVI. Schultz: ...s des Satzes von Leman.

XIX.

Die Gauss'sche Darstellung complexer Zahlen in geometrischer Beleuchtung.

Von

Adalbert Breuer,

k. k. Professor an der Staatsoberrealschule im III. Bez. Wiens.

(Mit einer Figurentafel.)

Gegen die geometrische Deutung complexer Zahlen als Indices einer Doppelreihe von Grössen sind in neuerer Zeit viele Bedenken erhoben worden, welche den Beweisen für die Richtigkeit der Gauss-schen Darstellung die überzeugende Kraft absprechen. Von diesen Scheinbeweisen sei jener von Drobisch erwähnt. (Vergl. Schlömilch's Handbuch der algebraischen Analysis, § 58.)

Nachdem sich aber obige Darstellung dessenungeachtet als äusserst anschaulich und nutzbringend erwiesen hat, so ist es gewiss der Mühe wert, den geometrischen Gründen für diese Uebereinstimmung zwischen Rechnung und Construction nachzugehn. Um das gesteckte Ziel sicher zu erreichen, ist es angezeigt, den Begriff der Zahl durch eine Strecke zu versinnlichen, so dass unter Zugrundelegung einer bestimmten Längeneinheit die erstere als die Masszahl der letzteren erscheint.

Ist in Fig. 1) O der Nullpunkt der Zahlenlinie OX, so bestimmt jeder Punkt A derselben mit O eine Strecke, welche eine positive oder negative Zahl versinnlicht, je nachdem A rechts oder links von O sich befindet. Durch die Zahlenlinie gewinnt man demgemäss eine Uebersicht aller ganzen und gebrochenen Zahlen.

Um irrationale Zahlen abzubilden, bedient man sich eines Kreises vom Centrum C und dem rationalen Radius ϱ, welcher die Abscissenachse OX in den reellen Punkten B und B' schneidet. Hat C die rationalen Coordinaten $OA = a$ und $AC = y$, so erhält man aus dem rechtwinkligen Dreieck ABC gemäss

$$AB^2 = AB'^2 = BC^2 - AC^2 = \varrho^2 - y^2$$

das Wertepaar

$$AB = +b = +\sqrt{\varrho^2 - y^2} \qquad 1)$$

$$AB' = -b = -\sqrt{\varrho^2 - y^2} \qquad 2)$$

Ist ABC nicht zufälliger Weise ein Pythagoräisches Dreieck, so sind die Zahlen $+b$ und $-b$ irrational; sie erscheinen durch die Strecken AB und AB' dargestellt, wenn man A als Nullpunkt auffasst. Zählt man jedoch vom Ursprung 0 aus, so ergeben sich die Streckenverbindungen

$$0B = 0A + AB = a + b \qquad 3)$$

$$0B' = 0A + AB' = a - b \qquad 4)$$

durch welche die surdischen Zahlen $(a+b)$ und $(a-b)$ versinnlicht werden. Die Reductionen 3) und 4) liefern

$$0B \,.\, 0B' = a^2 - b^2 \qquad 5)$$

Nun hat aber das Product $0B \,.\, 0B'$ die Bedeutung der Potenz des Punktes 0 in Bezug auf alle Kreise des Büschels mit den Trägern B und B', und man hat, wenn $0T = r$ eine Kreistangente vorstellt, die Beziehung

$$0B \cdot 0B' = 0T^2 = r^2 \qquad 6)$$

Aus 5) und 6) folgt

$$a^2 - b^2 = r^2 \qquad 7)$$

Diese Relation konnte man aus dem mit $AB = b$ als Radius beschriebenen Kreise mittels der Tangente $0T' = r$ direct ablesen. Der Kreis vom Radius r und vom Centrum 0 schneidet die Kreise des Büschels BB' orthogonal. Nennt man

$$r = \sqrt{a^2 - b^2}$$

den Modul der conjugirten surdischen Zahlen in 3) und 4), so liefert 7) einen leicht zu formulirenden Satz.

Berührt der Kreis C die Abscissenachse, so sind die irrationalen Bestandteile $+b$ und $-b$ der surdischen Zahlen gleich null. Wenn der Kreis C den Ursprung einschliesst, dann wird r^2 negativ und r imaginär. Als Mass von r dient dann nach der Planimetrie bekanntlich die halbe kürzeste Sehne durch 0, welche für alle Kreise des Büschels BB' in derselben Grösse erscheint. Der mit dieser halben Sehne beschriebene Kreis kann somit als Ersatz des in diesem Falle imaginären Orthogonalkreises angesehen werden und wird Diametralkreis genannt; er schneidet den Büschel aber nicht mehr unter rechten Winkeln.

Geht der Kreis C durch 0, dann ist wegen $a = b$ $0B = 2a$ und $0B' = 0$; ausserdem ist b nicht mehr irrational. Liegt das Centrum C in der Ordinatenachse $0Y$, dann verschwindet der rationale Teil a, und die surdischen Binome gehen in rein-irrationale Zahlen über.

Verwendet man die gewonnenen irrationalen Zahlen im Geiste als Coordinaten von Centren und als Radien von neuen Kreisen, so erhält man andere irrationale Zahlen. Durch die Fortsetzung dieses Verfahrens lässt sich das System der surdischen Zahlen beliebig erweitern und die Zahlenlinie in Gedanken unendlich eng punktiren.

Obige Entstehung surdischer Strecken kann in ungezwungener Weise auf complexe Strecken ausgedehnt werden. Wenn nämlich in 1) und 2) $\varrho < y$ wird, so erhält man unter Beachtung der Schreibweise $\sqrt{-1} = i$

$$AB_i = +ib = +i\sqrt{y^2 - \varrho^2} \qquad 1')$$

$$AB_i' = -ib = -i\sqrt{y^2 - \varrho^2} \qquad 2')$$

Der entsprechende Kreis C (Fig. 2) geht dann an $0X$ vorbei, und die Schnittpunkte B_i und B_i' sind imaginär. Legt man von A an den Kreis die Tangente AD, so folgt aus dem rechtwinkligen Dreiecke ADC

$$AD^2 = AC^2 - CD^2 = y^2 - \varrho^2$$

oder

$$AD = \sqrt{y^2 - \varrho^2} = b \qquad 3)$$

Beschreibt man von A aus mit AD den Kreis, so liefert dieser in $0X$ die reellen Punkte B und B', welche als Vertreter der imaginären B_i und B_i' gelten können, weil

$$iAD = iAB = AB_i = +ib$$

und

$$-iAD = iAB' = AB_i' = -ib \text{ ist.}$$

Die complexen Strecken

$$0B_i = 0A + AB_i = a + ib \qquad 3')$$

und

$$0B_i' = 0A + AB_i' = a - ib \qquad 4')$$

müssen dann durch die im allgemeinen surdischen Strecken

$$0B = 0A + AB = a + b \qquad 3'')$$

$$0B' = 0A + AB' = a - b \qquad 4'')$$

versinnlicht werden. Der geometrische Ort von B und B' ist eine gleichseitige Hyperbel von der Hauptachse

$$EF = 2\varrho$$

Diese Curve erscheint als der reelle Vertreter jenes imaginären Kreiszweiges, welchem das Schneiden von OX zufällt, nachdem der reelle Kreis dies nicht besorgen kann. Die Hyperbeltangenten in B und B' gehen durch den Punkt G der Polare DD' in Bezug auf den Kreis C, und es sind demnach A und G conjugirte Pole sowol bezüglich des Kreises als auch der Hyperbel. Alle diese Eigenschaften lassen sich leicht aus der Figur beweisen und sind in meinen einschlägigen Abhandlungen so vielfach erörtert worden, dass ich mich hier auf diesen Hinweis beschränke. Aus 3') und 4') folgt die Relation

$$OB_i \,.\, OB_i' = a^2 + b^2 \tag{5'}$$

und es entsteht nun die Frage, ob das Product $OB_i \,.\, OB_i'$ ebenso als Ausdruck der Potenz

$$OT^2 = r^2$$

von O in Betreff des Kreises C gilt, wie das analoge Product in 6).

Die Antwort hierauf gibt nachstehende Untersuchung der Fig. 2. Aus dem rechtwinkligen Dreieck OTC folgt

$$OT^2 = \theta C^2 - CT^2 = OC^2 - \varrho^2$$

Ferner erhält man aus dem rechtwinkligen Dreiecke OCA

$$OC^2 = OA^2 + AC^2 = a^2 + y^2$$

Die Substitution dieses Ausdruckes in den vorigen liefert

$$OT^2 = a^2 + y^2 - \varrho^2$$

woraus man mit Hilfe von 8) folgert

$$OT^2 = a^2 + b^2 \tag{9}$$

Aus 5') und 7) resultirt schliesslich

$$OB_i \,.\, OB'_i{}' = OT^2 = r^2 \tag{6'}$$

und der in 6) citirte planimetrische Satz gilt daher auch für Secanten mit imaginären Schnittpunkten. 9) und 6') ergeben für den Modul r der complexen conjugirten Zahlen $(a + ib)$ und $(a - ib)$ den Ausdruck

$$a^2 + b^2 = r^2 \tag{7'}$$

aus welchem man ersieht, dass dieser Modul stets reell ist.

Sind M und M' die Schnittpunkte von AC mit dem Kreise A, so ist

$$AM = AD = b$$

und aus $\triangle 0AM$ folgt

$$0M^2 = 0A^2 + AM^2 = a^2 + b^2 \qquad 10)$$

Hieraus schliesst man unter Hinblick auf 7') und 7)

$$0M^2 = 0T^2 = r^2$$

Mithin geht der Kreis 0 durch die Punkte M und M', welche als Träger eines Kreisbüschels erscheinen. Die Chordale MM' desselben enthält die Centren C aller gemeinsamen Orthogonalkreise. Diese gehen sämtlich durch die imaginären Punkte B_i und B_i' der Centrale $0X$ des Büschels MM' und haben somit $0X$ zur Chordale. Mithin bilden die Orthogonalkreise des Büschels MM' einen zweiten Büschel mit den imaginären Trägern B_i und B_i'. Unter ihnen kommen zwei Nullkreise vor, die sich mit den Punkten M resp. M' decken. Den Centren zwischen M und M' entsprechen imaginäre Orthogonalkreise an den Büschel MM'. Die reellen Ersatzkreise der letzteren gehen mit imaginären Zweigen durch die Punkte B_i und B_i'. Die Vertreter dieser Zweige sind reelle gleichseitige Hyperbeln, deren Hauptachse zu $0X$ parallel ist, und welche den Ersatzkreis mit den Scheiteln berühren. In dem Büschel MM' sind die Nullkreise imaginär und fallen mit den Punkten B_i und B_i' zusammen. Allen Kreisen dieses Büschels, deren Radien kleiner sind als $AM = b$ entsprechen imaginäre Centren, welche zwischen B_i und B_i' zu denken sind. Ersetzt man die imaginären Centren durch reelle, so ergeben sich reelle Kreise, welche durch die imaginär genommenen Punkte M und M' gehen. Die Vertreter der imaginären Zweige sind gleichseitige Hyperbeln, deren Hauptachsen zu $0Y$ parallel sind, und welche durch M und M' gehen.

Durch Variiren des Kreises C bezüglich Lage und Grösse lassen sich alle möglichen complexen Zahlen in derselben Weise zur Darstellung bringen, wie vorhin die surdischen.

Um nun die Vertreter B und B' conjugirter imaginärer Punkte B_i und B_i' von anderen Punkten der Zahlenlinie stets klar unterscheiden zu können, tut man gut, ihre Verbindung durch den Kreis A aufrecht zu erhalten. Dadurch sind Verwechslungen und Irrtümer, welche der Ersatz von 3') und 4') durch 3'') und 4'') leicht hervorrufen könnte, ausgeschlossen.

Ein anderes Mittel besteht in der Drehung des Durchmessers BB' um das Centrum A um 90^0 entgegen dem Sinne des Uhrzeigers. Dadurch gelangt man zu den Punkten M und M', und es stellt dann

$OA + AM$ die Zahl $a + ib$ dar, während
$OA + AM'$ die Zahl $a - ib$ versinnlicht.

Mit dieser Substitution der richtigen Vertreter B und B' der imaginären Punkte B_i und B_i' durch die willkürlichen Ersatzpunkte M und M' erscheint die Zahlenlinie OX zur Zahlenebene XOY erweitert. OX repräsentirt die reellen Zahlen, OY die rein imaginären, und jeder Punkt M in den Quadranten eine complexe Zahl und zwar in dem Sinne, dass die Bestandteile a und ib derselben durch die Coordinaten a und b von M ausgedrückt erscheinen. a und b sind dann gewissermassen die parallel zu den Achsen OX und OY genommenen Componenten des Moduls $OM = r$ als Resultante. Es ist nun naheliegend, diesen Modul unter Angabe seiner Richtung als abermaliges Versinnlichungsmittel der complexen Zahl $a + ib$ zu wählen. Den Uebergang zu dieser Substitution bietet der Winkel $MOA = \varphi$ als Richtungsconstante. φ, auch Amplitude genannt, hat alle Werte von 0 bis $+ 360^0$ zu durchlaufen, während r von 0 bis $+ \infty$ variirt, um alle Punkte der Zahlenebene zu passiren. Zur Bestimmung von φ liefert $\triangle\, OAM$ die Relationen

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{b}{a}$$

$$\sin \varphi = \frac{b}{r} = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

$$\cos \varphi = \frac{a}{r} = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

Unter Einführung dieser neuen Bestimmungsgrössen erscheint die complexe Zahl arithmetisch in nachfolgender Doppelbezeichnung:

$$a + ib = r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$$

Die rechte Seite dieser Gleichung wird als Normalform oder als goniometrische Form der complexen Zahl bezeichnet und liefert für Durchführung der Rechnungsoperationen die bekannten Sätze über die Moduln und Amplituden, die schliesslich zur Moivre'schen Binomialformel führen. Letztere ist bekanntlich ein Fundament vieler Theorien der algebraischen Analysis, und ihre Eleganz ist wol die Ursache für die Beliebtheit der Gauss'schen Darstellung der complexen Grössen.

Verfolgt man aber den Gang der obigen Entwicklung, so wird man es nur zu begreiflich finden, dass viele Mathematiker gegen die Gauss'sche Interpretation Stellung genommen haben, weil durch

diese die wahre Bedeutung der Complexen vollständig verwischt wurde und mehrfach Anlass zu Irrtümern und Trugschlüssen geben musste.

Das bestehende Uebereinstimmen der Resultate ist eben darauf zurückzuführen, dass das Imaginäre dreimal nach einander verschiedenartig ersetzt wird, wodurch man schliesslich auf das Gebiet der Componentenlehre gelangt, die einen Teil der theoretischen Mechanik ausmacht und offenbar mit der eigentlichen Sache gar nichts zu tun hat, man vergleiche nur diesbezüglich die Theorie der Richtungszahlen. Für den Mathematiker ist aber die ursprüngliche Bedeutung der Complexen massgebend, welche allerdings auf das Reelle zurückführt, jedoch in ganz anderer Art wie der Gauss'sche Ersatz. Wie das Imaginäre in der Geometrie aufzufassen ist, darüber habe ich mich in früheren Abhandlungen ausgesprochen. Daselbst habe ich auch auf Abweichungen und Uebereinstimmungen mit der algebraischen Analysis hingewiesen, welche auftreten müssen, nachdem in dieser Disciplin die Lehre über das Imaginäre auf das Princip der Erhaltung der Operationsgesetze gestützt wird. Ob zwar diese Ausführungen wol zum Teil wegen mangelhafter Präcision meiner Ausdrucksweise mehrfach missverstanden wurden, werde ich doch auf dem betretenen Wege weiter schreiten und nach Wahrheit und Klarheit in dem Gebiete der Imaginären streben.

Wien, d. 30. März 1893.

XX.

Ueber den Inhalt des vierdimensionalen Pentaeders.

Von

Ernst Liers, stud. math.

Um den Inhalt eines vierdimensionalen Pentaeders zu berechnen, muss man, wie wir später sehen werden, den Winkel kennen, den zwei Flächen eines sphärischen Tetraeders bilden, dessen Kanten gegeben sind. Wir wollen daher zunächst diese Aufgabe lösen.

Gegeben sei ein sphärischer Raum. Der Mittelpunkt desselben, d. h. also derjenige Punkt, der von allen Punkten des sphärischen Raumes gleich weit entfernt ist, heisse M. Ferner sei in diesem Raume ein sphärisches Tetraeder $ABCD$ gegeben mit den Kanten

$$AB = a, \quad AC = b, \quad AD = c, \quad BC = d, \quad BD = e, \quad CD = f$$

Die Winkel, welche diesen Kanten gegenüberliegen, sollen α, β, γ, δ, ε, ζ heissen. Es soll der Winkel berechnet werden, welchen die Flächen ABC und BCD oder, was dasselbe ist, die Räume $MABC$ und $MBCD$ mit einander bilden. Dieser Winkel ist derselbe, den die Lote bilden, welche man im Punkte B auf der Ebene MBC in den Räumen $MABC$ und $MBCD$ errichtet. Dieser Winkel sei φ.

Nun lege man durch M und durch jene Lote Ebenen, welche die Ebenen MAC und MCD in MA' und MD' schneiden. Dann sei

$$BA' = a', \quad BD' = e'. \quad CA' = b', \quad CD' = f', \quad A'D' = c'$$

Die Verlängerungen von MA' und MD' mögen die Lote in A'' und D'' schneiden. Dann ist im geradlinigen Dreieck $A''BD''$ das Quadrat von $A''D''$

$$= \operatorname{tg}^2 a' + \operatorname{tg}^2 e' - 2 \operatorname{tg} a' \operatorname{tg} e' \cos\varphi$$

Ferner ist im geradlinigen Dreieck $A''MD''$ das Quadrat von

$$A''D'' = \sec^2 a' + \sec^2 e' - 2 \sec a' \sec e' \cos c'$$

Daraus folgt:

$$\cos\varphi = \frac{\cos c' - \cos a' \cos e'}{\sin a' \sin e'}$$

Dieser Ausdruck muss nun durch die Grössen a, b, c, d, e, f ersetzt werden. Im rechtwinkligen sphärischen Dreieck $A'BC$ ist

$$\cos\alpha = \cot b' \operatorname{tg} d$$

folglich

$$\cot b' = \frac{\cos\alpha}{\operatorname{tg} d}$$

Damit ist b' bekannt, denn $\cos\alpha$ lässt sich folgendermassen durch die Seiten ausdrücken:

$$\cos\alpha = \frac{\cos a - \cos b \cos d}{\sin b \sin d}$$

Ferner ist nach dem Sinussatz

$$\frac{\sin a'}{\sin\alpha} = \frac{\sin b'}{\sin\beta'}$$

folglich

$$\sin a' = \sin b' \sin\alpha$$

Damit ist auch a' bekannt.

Die Grösse e' wird berechnet aus dem rechtwinkligen sphärischen Dreieck $D'BC$ Es ist

$$\cos\varepsilon = \frac{\cos e - \cos d \cos f}{\sin d \sin f}$$

$$\cot f' = \frac{\cos\varepsilon}{\operatorname{tg} d}$$

$$\sin e' = \sin f' \sin\varepsilon$$

Es bleibt uns nun noch übrig, die Grösse c' zu berechnen.

Zunächst ist im sphärischen Dreieck ACD

$$\cos\gamma = \frac{\cos c - \cos b \cos f}{\sin b \sin f}$$

Im sphärischen Dreieck $A'CD'$ wollen wir den Winkel $CA'D'$ mit ζ' bezeichnen. Dann ist

$$\cot\zeta'' = \frac{\cot f'\sin b' - \cos b'\cos\gamma}{\sin\gamma}$$

$$\sin c' = \frac{\sin\gamma\sin f'}{\sin\zeta''}$$

Damit sind die Grössen a', e' und c' hokannt, nnd wir können nuu don Winkol φ herechnen. Diese Borechnung ist recht langweilig uud nnerfreulich und erfordert sehr viel Zeit. Ich will nur das Resultat mitteilen, weil ich nachhor auf einom viol einfacheren Wego, nämlich mit Hülfe von Determinantensätzen, dasselbe Ergebniss ohne jede Rechnung noch einmal herleiten worde, so dass sich der Leser von der Richtigkeit desselhen überzeugen kann.

Wir erhalteu also nach Ausführung jener Rechnung

$$\cos\varphi = \frac{\cos c - \cos a\cos e - \cos b\cos f + \cos a\cos d\cos f + \cos b\cos d\cos e - \cos^2 d\cos c}{\sin MABC \sin MBCD}$$

Dahoi hedentet $\sin MABC$ deu Sinus der Ecke M im Raume $MABC$. Das Quadrat desselhen ist gleich der Determinante

$$\begin{vmatrix} 1 & \cos a & \cos b \\ \cos a & 1 & \cos d \\ \cos b & \cos d & 1 \end{vmatrix}$$

Ebenso ist

$$\sin^2 MBCD = \begin{vmatrix} 1 & \cos d & \cos e \\ \cos d & 1 & \cos f \\ \cos e & \cos f & 1 \end{vmatrix}$$

Der Zähler jenes Bruches lässt sich darstellen als die Determinante

$$\begin{vmatrix} \cos a & \cos b & \cos c \\ 1 & \cos d & \cos e \\ \cos d & 1 & \cos f \end{vmatrix}$$

Bezeichnet man in der Determinante

$$\begin{vmatrix} 1 & \cos a & \cos b & \cos c \\ \cos a & 1 & \cos d & \cos e \\ \cos b & \cos d & 1 & \cos f \\ \cos c & \cos e & \cos f & 1 \end{vmatrix} = \varDelta$$

das $k$te Glied der $i$ten Zeile durch m_{ik} und den zugehörigen Coefficienten dieses Elements in der nach den Elementen der $i$ten Zeile entwickelten Determinante Δ durch μ_{ik}, dann ist

$$\cos\varphi = \frac{\mu_{14}}{\sqrt{\mu_{11}\mu_{44}}} = \sqrt{\frac{\mu_{14}\mu_{41}}{\mu_{11}\mu_{44}}}$$

Die Winkel, welche die übrigen Flächen des sphärischen Tetraeders mit einander bilden, findet man einfach durch cyklische Vertauschung von a, b, c, d, e, f beziehungsweise durch Vertauschung der μ_{ik}. Der Ausdruck für diesen Winkel ist ganz analog gebildet dem Ausdruck für die Winkel des sphärischen Dreiecks. Legen wir in der Determinante

$$\begin{vmatrix} 1 & \cos a & \cos b \\ \cos a & 1 & \cos c \\ \cos b & \cos c & 1 \end{vmatrix}$$

dem μ_{ik} dieselbe Bedeutung bei, wie oben, dann lassen sich die Winkel des sphärischen Dreiecks folgendermassen ausdrücken

$$\cos\alpha = \sqrt{\frac{\mu_{12}\mu_{21}}{\mu_{11}\mu_{22}}}$$

$$\cos\beta = \sqrt{\frac{\mu_{13}\mu_{31}}{\mu_{11}\mu_{33}}}$$

$$\cos\gamma = \sqrt{\frac{\mu_{23}\mu_{32}}{\mu_{22}\mu_{33}}}$$

Diese Ausdrücke sind, wie wir nachher sehen werden, gültig für ein sphärisches Tetraeder von beliebig hoher Dimensionszahl.

Wir können nun dazu schreiten, den Inhalt des vierdimensionalen Pentaeders zu berechnen, von welchem die Längen von 4 in einer Ecke zusammenstossenden Kanten gegeben sind, sowie die 6 Winkel, welche diese Kanten mit einander bilden.

Der Inhalt eines vierdimensionalen Pentaeders ist gleich $\frac{1}{4}$ Grundkörper mal Höhe.

Der Inhalt des Grundkörpers $MABC$ ist gleich $\frac{1}{6}rr_1r_2\sin xyz$, wo r, r_1, r_2 die Länge der Kanten bedeutet, während $\sin xyz$ gleich der Wurzel aus der bekannten Determinante ist, die wir vorhin betrachtet haben. Es handelt sich nun darum, die Länge der Höhe h aus der vierten Kante r_3 und den gegebenen Winkeln zu berechnen. Wir fällen im Raume $MBCD$ von D ein Lot auf die Ebene MBC,

das dieselbe in E treffen möge. Dann errichten wir im Raume $MABC$ auf der Ebene MBC in E ein Lot EH und legen durch dieses Lot und durch DE eine Ebene. Schliesslich fällen wir von D in der Ebene DEH ein Lot DF auf EH; dann steht DF senkrecht auf dem Raume $MABC$; denn die Ebene DEF steht nach Construction senkrecht auf dem Raume $MABC$ und DF senkrecht auf der Schnittlinie des Raumes mit der Ebene. Nun ist im rechtwinkligen Dreieck DEF jene gesuchte Höhe

$$DF = DE \sin \overline{xyz\,yzt}$$

wo $\sin \overline{xyz\,yzt}$ den Sinus der beiden Räume $MABC$ und $MBCD$ bedeutet. DE ist aber gleich $r_3 \frac{\sin yzt}{\sin yz}$, daher ist

$$24\,MABCD = r r_1 r_2 r_3 \sin xyz \sin \overline{xyz\,yzt} \frac{\sin yzt}{\sin yz}$$

Nun ist nach den früher gebrauchten Bezeichnungen

$$\sin^2 xyz = \mu_{11}, \quad \sin^2 yzt = \mu_{44}$$

$$\sin^2 \overline{xyz\,yzt} = 1 - \cos^2\varphi = \frac{\mu_{11}\mu_{44} - \mu_{14}\mu_{41}}{\mu_{11}\mu_{44}}$$

Für $\sin^2 yz$ wollen wir die Bezeichnung $\mu_{11\,44}$ einführen, weil dieses Sinusquadrat diejenige Determinante bedeutet, welche übrig bleibt, wenn man in $\varDelta$ die erste und vierte Zeile und Colonne fortlässt. Dann ist

$$(24\,MABCD)^2 = (r r_1 r_2 r_3)^2 \frac{\mu_{11}\mu_{44} - \mu_{14}\mu_{41}}{\mu_{11\,44}}$$

Der Ausdruck $\frac{\mu_{11}\mu_{44} - \mu_{14}\mu_{41}}{\mu_{11\,44}}$ ist nach einem bekannten Determinantensatze (Baltzer § 7, 3 der 5. Auflage) $= \varDelta$. Wir erhalten also

$$\sin^2 xyz \sin^2 \overline{xyz\,yzt} \frac{\sin^2 yzt}{\sin yz} = \varDelta$$

Die Determinante $\varDelta$ wollen wir durch $\sin^2 xyzt$ bezeichnen, weil sie ganz analog gebildet ist dem Ausdruck für $\sin^2 xyz$. Demnach ist

$$24\,MABCD = r r_1 r_2 r_3 \sin xyzt$$

Damit hätten wir den Inhalt des vierdimensionalen Pentaeders berechnet. Ganz allgemein lässt sich zeigen, dass der Inhalt des n-dimensionalen $(n+1)$seits multiplicirt mit $n!$ gleich ist

$$r r_1 \ldots r_{n-1} \sin uvw \ldots xyz \sin \overline{uvw \ldots xyz\,vw \ldots xyzt} \cdot \frac{\sin vw \ldots xyzt}{\sin vw \ldots xyz}$$

Wenn nun

$$\cos\varphi = \sqrt{\frac{\mu_{1n}\mu_{n1}}{\mu_{11}\mu_{nn}}}$$

ist, dann ist jener Ausdruck

$$= r r_1 r_2 \ldots r_{n-1} \sin uvw \ldots xyzt$$

und umgekehrt, wenn wir auf einem anderem Wege, ohne Zuhilfenahme des Winkels φ gefunden haben, dass der Inhalt des n-dimensionalen $(n+1)$ ecks

$$\frac{1}{n!}\, r r_1 \ldots r_{n-1} \sin uvw \ldots xyzt$$

ist, dann können wir daraus schliessen, dass

$$\cos\varphi = \sqrt{\frac{\mu_{1n}\mu_{n1}}{\mu_{11}\mu_{nn}}}$$

ist. Um den Inhalt des vierdimensionalen Pentaeders ohne Zuhilfenahme des Winkels φ zu berechnen, müssen wir uns zunächst den analytischen Ausdruck eines Raumes bilden, der auf ein Coordinatensystem von vier auf einander senkrecht stehenden Achsen bezogen ist. Ein Raum ist bestimmt durch 4 Punkte. Die Coordinaten derselben seien

$$P_0 = (x_0, y_0, z_0, t_0), \quad P_1 = (x_1, y_1, z_1, t_1), \quad P_2 = (x_2, y_2, z_2, t_2)$$
$$P_3\ (x_3, y_3, z_3, t_3)$$

Jetzt nehmen wir auf $P_0 P_1$ einen Punkt P_1' an, so dass $P_0 P_1' P_0 P_1 = u$ ist. Dann sind die Coordinaten des Punktes P_1'

$$\begin{aligned} x_1' &= x_0 + (x_1 - x_0)u \\ y_1' &= y_0 + (y_1 - y_0)u \\ z_1' &= z_0 + (z_1 - z_0)u \\ t_1' &= t_0 + (t_1 - t_0)u \end{aligned}$$

Ebenso nehmen wir auf $P_0 P_2$, $P_0 P_3$ Punkte P_2', P_3' an, so dass

$$P_0 P_2' : P_0 P_2 = v \quad \text{und} \quad P_0 P_3' : P_0 P_3 = w$$

ist. Dann bilden wir ein Parallelepiped mit den Kanten $P_0 P_1'$, $P_0 P_2'$, $P_0 P_3'$. Der Punkt, welcher P_0 gegenüberliegt, heisse P. Die Coordinaten desselben sind:

$$\begin{aligned} x &= x_0 + (x_1 - x_0)u + (x_2 - x_0)v + (x_3 - x_0)w \\ y &= y_0 + (y_1 - y_0)u + (y_2 - y_0)v + (y_3 - y_0)w \\ z &= z_0 + (z_1 - z_0)u + (z_2 - z_0)v + (z_3 - z_0)w \\ t &= t_0 + (t_1 - t_0)u + (t_2 - t_0)v + (t_3 - t_0)w \end{aligned}$$

Eliminirt man daraus u, v und w, so ist:

$$\begin{vmatrix} x-x_0 & y-y_0 & z-z_0 & t-t_0 \\ x_1-x_0 & y_1-y_0 & z_1-z_0 & t_1-t_0 \\ x_2-x_0 & y_2-y_0 & z_2-z_0 & t_2-t_0 \\ x_3-x_0 & y_3-y_0 & z_3-z_0 & t_3-t_0 \end{vmatrix} = 0$$

Wenn wir nun u, v und w alle möglichen Werte durchlaufen lassen, dann durchläuft der Punkt P den ganzen Raum; jene Determinante ist also der analytische Ausdruck des Raumes, der durch die Punkte $P_0 P_1 P_2 P_3$ hindurchgeht. Ist die Determinante nicht $= 0$, sondern etwa $= R$, dann liegt auch P nicht in dem Raume $P_0 P_1 P_2 P_3$. Dann ist R der Inhalt eines vierdimensionalen Parallelepipeds mit den Kanten $P_0 P$, $P_0 P_1$, $P_0 P_2$, $P_0 P_3$ oder der vierundzwanzigfache Inhalt des vierdimensionalen Pentaeders $P P_0 P_1 P_2 P_3$. Nun sei

$$P_0 P = r$$
$$P_0 P_1 = r_1$$
$$P_0 P_2 = r_2$$
$$P_0 P_3 = r_3$$

Ferner seien die Winkel, welche $P_0 P$ mit den Coordinatenachsen bildet $= \alpha, \beta, \gamma, \delta$ und dementsprechend die Winkel der übrigen Kanten mit den Achsen

$$= (\alpha_1, \beta_1, \gamma_1, \delta_1), \quad (\alpha_2, \beta_2, \gamma_2, \delta_2), \quad (\alpha_3, \beta_3, \gamma_3, \delta_3).$$

Dann wird:

$$R = \begin{vmatrix} r\cos\alpha & r\cos\beta & r\cos\gamma & r\cos\delta \\ r_1\cos\alpha_1 & r_1\cos\beta_1 & r_1\cos\gamma_1 & r_1\cos\delta_1 \\ r_2\cos\alpha_2 & r_2\cos\beta_2 & r_2\cos\gamma_2 & r_2\cos\delta_2 \\ r_3\cos\alpha_3 & r_3\cos\beta_3 & r_3\cos\gamma_3 & r_3\cos\delta_3 \end{vmatrix}$$

$$= r r_1 r_2 r_3 \begin{vmatrix} \cos\alpha & \cos\beta & \cos\gamma & \cos\delta \\ \cos\alpha_1 & \cos\beta_1 & \cos\gamma_1 & \cos\delta_1 \\ \cos\alpha_2 & \cos\beta_2 & \cos\gamma_2 & \cos\delta_2 \\ \cos\alpha_3 & \cos\beta_3 & \cos\gamma_3 & \cos\delta_3 \end{vmatrix}$$

Erheben wir den Factor von $r r_1 r_2 r_3$ in's Quadrat, dann wird derselbe gleich

$$\begin{vmatrix} \cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma+\cos^2\delta & \cos\alpha\cos\alpha_1+\cos\beta\cos\beta_1+\cos\gamma\cos\gamma_1+\cos\delta\cos\delta_1 & \cdot & \cdot \\ \cos\alpha\cos\alpha_1+\cos\beta\cos\beta_1+\cos\gamma\cos\gamma_1+\cos\delta\cos\delta_1 & \cos^2\alpha_1+\cos^2\beta_1+\cos^2\gamma_1+\cos^2\delta_1 & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{vmatrix}$$

Ziehen wir nun durch den Coordinatenanfangspunkt O eine Strecke $OO_1 = 1$ parallel zu $P_0 P$ und projiciren wir dieselbe auf die Achsen, dann sind die Projectionen $= \cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$, $\cos\delta$ und wir erhalten durch wiederholte Anwendung des Pythagoräischen Lehrsatzes:

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma + \cos^2\delta = 1$$

Ziehen wir nun durch O eine Strecke $OO_2 = 1$ parallel zu $P_0 P_1$ und bezeichnen wir den Winkel $O_1 O O_2$ mit xy, dann ist

$$(O_1 O_2)^2 = 2 - 2\cos xy$$

nach einer bekannten Formel der Trigonometrie. Drücken wir nun $(O_1 O_2)^2$ durch die Coordinaten der Punkte O_1 und O_2 aus, so erhalten wir:

$$(O_1 O_2)^2 = (\cos\alpha - \cos\alpha_1)^2 + (\cos\beta - \cos\beta_1)^2 + (\cos\gamma - \cos\gamma_1)^2 + (\cos\delta - \cos\delta_1)^2 = 2 - 2(\cos\alpha\cos\alpha_1 + \cos\beta\cos\beta_1 + \cos\gamma\cos\gamma_1 + \cos\delta\cos\delta_1)$$

Nun war aber

$$(O_1 O_2)^2 = 2 - 2\cos xy$$

also ist

$$\cos\alpha\cos\alpha_1 + \cos\beta\cos\beta_1 + \cos\gamma\cos\gamma_1 + \cos\delta\cos\delta_1 = \cos xy$$

Setzt man diese Werte ein in die zuletzt betrachtete Determinante, dann wird dieselbe gleich

$$\begin{vmatrix} 1 & \cos xy & \cos xz & \cos xt \\ \cos xy & 1 & \cos yz & \cos yt \\ \cos xz & \cos yz & 1 & \cos zt \\ \cos xt & \cos yt & \cos zt & 1 \end{vmatrix}$$

Diese Determinante haben wir früher mit $\sin^2 xyzt$ bezeichnet. Es ist also

$$24 P P_0 P_1 P_2 P_3 = r r_1 r_2 r_3 \sin xyzt$$

Daraus ergiebt sich, wie wir früher gesehen haben, der bekannte Wert für $\cos\varphi$. Wir haben also unsere Aufgabe gelöst, den Winkel φ zu berechnen ohne Zuhilfenahme von sphärischer Tetraedrometrie.

Der Winkel, den zwei Räume von beliebiger Dimension mit einander bilden, lässt sich nach ganz derselben Methode berechnen. Es ist stets:

$$\cos\varphi = \sqrt{\frac{\mu_{ik}\,\mu_{ki}}{\mu_{ii}\,\mu_{kk}}}$$

XXI.

Ueber eine Analogie des Laplace'schen Determinantensatzes.

Von

Ernst Liers.

Nach dem Laplace'schen Determinantensatz kann man eine Determinante vom Grade n zerlegen in Producte, deren einer Factor eine Unterdeterminante vom Grade m, der andere eine Unterdeterminante vom Grade $n-m$ ist. In Folgendem soll nun gezeigt werden, dass man die Determinante auch in Producte zerlegen kann, deren beide Factoren Unterdeterminanten vom Grade m sind; allerdings muss dann die Determinante noch multiplicirt sein mit einer Unterdeterminante vom Grade $2m-n$.

Es sei z. B. gegeben die Determinante

$$R = \Sigma \pm a_{11}\, a_{22}\, a_{33}\, a_{44}\, a_{55}\, a_{66}$$

Die Unterdeterminanten 5. Grades wollen wir mit α_{ik} bezeichnen. Dann ist nach einem bekannten Determinantensatz (Baltzer § 7, 3 der 5. Anflage):

$$R^3 \frac{\partial^4 R}{\partial a_{11}\, \partial a_{22}\, \partial a_{55}\, \partial a_{66}} = \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{15} & \alpha_{16} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{25} & \alpha_{26} \\ \alpha_{51} & \alpha_{52} & \alpha_{55} & \alpha_{56} \\ \alpha_{61} & \alpha_{62} & \alpha_{65} & \alpha_{66} \end{vmatrix} =$$

$$\begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \alpha_{55} & \alpha_{56} \\ \alpha_{65} & \alpha_{66} \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{51} & \alpha_{52} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \alpha_{25} & \alpha_{26} \\ \alpha_{65} & \alpha_{66} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{61} & \alpha_{62} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \alpha_{25} & \alpha_{26} \\ \alpha_{65} & \alpha_{66} \end{vmatrix}$$

$$+ \begin{vmatrix} \alpha_{21} & \alpha_{22} \\ \alpha_{51} & \alpha_{52} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \alpha_{15} & \alpha_{16} \\ \alpha_{65} & \alpha_{66} \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} \alpha_{21} & \alpha_{22} \\ \alpha_{61} & \alpha_{62} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \alpha_{15} & \alpha_{16} \\ \alpha_{55} & \alpha_{56} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \alpha_{51} & \alpha_{52} \\ \alpha_{61} & \alpha_{62} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \alpha_{15} & \alpha_{16} \\ \alpha_{25} & \alpha_{26} \end{vmatrix}$$

Diese Determinanten 2. Grades stellen zweite partielle Differentialquotienten der Determinante R dar; z. B. ist

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = R \frac{\partial^2 R}{\partial a_{11}\, \partial a_{22}}$$ u. s. w. Wir erhalten also:

$$R \frac{\partial^4 R}{\partial a_{11}\, \partial a_{22}\, \partial a_{55}\, \partial a_{66}} = \frac{\partial^2 R}{\partial a_{11}\, \partial a_{22}} \cdot \frac{\partial^2 R}{\partial a_{55}\, \partial a_{66}} - \frac{\partial^2 R}{\partial a_{11}\, \partial a_{52}} \cdot \frac{\partial^2 R}{\partial a_{25}\, \partial a_{66}}$$
$$+ \frac{\partial^2 R}{\partial a_{11}\, \partial a_{62}} \cdot \frac{\partial^2 R}{\partial a_{25}\, \partial a_{66}} + \frac{\partial^2 R}{\partial a_{21}\, \partial a_{52}} \cdot \frac{\partial^2 R}{\partial a_{15}\, \partial a_{66}}$$
$$- \frac{\partial^2 R}{\partial a_{21}\, \partial a_{62}} \cdot \frac{\partial^2 R}{\partial a_{15}\, \partial a_{56}} + \frac{\partial^2 R}{\partial a_{51}\, \partial a_{62}} \cdot \frac{\partial^2 R}{\partial a_{15}\, \partial a_{26}}$$

Bezeichnen wir nun die Unterdeterminanten von R in der von Vandermonde eingeführten Weise durch einen Bruch, dessen Zähler die Zeilen, dessen Nenner die Colonnen bedenten, dann ist:

$$R \frac{34}{34} = \frac{1234}{1234} \cdot \frac{3456}{3456} - \frac{1235}{1234} \cdot \frac{2456}{3456} + \frac{1236}{1234} \cdot \frac{1456}{3456}$$
$$+ \frac{2345}{1234} \cdot \frac{2345}{3456} - \frac{2346}{1234} \cdot \frac{1345}{3456} + \frac{3456}{1234} \cdot \frac{1234}{3456}$$

Damit haben wir eine Determinante vom Grade 6 multiplicirt mit einer Unterdeterminante vom Grade 2 zerlegt in Producte, deren Factoren Unterdeterminanten vom Grade 4 sind. In derselben Weise lässt sich zeigen, dass man ganz allgemein eine Determinante vom Grade n multiplicirt mit einer Unterdeterminante vom Grade $2m-n$ zerlegen kann in Producte, deren Factoren Unterdeterminanten vom Grade m sind. Man beweist diesen Satz, indem man eine Determinante vom Grade $2(n-m)$, deren Elemente Unterdeterminanten vom Grade $n-1$ der Determinante vom Grade n sind, zerlegt in Determinanten vom Grade $n-m$.

XXII.

Ueber eine Schar von Curven auf einer Tangentenfläche.

Von

R. Hoppe.

Ein von Hahich gefundener Satz bezüglich ebener Curven, enthalten in seiner Abhandlung: „Sur un système particulier de coordonnées“ Annali di Matematica 2. Reihe Bd. II. p. 134—150 — hat zur unmittelbaren Folge einen andern Satz, welcher gleicherweise für Raumcurven gilt. Da der letztere der einfachere ist, und in seinem Beweise der erstere als eine Synthese aus ihm mitbewiesen erscheint, so kehre ich die Deductionsfolge um und stelle als Erweiterung des Hahich'schen folgenden Lehrsatz auf.

„Alle Curven, welche die Tangenten einer festen Urcurve unter gleichen Winkeln schneiden, haben die Eigenschaft, dass ihre Krümmungsmittelpunkte entsprechend jeder Tangente mit deren Berührungspunkte in gerader Linie liegen.“

Zum Beweise genügt die blosse Entwickelung der analytischen Bestimmungsstücke einer beliebigen Trajectorie. Seien xyz die Coordinaten eines Punkts P der Urcurve s; $x_1 y_1 z_1$ die des entsprechenden Punkts P_1 einer Trajectorie s_1; $x_0 y_0 z_0$ die ihres Krümmungsmittelpunkts; u_1 die Strecke PP_1 längs der Tangente; fgh, $f'g'h'$, lmn die Richtungscosinus der Tangente, Haupt- und Binormale von s, mit Index 1 von s_1; τ und ϑ der Krümmungs- und Torsionswinkel, mithin $\frac{\partial s}{\partial \tau}$ der Krümmungsradius, und bezeichne der Accent die Differentiation nach τ, bei $f_1 g_1 h_1$ nach τ_1. Dann sind die Gleichungen von s_1:

$$x_1 = x + u_1 f; \quad \text{etc.} \tag{1}$$

Sie geben nach Differentiation:

$$f_1 \partial s_1 = f \partial(u_1 + s) + f' u_1 \partial \tau; \quad \text{etc.}$$

woraus:

$$\partial s_1{}^2 = [\partial(u_1 + s)]^2 + (u_1 \partial \tau)^2$$

zerlegbar in

$$\frac{\partial(u_1 + s)}{\partial s_1} = \cos\mu; \quad \frac{u_1 \partial \tau}{\partial s_1} = \sin\mu \tag{2}$$

so dass

$$f_1 = f\cos\mu + f'\sin\mu; \quad \text{etc.} \tag{3}$$

wird. Nach neuer Differentiation kommt:

$$f_1' \partial \tau_1 = -f \partial(\mu + \tau)\sin\mu + f' \partial(\mu + \tau)\cos\mu + l \partial \vartheta \sin\mu; \quad \text{etc.}$$

woraus:

$$\partial \tau_1{}^2 = [(\mu + \tau)]^2 + (\partial \vartheta \sin\mu)^2$$

zerlegbar in

$$\frac{\partial(\mu + \tau)}{\partial \tau_1} = \cos\nu; \quad \frac{\partial \vartheta \sin\mu}{\partial \tau_1} = \sin\nu \tag{4}$$

daher ist

$$f_1' = (-f\sin\mu + f'\cos\mu)\cos\nu + l\sin\nu; \quad \text{etc.} \tag{5}$$

Ferner hat man nach der zweiten Gl. (2)

$$x_0 = x_1 + \frac{\partial s_1}{\partial \tau_1} f_1' = x + u_1 \left(f + \frac{\partial \tau}{\partial \tau_1 \sin\mu} f_1'\right); \quad \text{etc.}$$

Gleichungen von der Form

$$x_0 = x + u_1 L; \quad y_0 = y + u_1 M; \quad z_0 = z + u_1 N \tag{6}$$

wo

$$L = fA + f'B + lC; \quad M = gA + g'B + mC$$
$$N = hA + h'B + nC \tag{7}$$

und nach Gl. (4) (5)

$$A = \frac{\mu' + \sin^2\nu}{\mu' + 1}; \quad B = \frac{\cos\mu\cos^2\nu}{\mu' + 1}; \quad C = \frac{\sin\nu\cos\nu}{(\mu' + 1)\sin\mu} \tag{8}$$

Den Gleichungen (3) zufolge ist μ der Winkel zwischen den Tangenten an s_1 und s, welcher nach Voraussetzung für alle Trajectorien gleich sein soll. Die Gl. (4) zeigen, dass demzufolge auch

$$\nu = \operatorname{arctg} \frac{\vartheta' \sin\mu}{\mu' + 1}$$

für alle Trajectorien dieselbe Grösse ist. Alle andern in den Ausdrücken von L, M, N enthaltenen Grössen gehören der Urcurve an, sind also auch gemeinsam. Da nun nach Gl. (6) L, M, N sich ver-

halten wie die Richtungscosinus der von P ausgehenden Geraden G, auf welcher der Krümmungsmittelpunkt von s_1 liegt, so ist diese Gerade dieselbe für alle Trajectorien, was zu beweisen war.

Setzt man zur Abkürzung

$$r^2 = A^2 + B^2 + C^2 = L^2 + M^2 + N^2$$

so sind

$$\frac{L}{r}, \quad \frac{M}{r}, \quad \frac{N}{r}$$

die Richtungscosinus jener für das ganze Trajectoriensystem gemeinsamen Geraden, und

$$u_1 r, \quad u_2 r, \quad u_3 r, \quad \ldots$$

die Strecken, welche die Krümmungsmittelpunkte von $s_1, s_2, s_3 \ldots$ auf ihr von P aus begrenzen.

Die Gerade G variirt mit μ. Daher kann man fragen, ob sie für zwei verschiedene μ, sie seien μ_1 und μ_2, dieselbe sein kann? Hinreichende und notwendige Bedingung ist, dass für irgend eine Function q

$$A_2 = qA_1; \quad B_2 = qB_1; \quad C_2 = qC_1$$

sei. Für gegebene Curve s stehen 3 Grössen μ_1, μ_2 und q zur Verfügung. Die allgemeine Untersuchung der Frage scheint aussichtslos. Setzt man aber $\vartheta' = 0$, mithin $\nu = 0$, so erfüllen die Werte

$$\mu_2 = 2R - \mu_1; \quad q = \frac{1 + \mu_1'}{1 - \mu_1'}$$

alle Bedingungen, und diese Lösung enthält den Habich'schen Satz. Für Raumcurven habe ich keinen entsprechenden Satz gefunden.

Umgekehrt können wir folgern: Entspricht für eine Urcurve s jedem μ_1 ein μ_2 mit gemeinsamer Geraden G, so muss diese Gerade allen durch $\mu = \mu_1$ charakterisirten Trajectorien gemeinsam sein. Da also durch den Habich'schen Satz das hier Vorausgesetzte für ebene Curven s, und nur für ebene, bewiesen ist, so folgt aus ihm für ebene Curven s, und nur für ebene, der anfangs aufgestellte Lehrsatz, ist mithin dieser, sofern er für beliebige Raumcurven gilt, eine Erweiterung von ihm.

XXIII.

Ueber geradlinige Asymptoten algebraischer Curven.

Von

Oberlehrer Dr. **A. Himstedt.**

§ 1. Die allgemeine Gleichung einer Curve $n$ter Ordnung hat die Form:

$$(1) \ldots A_0 + (A_1 x + B_1 y) + (A_2 x^2 + B_2 xy + C_2 y^2) + \ldots$$
$$+ (A_n x^n + B_n x^{n-1} y + \ldots + P_n x y^{n-1} + Q_n y^n) = 0$$

Um die Richtungen zu bestimmen, nach denen sich die Curve in's Unendliche erstreckt, führen wir Polarcoordinaten ein, indem wir

$$x = r \cdot \cos\theta \quad \text{und} \quad y = r \cdot \sin\theta$$

setzen. Dadurch geht die Gleichung (1) über in

$$(2) \ldots A_0 + (A_1 \cos\theta + B_1 \sin\theta) \cdot r + (A_2 \cos^2\theta + B_2 \cos\theta \sin\theta + C_2 \sin^2\theta) r^2$$
$$+ \ldots + (A_n \cos^n\theta + B_n \cos^{n-1}\theta \sin\theta + \ldots$$
$$+ P_n \cos\theta \sin^{n-1}\theta + Q_n \sin^n\theta) r^n = 0$$

Soll sich nun diese Curve in's unendliche erstrecken, so muss der Radiusvector $r = \infty$ werden, und dies ist der Fall, wenn:

$$(3) \ldots A_n \cos^n\theta + B_n \cos^{n-1}\theta \sin\theta + \ldots + Q_n \sin^n\theta = 0$$

gesetzt wird, wie sich leicht ergiebt, wenn wir die obige Gleichung durch r^n dividiren und dann $r = \infty$ setzen. Dividiren wir ferner die Gleichung (3) durch $\cos^n\theta$, so ergiebt sich:

$$(4) \ldots A_n + B_n \operatorname{tang}\theta + \ldots + Q_n \operatorname{tang}^n\theta = 0$$

und die Auflösung dieser Gleichung nach $\tang\theta$ ergieht dann diejenigen Richtungen, für welche der Radiusvector unendlich gross wird. Da die Gleichung (4) in Bezug auf $\tang\theta$ vom $n$ten Grade ist, so folgt hieraus der bekannte Satz:

(5) . . . „Für jede Curve $n$ter Ordnung giebt es im allgemeinen n „verschiedene Richtungen, nach denen sich dieselbe in's „Unendliche erstreckt."

Diese Richtungen mögen die Asymptotenrichtungen der Curve genannt werden.

Gehen wir von Gleichung (3) wieder zu rechtwinkligen Coordinaten über, so ergicht sich:

(6) . . . $A_n x^n + B_n x^{n-1} y + \ldots + Q_n y^n = 0$

Diese Gleichung repräsentirt bekanntlich n durch den Anfangspunkt gehende Gerade, und nach dem Vorigen ist klar, dass jede dieser Geraden die Curve im Unendlichen durchschneidet. Wir können daher folgende Regel aufstellen:

(7) . . . „Um die Asymptotenrichtungen einer algebraischen Curve „kennen zu lernen, setze man die Glieder höchster Dimen„sion gleich null und zerlege die linke Seite dieser Glei„chung in lineare Factoren."

Dass jede der in (6) enthaltenen Geraden die Curve im Unendlichen durchschneidet, lässt sich auch in folgender Weise darthun. Angenommen, es sei:

$$ax + by = 0$$

eine dieser Geraden. Eliminiren wir eine Veränderliche, z. B. y, aus dieser Gleichung und der allgemeinen Curvengleichung (1), so erhalten wir offenbar eine Gleichung, welche in Bezug auf x vom Grade $n-1$ ist. Nun kann aber jede Gleichung vom Grade $n-1$ angesehen werden als eine Gleichung $n$ten Grades, welche $n-1$ endliche und eine unendliche grosse Wurzel hat. Denn ist

(8) . . . $Ax^n + Bx^{n-1} + Cx^{n-2} + \ldots + Px + Q = 0$

eine Gleichung $n$ten Grades, und setzen wir $x = \frac{1}{z}$, so dass

(9) . . . $A + Bz + Cz^2 + \ldots + Pz^{n-1} + Qz^n = 0$

wird, so erkennt man leicht, dass für $A = 0$ die Gleichung (9) eine Wurzel $z = 0$, und folglich die Gleichung (8) eine unendlich grosse Wurzel hat, und dass gleichzeitig der Grad dieser Gleichung für

$A = 0$ sich um eine Einheit erniedrigt. Wäre ferner $A = B = 0$, so hätte (9) zwei Wurzeln $s = 0$ und folglich (8) zwei unendlich grosse Wurzeln, d. h. jede Gleichung vom Grade $n - 2$ kann angesehen werden als eine Gleichung $n$ten Grades, welche zwei unendlich grosse Wurzeln hat, u. s. w.

Die linearen Factoren der Gleichung (6) sind entweder reell oder imaginär. Ist n eine gerade Zahl, so kann es geschehen, dass sämtliche dieser Factoren imaginär sind. Wir können dann schliessen, dass sich die Curve in diesem Falle überhaupt nicht in's Unendliche erstreckt, sondern ganz im Endlichen gelegen ist, wie z. B. die Ellipse, die Lemniskate u. s. w. Wenn aber n eine ungerade Zahl ist, so muss mindestens ein Factor der Gleichung (6) reell sein, da die imaginären Factoren immer paarweise auftreten. Es folgt hieraus unter Anderem der bekannte Satz, dass eine Curve ungerader Ordnung sich stets in's Unendliche erstreckt.

§ 2. Wir wollen jetzt annehmen, dass unsere Curve in der Richtung einer der Coordinatenachsen, z. B. der x-Achse, sich in's Unendliche erstreckt. Dann ist einer der linearen Factoren, in welche sich die Glieder höchster Dimension zerlegen lassen, gleich y, und die Gleichung der Curve hat dann unmittelbar die Form:

$$y \cdot V_{n-1} + U_{n-1} + U_{n-2} + \ldots + U_0 = 0$$

wo die U und V ganze Functionen von x und y bedeuten, deren Grad durch den Index gegeben ist. Ordnen wir vorstehende Gleichung nach fallenden Potenzen von x, so erhalten wir ein Resultat von der Form:

$$(10) \ldots x^{n-1}(A_0 + A_1 y) + x^{n-2}(B_0 + B_1 y + B_2 y^2) + x^{n-3}(C_0 + C_1 y + C_2 y^2 + C_3 y^3) + \ldots = 0$$

Jede Parallele zur x Achse hat mit dieser Curve einen Punkt im Unendlichen gemein, denn die Substitution $y = a$ liefert in Bezug auf x eine Gleichung vom Grade $n - 1$, und diese hat, nach dem, was in dem vorigen § bewiesen ist, eine unendlich grosse Wurzel. Unter allen diesen Geraden giebt es eine, welche mit der Curve zwei Punkte im Unendlichen gemein hat. Diese Gerade ist:

$$(11) \ldots \quad A_0 + A_1 y = 0$$

Denn durch Elimination von y aus (10) und (11) resultirt eine Gleichung, welche in Bezug auf x vom Grade $n - 2$ ist und demnach zwei unendlich grosse Wurzeln hat. Die Gerade (2) wird eine geradlinige Asymptote der Curve genannt. Ist $A_1 = 0$, so liegt diese

Asymptote ihrer ganzen Ausdehnung nach im Unendlichen, wie z. B. bei der Apollonischen Parabel:

$$ax - y^2 = 0$$

Ist dagegen A_1 von null verschieden, so ist (11) eine Gerade im endlichen Abstande vom Anfangspunkte. In letzterem Falle wollen wir diese Gerade als neue x-Achse wählen; dann geht die Gleichung (10) in folgende über:

$$(12)\ \ldots\ x^{n-1}\cdot y + x^{n-2}(a_0 + a_1 y + a_2 y^2) + x^{n-3}(b_0 + b_1 y + b_2 y^2 + b_3 y^3) + \ldots = 0$$

und wir wissen, dass dann die x-Achse selbst eine Asymptote der Curve ist. Um nun zu untersuchen, wie die Curve zu dieser Asymptote liegt, betrachten wir die der Asymptote benachbarte Parallele:

$$(13)\ \ldots\ \qquad y = h, \quad \lim h = 0$$

und bestimmen die Schnittpunkte von (12) und (13). Zu dem Zwecke eliminiren wir y aus diesen beiden Gleichungen und erhalten:

$$(14)\ \ldots\ h\cdot x^{n-1} + x^{n-2}(a_0 + a_1 h + a_2 h^2) + x^{n-3}(b_0 + b_1 h + b_2 h^2 + b_3 h_3) + \ldots = 0$$

Wollen wir die Wurzeln dieser Gleichung nur näherungsweise berechnen, so dürfen, da $\lim h = 0$ ist, die unendlich kleinen Grössen $a_1 h$ und $a_2 h^2$ gegen die endliche Grösse a_0 vernachlässigt werden, ebenso $b_1 h$, $b_2 h^2$ und $b_3 h^3$ gegen b_0 u. s. w., so dass die vorige Gleichung sich zu

$$h x^{n-1} + a_0 x^{n-2} + b_0 x^{n-3} + \ldots = 0$$

vereinfacht. Sollen aber ferner nur diejenigen Wurzeln dieser Gleichung in Betracht gezogen werden, welche unendlich gross sind, so dürfen auch $b_0 x^{n-3}$ und alle niedrigeren Potenzen von x gegen die Glieder $a_0 x^{n-2}$ und $h x^{n-1}$ vernachlässigt werden, denn unendlich grosse Grössen von niedrigerer Ordnung kommen gegen solche von höherer Ordnung nicht in Betracht. Unsere Gleichung vereinfacht sich also weiter auf

$$h x^{n-1} + a_0 x^{n-2} = 0$$

und hieraus folgt:

$$(15)\ \ldots\ \qquad x = -\frac{a_0}{h}$$

Die der Asymptote benachbarte Gerade (13) schneidet also die Curve im Unendlichen in demjenigen Punkte, dessen Abscisse durch (15) gegeben ist. Da nun x mit h gleichzeitig sein Vorzeichen ändert,

so folgt, dass von den beiden der x-Achse benachbarten Parallelen $y = +h$ und $y = -h$, die eine die Curve im positiv Unendlichen, die andere im negativ Unendlichen durchschneidet, oder mit andern Worten, die Curve liegt im Unendlichen auf verschiedenen Seiten ihrer Asymptote. (Fig. 1). Dies ist z. B. bei der gleichseitigen Hyperbel

$$xy - a^2 = 0$$

der Fall.

§ 3. Die Resultate des vorigen Paragraphen verlieren ihre Giltigkeit in dem Falle, wo in der Gleichung (14) der Coefficient a_0 verschwindet. Dann reducirt sich diese Gleichung, wenn wir wieder $\lim h = 0$ und $\lim x = \infty$ voraussetzen, auf

$$h x^{n-1} + b_0 x^{n-3} = 0$$

und hieraus folgt:

$$(16) \ldots \qquad x = \pm \sqrt{-\frac{b_0}{h}}$$

Die Gerade $y = h$ schneidet also die Curve nur dann in reellen Punkten, wenn der Ausdruck $\frac{b_0}{h}$ eine negative Grösse ist, d. h. entweder nur für positive oder nur für negative Werte von h. Wir schliessen daraus, dass die Curve im Unendlichen auf einer und derselben Seite ihrer Asymptote liegt, und zwar, wie wir aus dem doppelten Vorzeichen der Wurzelgrösse erkennen, im positiv und im negativ Unendlichen. (Fig. 2). Die Asymptote $y = 0$ schneidet in diesem Falle die Curve dreimal im Unendlichen, denn setzen wir $y = 0$ in die Curvengleichung ein, so erniedrigt sich der Grad derselben offenbar um 3 Einheiten. Die Curve besitzt demnach im Unendlichen einen Wendepunkt, wie dies z. B. bei der Hyperbel dritter Ordnung

$$x^2 y - a^3 = 0$$

der Fall ist.

Nehmen wir ferner an, dass in der Gleichung der Curve (12) auch der Coefficient b_0 verschwindet, dass also $a_0 = b_0 = 0$ ist, so erhalten wir aus (14) die reducirte Gleichung:

$$h x^{n-1} + c_0 x^{n-4} = 0$$

und hieraus

$$(17) \ldots \qquad x = \sqrt[3]{-\frac{c_0}{h}}$$

Wie man sieht, ist die Abscisse x jetzt wieder für jedes positive oder negative h reell, und wechselt gleichzeitig mit h sein Zeichen,

d. h. die Curve liegt im Unendlichen auf verschiedenen Seiten ihrer Asymptote, und zwar im positiv und im negativ Unendlichen, wie in Fig. 1. Ferner hat die Asymptote jetzt 4 Punkte mit der Curve im Unendlichen gemein, denn der Grad der Curvengleichung wird durch die Substitution $y = 0$ offenbar um 4 Einheiten erniedrigt. Die Curve besitzt in diesem Falle im Unendlichen einen Undulationspunkt. Als Beispiel führen wir die Hyperbel vierter Ordnung an:

$$x^3 y - a^4 = 0$$

Wie diese Untersuchungen weiter fortzusetzen sind, ist leicht ersichtlich. Wir können daher den folgenden Satz aufstellen:

(18) . . . „Eine algebraische Curve liegt im Unendlichen auf derselben oder auf verschiedenen Seiten ihrer Asymptote, „je nachdem diese mit der Curve eine ungerade oder gerade Anzahl von Punkten im Unendlichen gemein hat."

§ 4. Wir wollen jetzt den Fall untersuchen, wo zwei der Asymptotenrichtungen in dieselbe Gerade, z. B. die x-Achse zusammenfallen. Die Gleichung unserer Curve hat dann offenbar die Form:

$$y^2 \cdot V_{n-2} + U_{n-1} + U_{n-2} + \cdot \cdot \cdot + U_0 = 0$$

oder nach fallenden Potenzen von x geordnet:

$$(19) \ldots A x^{n-1} + x^{n-2}(A_0 + A_1 y + A_2 y^2)$$
$$+ x^{n-3}(B_0 + B_1 y + B_2 y^2 + B_3 y^3) + \cdot \cdot \cdot = 0$$

Jede Parallele zur x-Achse schneidet die Curve einmal im Unendlichen, denn die Substitution $y = a$ erniedrigt den Grad der Gleichung um eine Einheit. Allein es giebt jetzt keine zur x-Achse parallele Asymptote, so lange die Constante A von null verschieden ist. Ist jedoch $A = 0$, so schneidet jede Parallele zur x-Achse die Curve zweimal im Unendlichen, und die Curve hat alsdann einen Doppelpunkt im Unendlichen. Unter allen diesen Geraden giebt es nun zwei, welche mit der Curve 3 Punkte im Unendlichen gemein haben, und welche daher die beiden Asymptoten des unendlich fernen Doppelpunktes genannt werden. Diese beiden Asymptoten, welche offenbar durch die Gleichung

$$(20) \ldots \quad A_0 + A_1 y + A_2 y^2 = 0$$

gegeben sind, können reell oder imaginär sein. Lässt sich die linke Seite der vorstehenden Gleichung nicht in reelle Factoren zerlegen, so hat die Curve zwei imaginäre Asymptoten und im Unendlichen einen isolirten Punkt, woraus wir dann schliessen, dass die Curve sich in

diesem Falle überhaupt nicht in der Richtung der x-Achse in's Unendliche erstreckt, wie z. B. die Curve

$$x(a^2+y^2)-a^3=0$$

Im andern Falle sei

$$A_0+A_1y+A_2y^2 \equiv A_2(y-a)(y-a')$$

wo a und a' wei reelle Grössen bedeuten. Die Curve hat dann die beiden reellen Asymptoten

$$y-a=0 \quad \text{und} \quad y-a'=0$$

und jede derselben hat mit der Curve 3 Punkte im Unendlichen gemein, wie sich durch Substitution unmittelbar aus der Gleichung (19) ergiebt, indem wir die Annahme $A=0$ berücksichtigen. Um nun zu untersuchen, wie die Curve in Bezug auf die Asymptoten liegt, bestimmen wir wieder, in derselben Weise wie vorher, die Schnittpunkte der Curve mit einer der Asymptote benachbarten Parallelen:

$$y-a=h, \quad \text{oder} \quad y-a'=h, \quad \lim h=0$$

Die Resultate sind offenbar dieselben wie im vorigen Paragraphen. So hat z. B. die Curve

$$x(a^2-y^2)-a^3=0$$

die beiden Asymptoten $a\pm y=0$, und zwar liegt die Curve im Unendlichen auf verschiedenen Seiten jeder Asymptote. Die Curve

$$x^2(a^2-y^2)-2ax(a+y)^2+a^4=0$$

liegt im Unendlichen auf derselben Seite der Asymptote $a-y=0$, dagegen auf verschiedenen Seiten der Asymptote $a+y=0$. Endliegt die Curve

$$x^2(a^2-y^2)-a^4=0$$

im Unendlichen auf derselben Seite der einen wie der andern Asymptote.

§ 5. Es bleibt jetzt noch der Fall zu betrachten übrig, wo nicht allein 2 Asymptotenrichtungen, sondern auch die beiden Asympten selbst zusammenfallen. Die Gleichung der Curve hat dann die Form:

$$Ax^{n-1}\cdot(y-a)^2+x^{n-3}(B_0+B_1y+B_2y^2+B_3y^3)+\ldots=0$$

oder, wenn wir die Gerade $y-a=0$ als neue x-Achse wählen:

$$(21) \;.\;.\;.\; x^{n-2} \,.\, y^2 + x^{n-3}(a_0 + a_1 y + a_2 y^2 + a_3 y^3) + x^{n-4}(b_0 + b_1 y + b_2 y^2 + b_3 y^3 + b^4 y^4) + \;.\;.\;. = 0$$

Um die Lage der Curve zu ihrer Asymptote $y = 0$ zu bestimmen, untersuchen wir, wie bisher, die Schnittpunkte der Curve mit einer zur Asymptote benachbarten Parallelen

$$y = h, \quad \lim h = 0$$

Durch Substitution dieses Wertes in die Gleichung (21) geht diese über in

$$(22) \;.\;.\;.\; h^2 x^{n-2} + x^{n-3}(a_0 + a_1 h + a_2 h^2 + a_3 h^3) + x^{n-4}(b_0 + b_1 h + b_2 h^2 + b_3 h^3 + b_4 h^4) + \;.\;.\;. = 0$$

woraus annäherungsweise

$$h^2 \,.\, x^{n-2} + a_0 \,.\, x^{n-3} = 0$$

oder

$$(23) \;.\;.\;.\; x = -\frac{a_0}{h_2}$$

folgt. Demnach hat die Abscisse x des unendlich fernen Schnittpunkts stets dasselbe Vorzeichen, gleichviel, ob h positiv oder negativ genommen wird. Wir schliessen daraus, dass die Curve im Unendlichen auf beiden Seiten ihrer Asymptote liegt und zwar so, dass beide Aeste sich der Asymptote in derselben Richtung nähern. (Fig. 3). Die Curve besitzt im Unendlichen einen Rückkehrpunkt der ersten Art, wie z. B. die Hyperbel dritter Ordnung:

$$xy^2 - a^3 = 0$$

Anders gestaltet sich jedoch die Sache, wenn in der Gleichung (21) der Coefficient a_0 verschwindet. In diesem Falle leiten wir aus der Gleichung (22) die folgende ab:

$$h^2 \,.\, x^{n-2} + a_1 h x^{n-3} + b_0 x^{n-4} = 0$$

oder, nach Division durch x^{n-4}:

$$h^2 x^2 + a_1 h x + b_0 = 0$$

Die Wurzeln dieser quadratischen Gleichung sind

$$(24) \;.\;.\;.\; x = \frac{-a_1 \pm \sqrt{a_1^{\,2} - 4 b_0}}{2h}$$

und von ihnen hängt offenbar die Lage der Curve ab. Ist zunächst $a_1^2 - 4b_0 < 0$, so sind jene Wurzeln complex, woraus wir schliessen können, dass die Curve dann überhaupt keine Aeste besitzt, welche sich in der Richtung der x-Achse in's Unendliche erstrecken. Die Curve besitzt im Unendlichen einen isolirten Punkt, dem in diesem Falle allerdings zwei reelle und zusammenfallende Asymptoten entsprechen. Als Beispiel führen wir die Curve an:

$$x^2y^2 - axy(2a+y) + 2a^4 = 0$$

Ist ferner $a_1^2 - 4b_0 > 0$, so sind die beiden Wurzeln (24) reell und verschieden, und die Curve besitzt dann 4 Aeste, welche sich in der Richtung der x-Achse in's Unendliche erstrecken Haben beide Wurzeln dasselbe Vorzeichen (und dies ist der Fall, wenn $b_0 > 0$), so hat die Curve die Gestalt der Fig. 4. Sind die Wurzeln von ungleichen Vorzeichen ($b_0 < 0$), so haben wir eine der Fig. 5 ähnliche Gestalt. In beiden Fällen besitzt die Curve im Unendlichen einen Selbstberührungspunkt. Als Beispiele seien erwähnt:

$$x^2y^2 - axy(2a+y) \pm \tfrac{1}{2}a^4 = 0$$

Ist endlich drittens $a_1^2 - 4b_0 = 0$, wie z. B. bei der Curve

$$x^3y^2 - 2a^2x^2y + a^4x - a^5 = 0$$

so werden die beiden Wurzeln (24) einander gleich. Da wir in diesem Falle noch keinen Schluss über die Lage der unendlichen Aeste machen können, so müssen wir noch weitere Glieder der Gleichung (22) in Betracht ziehen. Wir erhalten dann:

$$h^2x^{n-2} + (a_1h + a_2h^2)x^{n-3} + (b_0 + b_1h)x^{n-4} = 0$$

oder nach Division durch x^{n-4}:

$$h^2x^2 + (a_1h + a_2h^2)x + (b_0 + b_1h) = 0$$

Als Wurzeln dieser Gleichung finden wir, unter Berücksichtigung unserer Annahme, dass

$$a_1^2 - 4b_0 = 0$$

sein soll:

$$(25) \ldots x = \frac{-(a_1 + a_2h) \pm \sqrt{2h(a_1a_2 - 2b_1) + a_2^2h^2}}{2h}$$

Wie man sieht, sind diese Wurzeln nur für solche Werte des h reell, welche mit der Grösse $a_1a_2 - 2b_1$ dasselbe Zeichen haben, d. h. die unendlichen Aeste liegen auf derselben Seite der Asymptote. Da ferner beide Wurzeln stets dasselbe Vorzeichen haben, so

hat die Curve die Gestalt der Figur 6 und besitzt demnach im Unendlichen einen Rückkehrpunkt der zweiten Art. — Wie diese Untersuchungen weiter fortzusetzen sind, wenn noch weitere Coefficienten der Gleichung (21) verschwinden, ist leicht ersichtlich. Man wird stets finden, dass die Curve im Unendlichen entweder einen Rückkehrpunkt (erster oder zweiter Art), oder einen Selbstberührungspunkt oder endlich einen isolirten Punkt besitzt.

Zum Schluss wollen wir noch bemerken, dass auch in dem Falle, wo drei oder mehr der Asymptotenrichtungen zusammenfallen, die Lage der Curve in Bezug auf ihre Asymptoten in ganz ähnlicher Weise bestimmt werden kann.

Loebau, Westpreussen, im Juli 1893.

XXIV.

Ueber die Trisection des Winkels mittelst beliebiger fester Kegelschnitte.

Von

Dr. **Stephan Glaser,**

Oberlehrer am Falk-Realgymnasium zu Berlin.

In den letzten Heften des Archivs (II. Reihe, 10. Teil pag. 333 bis 336, 441—442, 11. Teil pag. 349—351) befindet sich eine Reihe von Mitteilungen des Herrn Panzerbieter, welche die Trisection des Winkels mittelst fester Kegelschnitte betreffen. Der Verfasser zeigt, dass und wie die Dreiteilung jedes Winkels mit Hülfe der gleichseitigen Hyperbel, der Hyperbel von der Excentricität 2 und der Ellipse von der Excentricität $\sqrt{\frac{2}{3}}$ ausgeführt werden kann. In einer weiteren Abhandlung (Wissenschaftliche Beilage zum Programm des Falk-Realgymnasiums zu Berlin, Ostern 1892) legt der Verfasser den Zusammenhang seiner Lösungen mit älteren Lösungen desselben Problems dar und fügt dann noch eine weitere Construction mittelst der festen Parabel hinzu. Bei allen diesen Lösungen spielt ein System von 4 Kreispunkten eine besondere Rolle, von denen 3 die Ecken eines gleichseitigen Dreiecks bilden. Angeregt durch diese Untersuchungen, habe ich es unternommen, die sämtlichen durch das genannte System von Punkten gehenden Curven zweiten Grades einer eingehenden Betrachtung zu unterziehen, in der Absicht, dadurch zu einer allgemeinen Lösung des Problems zu gelangen. In der Tat ist es gelungen, auf diesem Wege nachzuweisen, dass jede beliebig gegebene feste Curve zweiten Grades zur Trisection des Winkels benutzt werden kann, ein Resultat, welches die obigen Fälle der gleichseitigen Hyperbel u. s. w. als specielle Fälle in sich enthält.

§ 1.

Ableitung der allgemeinen Gleichung und Bestimmung des vierten Schnittpunktes mit dem Kreise. Figur 1.

Gegeben sei ein Kreis vom Radius r und auf der Peripherie desselben die Eckpunkte P_1, P_2, P_3 eines gleichseitigen Dreiecks. Machen wir den Mittelpunkt M des Kreises zum Anfangspunkt eines rechtwinkligen Coordinatensystems und legen die positive x Axe durch den einen Punkt P_1, so sind die Coordinaten

$$P_1 = (r,\ 0),\quad P_2 = \left(-\frac{r}{2},\ \frac{r}{2}\sqrt{3}\right),\quad P_3 = \left(-\frac{r}{2},\ -\frac{r}{2}\sqrt{3}\right)$$

Die allgemeine Gleichung der Curven zweiten Grades lautet:

$$(1) \qquad a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + a_{13}x + a_{23}y + a_{33} = 0$$

Soll die Curve durch P_1, P_2, P_3 gehen, so muss

$$a_{11}r^2 + a_{13}r + a_{33} = 0,$$

$$a_{11}\frac{r^2}{4} - a_{12}\frac{r^2}{2}\sqrt{3} + a_{22}\frac{3r^2}{4} - a_{13}\frac{r}{2} + a_{23}\frac{r}{2}\sqrt{3} + a_{33} = 0,$$

$$a_{11}\frac{r^2}{4} + a_{12}\frac{r^2}{2}\sqrt{3} + a_{22}\frac{3r^2}{4} - a_{13}\frac{r}{2} - a_{23}\frac{r}{2}\sqrt{3} + a_{33} = 0$$

sein. Subtraction der letzten beiden Gleichungen ergiebt

$$a_{23} = r \cdot a_{12}$$

Addition derselben beiden Gleichungen liefert

$$a_{11}\frac{r^2}{2} + a_{22}\frac{3r^2}{2} - a_{13}r + 2a_{33} = 0$$

Stellt man die mit dem Factor 2 erweiterte erste Gleichung hinzu, so folgt durch Subtraction

$$a_{13} = -\frac{r}{2}(a_{11} - a_{22})$$

Endlich erhält man durch Einsetzen dieses Wertes in die erste Gleichung

$$a_{33} = -\frac{r^2}{2}(a_{11} + a_{22})$$

Die allgemeine Gleichung einer Curve zweiten Grades, welche durch die obigen 3 Punkte geht, lautet demnach:

$$(2) \quad a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 - \frac{r}{2}(a_{11} - a_{22})x + r\,a_{12}y - \frac{r^2}{2}(a_{11} + a_{22}) = 0$$

Wir bestimmen nun den vierten Schnittpunkt der Curve mit dem Kreise und substituiren

$$x = r\cos\varphi \quad \text{und} \quad y = r\sin\varphi$$

Es kommt dann nach kurzer Umformung

$$(a_{11} - a_{22})(\cos\varphi - 1)(\cos\varphi + \tfrac{1}{2}) + 2a_{12}\sin\varphi(\cos\varphi + \tfrac{1}{2}) = 0$$

woraus

$$\text{(3)} \qquad \operatorname{tg}\frac{\varphi}{2} = \frac{2a_{12}}{a_{11} - a_{22}}$$

Diese Beziehung gewährt die Möglichkeit a_{12} durch a_{11}, a_{22} und φ auszudrücken, wodurch sämtliche Coefficienten der Gleichung auf a_{11}, a_{22} und φ oder, nach Division mit a_{11}, auf den Quotienten $\frac{a_{22}}{a_{11}}$ und auf Functionen des Winkels φ zurückgeführt wären. Bei fester Lage des vierten Schnittpunktes P_4 würden sie daher nur noch von dem Verhältniss $\frac{a_{22}}{a_{11}}$ abhängig sein. Es ist vorteilhaft diese Ersetzung erst nach der Reduction auf die Hauptaxen vorzunehmen.

§ 2.

Transformation für den Fall einer von null verschiedenen Determinante. Figur 1.

Wir beschäftigen uns nun zunächst mit den Mittelpunktscurven, nehmen also an, dass die Determinante der quadratischen Form $a_{11}a_{22} - a_{12}^2$ von null verschieden sei. Um den Mittelpunkt zu finden, substituiren wir

$$x = p + \xi, \quad y = q + \eta$$

und suchen p und q so zu bestimmen, dass in der neuen Gleichung für ξ und η die Coefficienten des linearen Teiles verschwinden. Es muss dann

$$a_{11}p + a_{12}q = (a_{11} - a_{22})\frac{r}{4}$$

und

$$a_{12}p + a_{22}q = -a_{12}\frac{r}{2}$$

sein, woraus sich ergiebt:

$$\text{(4)} \quad p = \frac{r}{4}\,\frac{(a_{11} - a_{22})a_{22} + 2a_{12}^2}{a_{11}a_{22} - a_{12}^2} \quad \text{und}$$

$$q = -\frac{r}{4}\,\frac{(a_{11}-a_{22})\,a_{12}+2a_{11}a_{12}}{a_{11}a_{22}-a_{12}^2}$$

Die Gleichung selbst wird:

$$a_{11}\xi^2+2a_{12}\xi\eta+a_{22}\eta^2+a_{11}p^2+2a_{12}pq+a_{22}q^2$$
$$-\frac{r}{2}(a_{11}-a_{22})p+ra_{12}q-\frac{r^2}{2}(a_{11}+a_{22})=0$$

Multipliciren wir die erste der Bedingungsgleichungen mit p, die zweite mit q, so erhalten wir durch Addition:

$$a_{11}p^2+2a_{12}pq+a_{22}q^2=\frac{r}{4}(a_{11}-a_{22})p-\frac{r}{2}a_{12}q$$

Setzen wir diesen Wert in die Gleichung ein, so kommt

$$a_{11}\xi^2+2a_{12}\xi\eta+a_{22}\eta^2-\frac{r}{4}(a_{11}-a_{22})p+\frac{r}{2}a_{12}q-\frac{r^2}{2}(a_{11}+a_{22})=0$$

und mit Einsetzen der Werte von p und q nach wenigen Reductionen:

(5) $a_{11}\xi^2+2a_{12}\xi\eta+a_{22}\eta^2$

$$=\frac{r^2}{16}\cdot\frac{a_{22}}{a_{11}a_{22}-a_{12}^2}\left[(3a_{11}+a_{22})^2-12a_{12}^2\right]$$

Es erübrigt jetzt noch eine Drehung um den gefundenen Mittelpunkt. Wir setzen zu dem Ende

$$\xi=\cos\psi\,.\,X-\sin\psi\,.\,Y$$
$$\eta=\sin\psi\,.\,X+\cos\psi\,.\,Y$$

und bestimmen den Winkel ψ durch die Bedingung, dass in der neuen Gleichung für X und Y das Glied mit XY wegfallen soll. Dann muss

$$a_{12}(\cos^2\psi-\sin^2\psi)=(a_{11}-a_{22})\cos\psi\sin\psi$$

sein, woraus

$$\frac{2\cos\psi\sin\psi}{\cos^2\psi-\sin^2\psi}=\mathrm{tg}\,(2\psi)=\frac{2a_{12}}{a_{11}-a_{22}}$$

wird. Nun ist aber nach (3) auch

$$\mathrm{tg}\,\frac{\varphi}{2}=\frac{2a_{12}}{a_{11}-a_{22}}$$

es muss also

$$\mathrm{tg}(2\psi)=\mathrm{tg}\,\frac{\varphi}{2}\quad\text{oder}$$

(6)

$$\psi=\frac{\varphi}{4}\quad\text{sein.}$$

Sämtliche Mittelpunktscurven zweiten Grades, welche durch dieselben 4 Punkte P_1, P_2, P_3 und P_4 gehen, haben demnach gleiche Richtung der Hauptaxen, und zwar ist der Drehungswinkel gleich dem vierten Teile des Winkels, welchen der Radiusvector nach dem vierten Punkte P_4 mit der positiven $x$axe bildet. Trägt man nun einen Winkel gleich $\frac{\varphi}{2}$ im Punkte M an MP_1 nach unten hin an, so wird der ganze Winkel $\frac{3}{2}\varphi$ von MP_1 trisecirt und von einer durch M zur gemeinsamen Axenrichtung der Kegelschnitte parallel gezogenen Geraden halbirt. Wäre man nun im Stande, aus den Dimensionen eines beliebig gegebenen Kegelschnitts und den Functionen des ebenfalls beliebig gegebenen Winkels $\frac{3}{2}\varphi$ oder $\frac{3}{4}\varphi$ die Coordinaten des Kreismittelpunktes M in Bezug auf die Hauptaxen des Kegelschnitts und den Radius r geometrisch construirbar auszudrücken, so wäre damit auch die Möglichkeit gewonnen, jeden Winkel mit Hülfe des festen Kegelschnitts zu triseciren. Man brauchte nur durch M eine Parallele zur Hauptaxe zu ziehen und nach beiden Seiten den Winkel $\frac{3}{4}\varphi$ anzutragen. Der mit dem Radius r um M beschriebene Kreis würde dann den Kegelschnitt in einem Punkte P_1 derart treffen, dass der ganze Winkel $\frac{3}{2}\varphi$ durch den Radiusvector MP_1 trisecirt wird. Ausserdem würde der Kreis den Kegelschnitt noch in 3 Punkten P_2, P_3, P_4 treffen, von welchen die beiden ersten mit P_1 die Ecken eines dem Kreise einbeschriebenen gleichseitigen Dreiecks bilden, während der letzte gemeinsamer Schnittpunkt des Kegelschnitts, des Kreises und des einen Schenkels von $\frac{3}{2}\varphi$ ist. Dieser letzte Umstand macht die Berechnung des Kreisradius selbst unnötig, da derselbe sich nach Construction des Mittelpunktes M durch Antragen des Winkels $\frac{3}{4}\varphi$ von selbst ergiebt. Wie die weitere Untersuchung zeigen wird, ist die angedeutete Reduction in der Tat allgemein durchzuführen und erstreckt sich auch auf den im nächsten Paragraphen zu behandelnden Fall der Parabel.

Wir haben noch Gleichung (5) zu transformiren. Wir erhalten:

$$\left(a_{11}\cos^2\frac{\varphi}{4}+2a_{12}\sin\frac{\varphi}{4}\cos\frac{\varphi}{4}+a_{22}\sin^2\frac{\varphi}{2}\right)X^2$$
$$+\left(a_{11}\sin^2\frac{\varphi}{4}-2a_{12}\sin\frac{\varphi}{4}\cos\frac{\varphi}{2}+a_{22}\cos^2\frac{\varphi}{4}\right).\ Y^2$$
$$=\frac{r^2}{16}\frac{a_{22}}{a_{11}a_{22}-a_{12}^2}\left[(3a_{11}+a_{22})^2-12a_{12}^2\right]$$

und, wenn wir nunmehr die am Schlusse von § 1. angeführte Ersetzung vornehmen:

$$(7)\quad \left(a_{11}\cos^2\frac{\varphi}{4}-a_{22}\sin^2\frac{\varphi}{4}\right).X^2+\left(a_{22}\cos^2\frac{\varphi}{4}-a_{11}\sin^2\frac{\varphi}{4}\right).Y^2$$
$$=\frac{r^2}{16}\,\frac{a_{22}\cos^3\frac{\varphi}{2}\left[(3a_{11}+a_{22})^2-3(a_{11}-a_{22})^2\operatorname{tg}^2\frac{\varphi}{2}\right]}{\left(a_{11}\cos^2\frac{\varphi}{4}-a_{22}\sin^2\frac{\varphi}{4}\right)\left(a_{22}\cos^2\frac{\varphi}{4}-a_{11}\sin^2\frac{\varphi}{4}\right)}$$

Dieselbe Substitution liefert für p und q die Werte:

$$(8)\quad \begin{cases} p=\dfrac{r}{8}\,\dfrac{(a_{11}-a_{22})\cos^2\frac{\varphi}{2}\left[2a_{22}+(a_{11}-a_{22})\operatorname{tg}^2\frac{\varphi}{2}\right]}{\left(a_{11}\cos^2\frac{\varphi}{4}-a_{22}\sin^2\frac{\varphi}{4}\right)\left(a_{22}\cos^2\frac{\varphi}{4}-a_{11}\sin^2\frac{\varphi}{4}\right)} \\[2ex] q=-\dfrac{r}{16}\,\dfrac{(3a_{11}-a_{22})(a_{11}-a_{22})\sin\varphi}{\left(a_{11}\cos^2\frac{\varphi}{4}-a_{22}\sin^2\frac{\varphi}{4}\right)\left(a_{22}\cos^2\frac{\varphi}{4}-a_{11}\sin^2\frac{\varphi}{4}\right)} \end{cases}$$

§ 3.

Besondere Behandlung im Falle einer verschwindenden Determinante.

Wir kommen jetzt zu dem Falle, dass

$$a_{11}a_{22}-a_{12}^2=0$$

ist. Setzen wir aus (3)

$$a_{12}=\tfrac{1}{2}\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}(a_{11}-a_{22})=\frac{\operatorname{tg}\frac{\varphi}{4}\cdot(a_{11}-a_{22})}{1-\operatorname{tg}^2\frac{\varphi}{4}}$$

so wird nach Weglassung des Nenners $\left(1-\operatorname{tg}^2\frac{\varphi}{4}\right)^2$:

$$a_{11}a_{22}\left(1-\operatorname{tg}^2\frac{\varphi}{4}\right)^2-(a_{11}-a_{22})\operatorname{tg}^2\frac{\varphi}{4}=0$$

oder

$$-\left(a_{22}\operatorname{tg}^2\frac{\varphi}{4}-a_{11}\right)\left(a_{22}-a_{11}\operatorname{tg}^2\frac{\varphi}{4}\right)=0$$

Es ist also entweder

$$a_{22}=a_{11}\cot^2\frac{\varphi}{4}\quad\text{oder}\quad a_{22}=a_{11}\operatorname{tg}^2\frac{\varphi}{4}$$

Wir bemerken, dass dieses dieselben Bedingungen sind, welche in der allgemeinen Gleichung (7) die Coefficienten von X^2 be-

ziehungsweise Y^2 und den Nenner der rechten Seite zum Verschwinden bringen. In diesem Falle ist der Quotient $\frac{a_{22}}{a_{11}}$ entweder gleich $\cot^2\frac{\varphi}{4}$ oder gleich $\operatorname{tg}^2\frac{\varphi}{4}$. Beide Fälle sollen nun der Reihe nach behandelt werden.

A.

Ist erstens

$$a_{22} = a_{11}\cot^2\frac{\varphi}{4}$$

so ergiebt sich aus (3)

$$a_{12} = \tfrac{1}{2}(a_{11} - a_{22})\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2} = \frac{a_{11}}{2}\left(1 - \cot^2\frac{\varphi}{4}\right)\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}$$

oder

$$a_{12} = -a_{11}\cot\frac{\varphi}{4}$$

Setzen wir diese Werte für a_{22} und a_{12} in die ursprüngliche Gleichung (2) ein, so erhalten wir nach kurzer Umformung und nach Division mit a_{11}:

$$\sin^2\frac{\varphi}{4}\,.\,x^2 - \sin\frac{\varphi}{2}\,.\,xy + \cos^2\frac{\varphi}{4}\,.\,y^2 + \frac{r}{2}\cos\frac{\varphi}{2}\,.\,x - \frac{r}{2}\sin\frac{\varphi}{2}\,.\,y - \frac{r^2}{2} = 0$$

Wir drehen nun das Axensystem um einen Winkel ψ, setzen wie früher

$$x = \cos\psi\,.\,\xi - \sin\psi\,.\,\eta$$
$$y = \sin\psi\,.\,\xi + \cos\psi\,.\,\eta$$

und bestimmen den Winkel ψ dieses Mal durch die Bedingung, dass in der neuen Gleichung der Coefficient von $\xi\eta$ verschwinden soll. Dann muss

$$-2\sin^2\frac{\varphi}{4}\,.\,\cos\psi\sin\psi + \sin\frac{\varphi}{2}\sin^2\psi - \sin\frac{\varphi}{2}\cos^2\psi + 2\cos^2\frac{\varphi}{4}\sin\psi\cos\psi = 0$$

sein, oder

$$\sin(2\psi)\cos\frac{\varphi}{2} - \sin\frac{\varphi}{2}\cos(2\psi) = \sin\left(2\psi - \frac{\varphi}{2}\right) = 0$$

woraus sich ergiebt:

$$\psi = \frac{\varphi}{4}$$

Es weicht also auch bei der Parabel die Richtung der Hauptaxen von der Richtung des ursprünglichen Axensystems um denselben Winkel ab.

Da gleichzeitig mit dem Coefficienten von $\xi\eta$ auch derjenige von ξ^2 verschwindet, nimmt die Gleichung die einfache Gestalt an:

$$\eta^2 + \frac{r}{2}\cos\frac{\varphi}{4}\left(4\cos^2\frac{\varphi}{4} - 3\right) . \xi - \frac{r}{2}\sin\frac{\varphi}{4}\left(4\cos^2\frac{\varphi}{4} - 1\right) . \eta - \frac{r^2}{2} = 0$$

oder

$$(9) \qquad \eta^2 + \frac{r}{2}\cos\left(\frac{3}{4}\varphi\right) . \xi - \frac{r}{2}\sin\left(\frac{3}{4}\varphi\right) . \eta - \frac{r^2}{2} = 0$$

Dieselbe kann auch in die Form gebracht werden:

$$\left[\eta - \frac{r}{4}\sin\left(\tfrac{3}{4}\varphi\right)\right]^2 + \frac{r}{2}\cos\left(\tfrac{3}{4}\varphi\right)\left[\xi - \frac{r}{8}\,\frac{8 + \sin^2\left(\tfrac{3}{4}\varphi\right)}{\cos\left(\tfrac{3}{4}\varphi\right)}\right] = 0$$

Verschiebt man endlich noch den Anfangspunkt des Coordinatensystems und setzt:

$$\eta = \frac{r}{4}\sin\left(\tfrac{3}{4}\varphi\right) + Y$$

$$\xi = \frac{r}{8}\,\frac{8 + \sin^2\left(\tfrac{3}{4}\varphi\right)}{\cos\left(\tfrac{3}{4}\varphi\right)} + X$$

so kommt als Gleichung der auf ihre Hauptaxen bezogenen Parabel:

$$(10) \qquad Y^2 = -\frac{r}{2}\cos\left(\tfrac{3}{4}\varphi\right) . X$$

Ferner sind die Coordinaten des Punktes M in Bezug auf die Hauptaxen der Parabel:

$$(11) \qquad \begin{cases} \mathfrak{P} = -\dfrac{r}{8}\,\dfrac{8 + \sin^2\left(\tfrac{3}{4}\varphi\right)}{\cos\left(\tfrac{3}{4}\varphi\right)} \\ \mathfrak{Q} = -\dfrac{r}{4}\sin\left(\tfrac{3}{4}\varphi\right) \end{cases} .$$

Da diese Formeln es gestatten, für jede beliebige Parabel aus den Dimensionen derselben und aus den Functionen des Winkels $\frac{3}{4}\varphi$ die Coordinaten des Kreismittelpunktes M zu finden, so ist damit nachgewiesen, dass mit Hülfe einer jeden Parabel jeder beliebige Winkel trisecirt werden kann. Die Construction selbst wird im letzten Paragraphen zur Besprechung kommen.

Wir wenden uns nun zum zweiten Falle, begnügen uns aber mit der Angabe der Hauptformeln.

B.

Ist

$$a_{22} = a_{11}\,\mathrm{tg}^2\frac{\varphi}{4},\quad \text{so wird}\quad a_{12} = a_{11}\,\mathrm{tg}\frac{\varphi}{4}$$

Dio Gleichnng heisst dann:

$$\cos^2\frac{\varphi}{4}\,.\,x^2+\sin\frac{\varphi}{2}\,.\,xy+\sin^2\frac{\varphi}{4}\,.\,y^2-\frac{r}{2}\cos\frac{\varphi}{2}\,.\,x+\frac{r}{2}\sin\frac{\varphi}{2}\,.\,y$$
$$-\frac{r^2}{2}=0$$

Drehen wir nm den Winkel $\frac{\varphi}{4}$, so kommt:

(12) $$\xi^2-\frac{r}{2}\cos(\tfrac{3}{4}\varphi)\,.\,\xi+\frac{r}{2}\sin(\tfrac{3}{4}\varphi)\,.\,\eta-\frac{r^2}{2}=0$$

Wird schliesslich noch

$$\xi = \frac{r}{4}\cos(\tfrac{3}{4}\varphi)+X$$
$$\eta = \frac{r}{8}\,\frac{8+\cos^2(\tfrac{3}{4}\varphi)}{\sin(\tfrac{3}{4}\varphi)}+Y$$

gesetzt, so kommt die Schlussgleichnng:

(13) $$X^2 = -\frac{r}{2}\sin(\tfrac{3}{4}\varphi)\,.\,Y$$

nnd als Coordinaten des Kreismittelpnnktes M

(14) $$\begin{cases} \mathfrak{P} = -\frac{r}{4}\cos(\tfrac{3}{4}\varphi) \\ \mathfrak{Q} = -\frac{r}{8}\,\frac{8+\cos^2(\tfrac{3}{4}\varphi)}{\sin(\tfrac{3}{4}\varphi)} \end{cases}$$

§ 4.

Der geometrische Ort der Mittelpunkte. Figur 1.

Wir wenden uns nun wieder zurück zu dem allgemeinen Falle der Mittelpunktscurven. Bevor wir uns auf eine Discussion der dort aufgestellten Gleichung (7) einlassen können, ist es nötig eine Vorstellung von den verschiedenen Lagen des Mittelpunkts zu gewinnen und zu dem Zwecke den geometrischon Ort desselben abzuleiten.

Dazu dienon die Gleichnngen (8). Bezeichnen wir den Qnotienten $\frac{a_{22}}{a_{11}}$ der Kürze halber mit z, so ist

$$p = \frac{r}{8}\,\frac{(1-z)\cos^2\frac{\varphi}{2}\left[2z+(1-z)\operatorname{tg}^2\frac{\varphi}{2}\right]}{\left(\cos^2\frac{\varphi}{4}-z\sin^2\frac{\varphi}{4}\right)\left(z\cos^2\frac{\varphi}{4}-\sin^2\frac{\varphi}{4}\right)}$$

$$q = -\frac{r}{8}\,\frac{\cos^2\frac{\varphi}{2}(3-z)(1-z)\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}}{\left(\cos^2\frac{\varphi}{4}-z\sin^2\frac{\varphi}{4}\right)\left(z\cos^2\frac{\varphi}{4}-\sin^2\frac{\varphi}{4}\right)}$$

Dann wird

$$\frac{p}{q} = -\frac{2z+(1-z)\operatorname{tg}^2\frac{\varphi}{2}}{(3-z)\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}} \quad \text{und}$$

$$z = \frac{\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}\left(3p+q\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}\right)}{q\operatorname{tg}^2\frac{\varphi}{2}-2q+p\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}}$$

ferner

$$1-z = \frac{-2\left(p\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}+q\right)}{N}; \quad 3-z = \frac{2q\left(\operatorname{tg}^2\frac{\varphi}{2}-3\right)}{N}$$

$$\left(\cos^2\frac{\varphi}{4}-z\sin^2\frac{\varphi}{4}\right)\left(z\cos^2\frac{\varphi}{4}-\sin^2\frac{\varphi}{4}\right)$$
$$= -\frac{\sin\frac{\varphi}{2}}{N^2}\left(p^2\sin\frac{\varphi}{2}-2pq\cos\frac{\varphi}{2}-q^2\sin\frac{\varphi}{2}\right)\left(3-\operatorname{tg}^2\frac{\varphi}{2}\right)$$

soforn der Nonner von z mit N bezeichnet wird.

Setzen wir dieso Werte in den Ansdruck für q ein, so ergiebt sich

$$q = -\frac{r}{2}\,\frac{p\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}+q}{p^2\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}-2pq-q^2\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}}$$

oder in gewöhnlichen Coordinaton als geometrischer Ort der Mittelpnnkte:

$$(15) \quad \operatorname{tg}\frac{\varphi}{2} \cdot x^2 - 2xy - \operatorname{tg}\frac{\varphi}{2} \cdot y^2 + \frac{r}{2}\left(x\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2} + y\right) = 0$$

Von vornherein sind 4 Punkte bekannt, durch welche die Curve der Mittelpunkte gehen muss. Es sind dies: der Mittelpunkt M des gegebenen Kreises und die drei Punkte, in welchen sich je zwei gegenüberliegende Seiten des Kreisvierecks $P_1P_4P_2P_3$ und die Diagonalen desselben schneiden. Wir wollen den Schnittpunkt von P_1P_4 und P_3P_2 mit Q, den von P_2P_4 und P_3P_1 mit R und den von P_1P_2 und P_3P_4 mit S bezeichnen.

Es ist für die weitere Untersuchung wünschenswert, die Coordinaten dieser 4 Punkte und die denselben entsprechenden Werte von z zu kennen. Für den Punkt M ergiebt sich sogleich aus (8) der Wert $z = 1$.

Für die andern Punkte ergiebt directe Berechnung aus der Figur die Coordinaten:

$$Q = \left(-\frac{r}{2},\ \tfrac{1}{2}r\cot\frac{\varphi}{2}\right)$$

$$R = \left(r\,\frac{\sqrt{3}\cos\frac{\varphi}{2} + 2\sin\frac{\varphi}{2}}{\sqrt{3}\cos\frac{\varphi}{2} - \sin\frac{\varphi}{2}},\ \frac{r\sqrt{3}\sin\frac{\varphi}{2}}{\sqrt{3}\cos\frac{\varphi}{2} - \sin\frac{\varphi}{2}}\right)$$

$$S = \left(r\,\frac{\sqrt{3}\cos\frac{\varphi}{2} - 2\sin\frac{\varphi}{2}}{\sqrt{3}\cos\frac{\varphi}{2} + \sin\frac{\varphi}{2}},\ \frac{r\sqrt{3}\sin\frac{\varphi}{2}}{\sqrt{3}\cos\frac{\varphi}{2} + \sin\frac{\varphi}{2}}\right)$$

Um die entsprechenden Werte von z zu finden, hätte man diese Ausdrücke in Verbindung zu setzen mit (8). Man kann jedoch auch durch die Ueberlegung zum Ziele gelangen, dass für die betreffenden Werte von z die rechte Seite in Gleichung (7) null sein muss, da in allen 3 Fällen die Curve in 2 sich schneidende gerade Linien übergeht. Die rechte Seite von (7) verschwindet aber erstens für $a_{22} = 0$, dann für zwei andere Werte, die sich aus der Gleichung

$$(3a_{11} + a_{22})^2 - 3(a_{11} - a_{22})^2 \operatorname{tg}^2\frac{\varphi}{2} = 0$$

ergeben. Einsetzung dieser Werte in die Gleichungen (8) und Vergleichung der Resultate mit den obigen Ausdrücken für die Coordinaten würde dann die Zugehörigkeit der verschiedenen Werte ergeben. Wir beschränken uns auf die Angabe der Resultate:

für M ist $z = 1$, für Q ist $z = 0$, für R ist

$$s = \sqrt{3}\,\frac{\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2} + \sqrt{3}}{\sqrt{3}\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2} - 1}$$

und für S ist

$$s = \sqrt{3}\,\frac{\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2} - \sqrt{3}}{\sqrt{3}\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2} + 1}$$

Um den Mittelpunkt des geometrischen Orts zu bestimmen, setzen wir

$$x = k + \xi, \quad y = l + \eta$$

Die Bedingungen für k und l heissen dann:

$$k\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2} - l = -\frac{r}{4}\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2},$$

$$k + l\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2} = \frac{r}{4}$$

woraus sich ergiebt:

(16) $$k = \frac{r}{4}\cos\varphi \quad \text{und} \quad l = \frac{r}{4}\sin\varphi$$

Der Mittelpunkt liegt also auf dem Radiusvector nach P_4, um $\frac{r}{4}$ von M entfernt.

Die Gleichung wird:

$$\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}\,.\,\xi^2 - 2\xi\eta - \operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}\,.\,\eta^2 + \frac{r^2}{16}\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}\,.\,\cos\varphi\left(2\cos^2\frac{\varphi}{2} + 1\right) = 0$$

Nun muss noch, um die Reduction auf die Hauptaxen zu vollenden, eine Drehung der Axen vorgenommen werden. Wir substituiren wiederum

$$\xi = \cos\psi\,.\,X - \sin\psi\,.\,Y$$
$$\eta = \sin\psi\,.\,X + \cos\psi\,.\,Y$$

Die Bedingungsgleichung für ψ wird dann:

$$-4\sin\psi\cos\psi\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2} - 2\cos^2\psi + 2\sin^2\psi = 0$$

woraus

$$\operatorname{tg}(2\psi) = -\cot\frac{\varphi}{2} = \operatorname{tg}\left(90^0 + \frac{\varphi}{2}\right)$$

oder

(17) $$\psi = 45^0 + \frac{\varphi}{4}$$

sich ergiebt.

Die Gleichung selbst wird zu:

(18) $$X^2 - Y^2 = \frac{r^2}{16} \sin\frac{\varphi}{2} \cos\varphi \left(2\cos^2\frac{\varphi}{2} + 1\right) \quad \text{oder}$$ $$X^2 - Y^2 = \frac{r^2}{16} \sin(\tfrac{3}{2}\varphi)$$

Der geometrische Ort der Mittelpunkte ist also eine gleichseitige Hyperbel, deren Axenrichtung von der Hauptaxenrichtung der sämtlichen durch die angenommenen 4 Kreispunkte gehenden Kegelschnitte um 45° abweicht, deren Asymptoten folglich dieser parallel laufen. Der eine Zweig dieser Hyperbel geht durch den Kreismittelpunkt M, der andere durch die Punkte Q, R und S.

Es tritt nun für die weitere Untersuchung die Notwendigkeit ein, in Betreff des Winkels φ besondere Annahmen zu machen. Wie man sich leicht aus der Figur überzeugt, ist es in allen Fällen, in welchen der Punkt P_4 nicht im ersten Sextanten (mit Einschluss der Grenzwerte $\varphi = 0$ und $\varphi = 60^0$) liegt, mit Hülfe einer blossen Aenderung des Coordinatensystems möglich, die Aufgabe auf diesen Fall zu reduciren. Wir dürfen uns daher unbeschadet der Allgemeinheit im Folgenden auf die Voraussetzung, dass φ zwischen 0 und 60° liegt und auf die beiden Grenzfälle $\varphi = 0$ und $\varphi = 60^0$ beschränken. Ist $0 < \varphi < 60^0$, so ist $\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2} < \frac{1}{\sqrt{3}}$, also $\sqrt{3}\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2} - 1 < 0$. Daraus folgt, dass sowol für R wie auch für S der zugehörige Wert von z negativ ist. Bildet man die Differenz dieser Werte, so ergiebt sich der Ausdruck

$$\frac{8\sqrt{3}\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}}{\left(\sqrt{3}\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2} - 1\right)\left(\sqrt{3}\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2} + 1\right)}$$

Derselbe ist jedenfalls negativ, woraus zu folgern ist, dass man auf dem Wege von 0 nach $-\infty$ von Q aus zuerst zum Punkte S und dann erst zum Punkte R gelangt.

Dem Werte $z = 1$ entspricht, wie schon gesagt, der Punkt M; die Curve fällt in diesem Falle mit dem gegebenen Kreise zusammen. Zufolge der Stetigkeit lässt sich daraus schon schliessen, dass sämtlichen Punkten des durch M gehenden Hyperbelzweiges Ellipsen

entsprechen werden. Rückt der Mittelpunkt von M aus in der Richtung MT immer weiter, so werden die Dimensionen der Ellipsen beständig grösser, bis dieselben schliesslich in die in § 3. unter A. behandelte Parabel übergehen. Daraus ist zu entnehmen, dass dem auf dem Aste MT in unendlicher Ferne gelegenen Punkte der Wert

$$z = \cot^2 \frac{\varphi}{4}$$

entspricht. Rückt der Mittelpunkt von M aus in der Richtung MU immer weiter, so gelangen wir in derselben Weise für einen unendlich fernen Punkt zur Parabel B in § 3., zu welcher der Wert

$$z = \operatorname{tg}^2 \frac{\varphi}{4}$$

gehört. Während demnach z die Werte von $\cot^2 \frac{\varphi}{4}$ herunter bis zu $\operatorname{tg}^2 \frac{\varphi}{4}$ durchläuft, durchwandert der Mittelpunkt den ganzen unteren Zweig der Hyperbel und zwar in der Richtung TMU. Lassen wir jetzt z weiter abnehmen, so erscheint der Mittelpunkt wieder in sehr grosser Entfernung auf dem Aste SV, welcher dem Aste MU entgegengesetzt gerichtet ist und mit ihm zur selben Asymptote gehört. Mit abnehmendem z nähert der Mittelpunkt sich allmählich dem Punkte Q, den er für $z = 0$ erreicht. Auf dem weitern Wege gelangen wir dann bei

$$z = \sqrt{3}\,\frac{\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2} - \sqrt{3}}{\sqrt{3}\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2} + 1}$$

zum Punkte S, bei

$$z = \sqrt{3}\,\frac{\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2} + \sqrt{3}}{\sqrt{3}\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2} - 1}$$

zum Punkte R. Lassen wir z noch weiter abnehmen, so bewegt sich der Mittelpunkt über R hinaus und erreicht für $z = -\infty$ einen bestimmten Punkt L, dessen Coordinaten in Bezug auf das ursprüngliche Axensystem sich aus (8) mit Leichtigkeit ergeben als:

$$p = \frac{r}{2}\left(2\cot^2\frac{\varphi}{2} - 1\right) \quad \text{und} \quad q = \frac{r}{2}\cot\frac{\varphi}{2}$$

Zu diesem Punkte gelangen wir auch, wenn wir z mit 1 beginnend

über $\cot^2\frac{\varphi}{4}$ hinaus wachsen lassen. Für $\cot^2\frac{\varphi}{4}$ verschwand der Mittelpunkt in der Richtung MT in unendlicher Ferne; nimmt z weiter zu, so erscheint derselbe wieder auf dem entgegengesetzt gerichteten Aste RW und rückt mit wachsendem z auf den Punkt L los, den er bei $z = +\infty$ erreicht. Wenn wir die Mittelpunkte in der zuerst angenommenen Richtung von Q, über S und R hinaus weiter verfolgen bis in's Unendliche, so ergiebt sich demnach für die entsprechende Reihe der Werte von z beim Punkte L eine Unstetigkeit, indem auf ein unendlich grosses negatives z unmittelbar ein unendlich grosses positives folgt.

Welche Gestalt und Dimensionen in jedem einzelnen Falle die Curve hat, wird die allgemeine Discussion der Gleichung (7) im nächsten Paragraphen feststellen.

Wir wenden uns jetzt zur Besprechung der beiden Grenzfälle $\varphi = 60^0$ und $\varphi = 0^0$.

Ist $\varphi = 60^0$, so wird der Drehungswinkel $\psi = 60^0$; die Hauptaxe der Hyperbel stimmt also überein mit dem Radiusvector zum Punkte P_4. Der Mittelpunkt der Curve liegt nach wie vor in der Entfernung $\frac{r}{4}$ von M. Die Gleichung selbst wird:

$$X^2 - Y^2 = \frac{r^2}{16}$$

Der eine Zweig geht wieder durch M, der andere durch Q, S und R. Bei dem einen durchläuft z die Werte von $\cot^2(15^0)$ bis $\operatorname{tg}^2(15^0)$, bei dem andern die von $\operatorname{tg}^2(15^0)$ durch die Null hindurch bis $-\infty$ und von $+\infty$ zurück nach $\cot^2(15^0)$. Bei Q ist wieder $z = 0$, bei S ist $z = -1$ und bei R ist $z = \mp\infty$. Der ganze Unterschied zwischen diesem Falle und dem allgemeinen besteht darin, dass der Punkt L, in welchem der Sprung von $-\infty$ auf $+\infty$ stattfindet, in den Punkt R hineingerückt ist.

Ganz anders gestaltet sich die Sache, wenn wir annehmen, dass $\varphi = 0$ ist, dass also die Curven zweiten Grades und der Kreis sich in P_1 berühren. Die Gleichung des geometrischen Orts ist dann:

$$X^2 - Y^2 = 0$$

und stellt 2 sich senkrecht schneidende gerade Linien dar. Da der Drehungswinkel in diesem Falle 45^0 beträgt, so sind diese beiden Linien die $x$axe selbst und eine im Abstande $\frac{r}{4}$ zur $y$axe gezogene

Parallele. Aus (8) ergiebt sich aber für die Coordinaten des Mittelpunktes

$$p = \frac{r}{4}(1-z)$$

und $q = 0$, woraus hervorgeht, dass sämtliche Mittelpunkte auf der $x$axe allein liegen, dass also die genannte Senkrechte gar nicht in Betracht kommt. Diese Senkrechte ist entstanden aus den beiden Aesten, welche sich erstrecken vom Scheitel des durch M gehenden Zweiges in der Richtung MU in's Unendliche und auf der entgegengesetzten Seite vom Unendlichen zurück über Q zum Scheitel des andern Zweiges. Man würde die zu diesen beiden Aesten gehörenden Werte von z finden aus den Gleichungen (8), wenn man p und q gleich den Coordinaten der beiden Scheitelpunkte setzte. Je näher die beiden Scheitelpunkte rücken, um so kleiner wird das Intervall von z werden. In unserm Falle, wo die beiden Scheitel zusammenfallen, ist das Intervall zu null geworden.

Was die Art und Gestalt der einzelnen Curven in diesem Falle angeht, so wird das Nähere hierüber im Auschluss an die Discussion der allgemeinen Gleichung folgen.

§ 5.

Allgemeine Discussion der Gleichung. Figur 1.

Führen wir in Gleichung (7) für $\frac{a_{22}}{a_{11}}$ die Bezeichnung z ein, so wird dieselbe:

$$(19)\quad \left(\cos^2\frac{\varphi}{4} - z\,.\,\sin^2\frac{\varphi}{4}\right).\,X^2 + \left(z\cos^2\frac{\varphi}{4} - \sin^2\frac{\varphi}{4}\right).\,Y^2$$
$$= \frac{r^2}{16}\,\frac{z\cos^3\frac{\varphi}{2}\left[(3+z)^2 - 3(1-z)^2\operatorname{tg}^2\frac{\varphi}{2}\right]}{\left(\cos^2\frac{\varphi}{4} - z\,.\,\sin^2\frac{\varphi}{4}\right)\left(z\cos^2\frac{\varphi}{4} - \sin^2\frac{\varphi}{4}\right)}$$

Der Ausdruck $(3+z)^2 - 3(1-z)^2\operatorname{tg}^2\frac{\varphi}{2}$ verschwindet, wie wir in § 4. sahen, für die Werte

$$z = \sqrt{3}\,\frac{\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2} - \sqrt{3}}{\sqrt{3}\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2} + 1} \quad \text{und} \quad z = \sqrt{3}\,\frac{\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2} + \sqrt{3}}{\sqrt{3}\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2} - 1}$$

oder für die Punkte S und R. Zwischen diesen Punkten wird derselbe also das entgegengesetzte Zeichen von dem haben, welches er für alle übrigen Werte von z besitzt. Da für $z = 0$, beim Punkte Q, der Ausdruck gleich $3\left(3-\operatorname{tg}^2\frac{\varphi}{2}\right)$ also positiv ist, so ist zu schliessen, dass derselbe zwischen S und R negativ, für alle übrigen Lagen dagegen positiv ist.

$\cos^2\frac{\varphi}{4} - z\sin^2\frac{\varphi}{4}$ ist positiv, sofern $z < \cot^2\frac{\varphi}{4}$ ist, also für den ganzen durch M gehenden Zweig und für den andern vom Unendlichen über Q, S, R bis zum Punkte L.

$z\cos^2\frac{\varphi}{4} - \sin^2\frac{\varphi}{4}$ ist positiv, solange $z > \operatorname{tg}^2\frac{\varphi}{4}$ ist, d. h. für den ganzen durch M gehenden Zweig und für den Teil des andern, welcher sich vom Punkte L in der Richtung Q, S, R bis in's Unendliche erstreckt.

Bezeichnen wir diese 3 Ausdrücke der Kürze halber beziehungsweise mit γ, α, β, so lautet die Gleichung:

$$20) \qquad \alpha \cdot X^2 + \beta \cdot Y^2 = \frac{r^2}{16} z \cdot \cos^3\frac{\varphi}{2} \cdot \frac{\gamma}{\alpha\beta}$$

Wir gehen nun die einzelnen Intervalle für z der Reihe nach durch:

1. $z = \cot^2\frac{\varphi}{4}$; $\alpha = 0$. In diesem Falle ist der Mittelpunkt in der Richtung MT unendlich weit zu denken; die Curve ist die in § 3. unter A angegebene Parabel, welche als Grenze einer Schar von Ellipsen mit beständig zunehmenden Axen anzusehen ist, deren einer Scheitel im Endlichen geblieben, während der andere in unendliche Ferne gerückt ist.

2. $\cot^2\frac{\varphi}{4} > z > \operatorname{tg}^2\frac{\varphi}{4}$. Dann ist $\alpha > 0$, $\beta > 0$, $z > 0$, $\gamma > 0$. Die Gleichung stellt demnach eine Ellipse dar. Rückt der Mittelpunkt aus dem Unendlichen in der Richtung TM auf M zu, so erscheint auch der andere Scheitel der Ellipse wieder, die Dimensionen der Halbaxen werden allmählich kleiner; doch ist, wie der Augenschein lehrt, die erste (zur Xaxe gehörige) beständig grösser als die zweite (zur Yaxe gehörige). Der Unterschied wird aber immer geringer, bis schliesslich für $z = 1$, im Punkte M,

die Halbaxen einander gleich werden und die Ellipse in den gegebenen Kreis übergeht. Nimmt z noch weiter ab, rückt der Mittelpunkt über M hinaus in der Richtung MU weiter, so nehmen die Dimensionen der Halbaxen wieder zu, aber in der Weise, dass die zweite die grössere wird, und der Unterschied beider beständig zunimmt.

3. $z = \operatorname{tg}^2\frac{\varphi}{4}$; $\beta = 0$. Der Mittelpunkt liegt in der Richtung MU unendlich weit. Die Curve ist die in § 3. *B* behandelte Parabel.

4. $\operatorname{tg}^2\frac{\varphi}{4} > z > 0$. Dann ist $\alpha > 0$, $\beta < 0$, $z > 0$, $\gamma > 0$. Die Gleichung stellt Hyperbeln dar mit reellor zweiter Axe. Die zuletzt angeführte Parabel kann auch angesehen werden als Grenze einer Schar von Hyperbeln mit wachsenden Dimensionen, deren einer Scheitel im Endlichen bleibt, während der andere in's Unendliche rückt. Wird $z < \operatorname{tg}^2\frac{\varphi}{4}$ d. h. erscheint der Mittelpunkt auf dem andern Zweige des geometrischen Orts oberhalb von Q wieder, so kommt auch der andere Zweig der Hyperbel wieder zum Vorschein. Der erste kommt ihm von unten entgegen, die Entfernung der Scheitel wird immer kleiner, bis diese endlich zusammenstossen.

5. $z = 0$. Dann ist der Mittelpunkt in den Punkt Q gerückt, die Hyperbel übergegangen in das Paar gerader Linien P_1P_4 und P_3P_2.

6. $0 > z > \sqrt{3}\,\dfrac{\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2} - \sqrt{3}}{\sqrt{3}\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2} + 1}$. Dann ist $\alpha > 0$, $\beta < 0$, $z < 0$, $\gamma > 0$. Wir bekommen also auf dem ganzen Wege von Q bis S Hyperbeln mit reeller erster Axe. Die beiden Zweige, welche vor Q von oben und unten auf einander zurückten und endlich in Q zusammentrafen, entfernen sich also nachher seitlich von einander. Die vier Kreispunkte, die vorher sämtlich auf einem Zweige der Hyperbel lagen, verteilen sich nachher auf beide und zwar liegen P_1, P_4 auf dem einen und P_2, P_3 auf dem andern. Anfänglich liegen sie sämtlich unterhalb der Xaxe; allmählich jedoch rückt diese gegen sie vor und tritt schliesslich zwischen dieselben. Die Curven selbst, welche gleich nach Q eine

geringe Grösse der reellen Halbaxe besitzen, nnd deren Asymptoten mit der Xaxe einen ziemlich grossen Winkel bilden, nehmen nach und nach eine weniger ungewöhnliche Gestalt an. Da $\sqrt{3}\,\dfrac{\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}-\sqrt{3}}{\sqrt{3}\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}+1}$ unter der für den Winkel φ gemachten Voraussetznngen kleiner als -1, so passiren wir auf dem Wege von Q nach S auch die gleichseitige Hyperbel. Setzen wir nämlich in (19) für z den Wert -1 ein, so resultirt die Gleichung:

$$X^2 - Y^2 = \frac{r^2}{4}\cos(\tfrac{3}{2}\varphi).$$

7. $z = \sqrt{3}\,\dfrac{\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}-\sqrt{3}}{\sqrt{3}\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}+1}; \quad = 0.$ Rückt der Mittelpnnkt an S heran, so nähern sich die beiden Hyperhelzweige wieder nnd treffen im Punkte S zusammen. Die Curve geht in die beiden Geraden P_1P_2 und P_3P_4 über.

8. $\sqrt{3}\,\dfrac{\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}-\sqrt{3}}{\sqrt{3}\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}+1} > z > \sqrt{3}\,\dfrac{\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}+\sqrt{3}}{\sqrt{3}\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}-1}.$ Dann ist $\alpha > 0$, $\beta < 0$, $z < 0$, $\gamma < 0$. Die Gleichung liefert wiederum Hyperheln mit reeller zweiter Axe. Die beiden Zweige, die sich von rechts nnd links näherten und in S znsammentrafen, entfernen sich also wieder nach oben nud unten von einander. Die vier Kreispnnkte sind wieder auf heide Zweige verteilt, aber dieses Mal liegen P_4, P_2 auf dem einen oberen, P_1, P_3 auf dem anderen unteren. Bei weiterem Voranschreiten des Mittelpnnktes entfernt sich die reelle Axe, welche erst zwischen den Punkten hindnrchgieng, allmählich vou diesen; die Punkte rücken sämtlich nach der negativen Seite der X. Nachdem die Entfernnng der Scheitel ein gewisses Maximum erreicht hat,, nimmt dieselhe wieder ab, his endlich im Pnnkte R die Scheitel zum dritten Male zusammenfallen.

9. $z = \sqrt{3}\,\dfrac{\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}+\sqrt{3}}{\sqrt{3}\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}-1}; \ \gamma = 0.$ Die Gleichung liefert die heiden Geraden P_1P_3 und P_4P_2.

10. $\sqrt{3}\,\dfrac{\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}+\sqrt{3}}{\sqrt{3}\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}-1} > z > -\infty$. Hierfür ist $\alpha > 0$, $\beta < 0$, $z < 0$, $\gamma > 0$. Wir erhalten demnach Hyperheln mit reeller erster Axe. Die Scheitel weichen also vom Punkte R ab wieder nach rechts und links auseinander. Die vier Kreispunkte liegen wieder auf demselhen Zweige, wie es vor Q bereits der Fall gewesen war.

11. $z = -\infty$ oder $+\infty$ liefert, wie schon im vorigen Paragraphen angegeben wurde, eine ebensolche Hyperbel, deren Mittelpunkt L genannt worden war.

12. $\infty > z > \cot^2\frac{\varphi}{4}$. So ist $\alpha < 0$, $\beta > 0$, $z > 0$, $\gamma > 0$. Also auch für den weiteren Lauf des Mittelpunktes von L in's Unendliche ergeben sich Hyperheln mit reeller erster Axe. Der eine Zweig rückt immer weiter fort, der andere bleibt im Endlichen und nähert sich immer mehr der Parabel A in § 3., die er für einen unendlich fernen Mittelpunkt erreicht.

Damit ist die allgemeine Discussion der Gleichung beendet, und können wir uns jetzt der Besprechung der heiden Grenzfälle zuwenden.

§ 6.

Discussion der beiden Grenzfälle.

Wie schon in § 4. bei Besprechung des geometrischen Orts der Mittelpunkte bemerkt wurde, unterscheidet sich der erste der beiden Grenzfälle im Wesentlichen nicht von dem allgemeinen Falle. Der einzige Unterschied besteht darin, dass z den Wert -1 nicht zwischen Q und S, sondern in S selbst annimmt, und dass der Punkt L mit R zusammenfällt.

Auch die Gestalt der verschiedenen Curven in den einzelnen Intervallen ist genau dieselbe, wie in § 5. auseinandergesetzt wurde. Die gleichseitige Hyperhel entspricht dem Punkte S.

Sehr verschieden wird aber die Sache in dem Falle, dass $\varphi = 0$ ist. Wir wissen schon, dass dann sämtliche Mittelpunkte auf der Xaxe liegen, und die Axenrichung mit der Richtung der Coordinaten übereinstimmt. Die Gleichung der Curven lautet hierfür:

$$X^2 + z \cdot Y^2 = \frac{r^2}{16}(3+z)^2$$

und für den Mittelpunkt kommt:

$$p = \frac{r}{4}(1-z)$$

Ist $z > 1$, so wird p negativ, d. h. der Mittelpunkt liegt auf der negativen Seite der X. Die Curve selbst ist in diesem Falle eine Ellipse. Wächst z, so rückt der Mittelpunkt nach links immer weiter fort, um für $z = \infty$ im Unendlichen zu verschwinden. Die Ellipse geht dabei in eine Parabel über, deren Gleichung auf den Scheitelpunkt P_1 bezogen lautet:

$$Y^2 = -\frac{r}{2}X$$

Nähert sich umgekehrt z dem Werte 1, so rückt der Mittelpunkt nach M, beide Halbaxen werden kleiner, und der Unterschied zwischen der bisher grösseren ersten Axe und der zweiten wird beständig geringer, bis für $z = 1$ der Mittelpunkt auf M fällt, und die Ellipse in den gegebenen Kreis übergeht.

Nimmt z noch weiter ab, so erhalten wir wiederum Ellipsen, doch ist jetzt die zweite Halbaxe die grössere, und zwar wächst dieselbe sehr schnell über jedes Mass hinaus, während die erste langsam weiter abnimmt und sich allmählich dem Werte $\frac{3}{4}r$ nähert.

Für $z = 0$ ist die zweite Axe unendlich gross geworden, die erste hat den Wert $\frac{3}{4}r$ erreicht, und aus der Ellipse ist ein Paar paralleler zur Xaxe senkrechter Geraden geworden, nämlich die Gerade P_2P_3 und die im Punkte P_1 an den Kreis gelegte Tangente. Der Mittelpunkt liegt dann auf der positiven Seite der X in der Entfernung $\frac{r}{4}$ von M, und die Gleichung in Bezug auf denselben lautet:

$$X^2 = \frac{9}{16}r^2 \quad \text{oder} \quad X = \pm\frac{3}{4}r$$

Dieses Paar paralleler Linien ist anzusehen als Grenze der Ellipsen und gleichzeitig als Grenze der zweiten Parabel, die sich bei jedem von null verschiedenen Werte von φ durch die vier Kreispunkte legen lässt. In der Tat ergiebt die Betrachtung der unter (14) angegebenen Coordinaten des Kreismittelpunktes in Bezug auf die Axen der Parabel, dass für ein abnehmendes φ der Scheitel der Parabel in's Unendliche rückt.

Dieses selbe Paar paralleler Linien ist aber drittens auch anzusehen als Grenze einer Schar von Hyperbeln, zu der wir nunmehr bei weiterem Fortschreiten des Mittelpunktes gelangen. Die beiden parallelen Geraden biegen sich gewissermassen nach rechts und links um, während der bewegliche linke Scheitel sich dem für alle bisherigen Curven festen rechten Scheitel P_1 nähert.

Auf diesem Wege passiren wir auch die gleichseitige Hyperbel bei $z=-1$. Bei $z=-3$ ist der Mittelpunkt nach P_1 gerückt, die beiden Scheitel sind zusammengefallen, und die Curve hat sich verwandelt in das Paar gerader Linien P_1P_2 und P_1P_3.

Wird z noch kleiner, so bekommen wir wieder Hyperbeln mit reeller erster Axe. Der Mittelpunkt und mit ihm der ganze rechte Zweig rückt immer weiter fort, der linke Zweig dagegen bleibt im Endlichen und nähert sich immer mehr der Parabel, mit der wir die Betrachtung begonnen; er erreicht dieselbe für $z=-\infty$, wenn der Mittelpunkt in's Unendliche gerückt ist.

§ 7.

Weitere Umformung der allgemeinen Gleichung.

Wir treten jetzt an die in § 2. angedeutete Aufgabe näher heran, aus den Dimensionen eines gegebenen Kegelschnitts und den Functionen des Winkels φ die Coordinaten von M und den Radius r zu berechnen.

Von grösster Wichtigkeit für die Gestalt einer jeden Curve ist das Verhältniss der Coefficienten der Gleichung. Wir wollen dieses Verhältniss in (19) einführen und setzen zu dem Zwecke

$$z\cos^2\frac{\varphi}{4}-\sin^2\frac{\varphi}{4}=u\left(\cos^2\frac{\varphi}{4}-z\sin^2\frac{\varphi}{4}\right) \tag{21}$$

Dann wird

$$z=\frac{u\cos^2\frac{\varphi}{4}+\sin^2\frac{\varphi}{4}}{\cos^2\frac{\varphi}{4}+u\sin^2\frac{\varphi}{4}}$$

Ferner wird

$$\cos^2\frac{\varphi}{4}-z\sin^2\frac{\varphi}{4}=\frac{\cos\frac{\varphi}{2}}{\cos^2\frac{\varphi}{4}+u\sin^2\frac{\varphi}{4}}$$

und

$$z\cos^2\frac{\varphi}{4}-\sin^2\frac{\varphi}{4}=\frac{u\cos\frac{\varphi}{2}}{\cos^2\frac{\varphi}{4}+u\sin^2\frac{\varphi}{4}}$$

Setzen wir diese Ausdrücke in die Gleichung (19) ein, so erhalten wir zunächst:

$$(22)\quad X^2+u\,.\,Y^2=\frac{r^2}{16}\,\frac{u\cos^2\frac{\varphi}{4}+\sin^2\frac{\varphi}{4}}{u}\times$$

$$.\left[\left[1+2\cos^2\frac{\varphi}{4}+u\left(1+2\sin^2\frac{\varphi}{4}\right)\right]^2-3(1-u)^2\sin^2\frac{\varphi}{2}\right]$$

woraus sich nach entsprechender Transformation die Gleichung

$$X^2+u\,.\,Y^2=\frac{r^2}{32u}\left[(u^2+14u+1)(u+1)+(u-1)^3\cos(\tfrac{3}{2}\varphi)\right]$$

oder auch

$$(23)\quad X^2+u\,.\,Y^2=\frac{r^2}{16u}\left[u(u+3)^2\cos^2(\tfrac{3}{4}\varphi)+(3u+1)^2\sin^2(\tfrac{3}{4}\varphi)\right]$$

ergiebt. Die rechte Seite der Gleichung enthält ausser r und u nur Functionen des Winkels $\frac{3}{4}\varphi$.

Wir müssen jetzt die Coordinaten von M in Bezug auf die Hauptaxen der Curve berechnen. Unter (8) hatten wir die Coordinaten des Mittelpunktes O der Curve in Bezug auf das ursprüngliche System angegeben. Dieselben Ausdrücke stellen daher, mit dem entgegengesetzten Vorzeichen genommen, die Coordinaten des Kreismittelpunktes in Bezug auf ein Axensystem dar, welches durch den Mittelpunkt der Curve parallel zu dem ursprünglichen System gezeichnet wird. Wir suchen aber die Coordinaten von M in Bezug auf das Hauptaxensystem der Curve, welches gegen das vorige um $\frac{\varphi}{4}$ gedreht ist. Nennen wir diese $\mathfrak{P}$ und $\mathfrak{Q}$, so ist:

$$(24)\quad \begin{aligned}\mathfrak{P}&=-p\cos\frac{\varphi}{4}-q\sin\frac{\varphi}{4}\\ \mathfrak{Q}&=p\sin\frac{\varphi}{4}-q\cos\frac{\varphi}{4}\end{aligned}$$

Bevor wir hierin die Ausdrücke für p und q einsetzen, müssen wir dieselben erst transformiren, indem wir einmal den Quotienten

$\frac{a_{22}}{a_{11}}$ durch z und dann z durch den Ausdruck $\dfrac{u\cos^2\frac{\varphi}{4}+\sin^2\frac{\varphi}{4}}{\cos^2\frac{\varphi}{4}+u\sin^2\frac{\varphi}{4}}$ ersetzen. Es ergiebt sich dann:

$$(25)\qquad \begin{aligned} p &= \frac{r}{8u}(1-u)\left[2(u-1)\cos^2\frac{\varphi}{2}+(u+1)\cos\frac{\varphi}{2}+1-u\right] \\ q &= -\frac{r}{8u}(1-u)\left[2(1-u)\cos\frac{\varphi}{2}+1+u\right]\sin\frac{\varphi}{2} \end{aligned}$$

Substituiren wir diese Werte in die Gleichung (24) und ersetzen die Functionen des halben Winkels durch die des vierten Teils, so ergiebt sich nach geeigneter Zusammenfassung der Glieder

$$\mathfrak{P} = -\frac{r}{4}(1-u)\cos\frac{\varphi}{4}\left(4\cos^2\frac{\varphi}{4}-3\right)$$

$$\mathfrak{Q} = \frac{r}{4u}(1-u)\sin\frac{\varphi}{4}\left(4\cos^2\frac{\varphi}{4}-1\right)$$

oder

$$(26)\qquad \mathfrak{P} = -\frac{r}{4}(1-u)\cos(\tfrac{3}{4}\varphi) \quad \text{und}$$

$$\mathfrak{Q} = \frac{r}{4u}(1-u)\sin(\tfrac{3}{4}\varphi)$$

Auch diese Ausdrücke enthalten nur r, u und Functionen des Winkels $\frac{3}{4}\varphi$. Da dasselbe für die rechte Seite der Gleichung (23) gilt, so ist damit nachgewiesen, dass in der Tat aus den Dimensionen einer gegebenen Mittelpunktscurve zweiten Grades mit Hülfe des Winkels $\frac{3}{4}\varphi$ die Coordinaten des zugehörigen Kreismittelpunkts M und der Radius r des Kreises gefunden werden können.

Da dasselbe, wie wir früher nachgewiesen haben, aber auch für die Parabel gilt, so ist damit gezeigt, dass jede beliebige Curve zweiten Grades zur Trisection des Winkels verwendet werden kann.

Wie sich im einzelnen Falle die geometrische Construction gestaltet, wird in den folgenden Paragraphen eingehend erörtert werden.

§ 8.

Die Trisection des Winkels mittelst fester Ellipsen. Figur 2.

Nehmen wir an, dass die Ellipse, welche zur Trisection verwendet werden soll, die Halbaxen a und b hat, so lautet die Gleichung derselben:

$$\frac{X^2}{a^2}+\frac{Y^2}{b^2}=1 \quad \text{oder} \quad X^2+\frac{a^2}{b^2}Y^2=a^2$$

Soll die Gleichung (23) diese Curve darstellen, so muss

$$u=\frac{a^2}{b^2} \quad \text{und}$$

$$a^2=\frac{r^2}{16a^2b^4}\left[a^2(a^2+3b^2)^2\cos^2(\tfrac{3}{4}\varphi)+b^2(3a^2+b^2)^2\sin^2(\tfrac{3}{4})\right]$$

(ein, woraus

$$(27) \qquad r^2=\frac{16a^4b^4}{a^2(a^2+3b^2)^2\cos^2(\frac{3}{4}\varphi)+b^2(3a^2+b^2)^2\sin^2(\frac{3}{4}\varphi)}$$

wird. Ferner ergiebt sich aus (26) für die Coordinaten von M:

$$(28) \qquad \mathfrak{P}=\frac{r}{4}\,\frac{a^2-b^2}{b^2}\cos(\tfrac{3}{4}\varphi), \qquad \mathfrak{Q}=-\frac{r}{4}\,\frac{a^2-b^2}{a^2}\sin(\tfrac{3}{4}\varphi)$$

Diese Formeln ermöglichen es, aus den Halbaxen a und b zu jedem beliebigen Winkel $\frac{3}{4}\varphi$ den Radius r und den Punkt M zu finden.

Die Construction selbst würde freilich, ohne besondere Voraussetzungen in dieser Weise ausgeführt, recht complicirt sein und müsste für jeden neuen Winkel von Anfang bis zu Ende wiederholt werden. Wenn man dagegen zur Construction Ellipsen mit bestimmtem, in Zahlen angegebenem Verhältniss der Halbaxenquadrate verwendet, so ergiebt sich für die Construction unter Umständen eine wesentliche Vereinfachung.

Unseres Wissens findet sich die erste Angabe über die Trisection mittelst einer Ellipse in dem dritten Artikel von Panzerbieter. Die benutzte Ellipse hat die Excentricität $\sqrt{\frac{2}{3}}$, es ist also

$$\frac{a^2}{b^2}=3$$

Unsere Formeln ergeben für diesen Fall:

$$r^2=\frac{12a^2}{27\cos^2(\frac{3}{4}\varphi)+25\sin^2(\frac{3}{4}\varphi)}$$

$$\mathfrak{P}=\frac{r}{2}\cos(\tfrac{3}{4}\varphi), \quad \mathfrak{Q}=-\frac{r}{6}\sin(\tfrac{3}{4}\varphi)$$

Der Verfasser selbst nennt seine Construction weniger einfach. In der Tat ist dieselbe schon ziemlich verwickelt und leidet an dem Uebelstande, dass sie für jeden neuen Winkel von Anfang an wieder-

holt werden muss. Der folgende Weg führt in einfacherer Weise zum Ziele.

Man construire zur gegebenen Ellipse eine concentrische mit den Halbaxen $\frac{2}{3}a$ und $\frac{6}{5}b$, deren Gleichung also

$$\frac{X^2}{\frac{4a^2}{9}} + \frac{Y^2}{\frac{36}{25}b^2} = 1$$

lautet. Trägt man jetzt in O an die positive Seite der Abscissen nach unten bin den Winkel $\frac{2}{3}\varphi$ an und verlängert die Linie bis zum Schnitte mit der Ellipse, so findet sich das Quadrat des zugehörigen Radiusvector gleich $\frac{12a^2}{27\cos^2(\frac{2}{3}\varphi)+25\sin^2(\frac{2}{3}\varphi)}$. Der Radiusvector stellt also direct den Kreisradius r dar. Wenn man dann durch die Mitte des Radiusvectors r eine Parallele zur Yaxe, durch den Endpunkt des ersten Sechstels eine Parallele zur Xaxe zieht, so schneiden sich dieselben in dem gesuchten Mittelpunkte M. Man hat also nach dieser Construction nur den jedesmaligen Winkel $\frac{2}{3}\varphi$ anzutragen, den gefundenen Radiusvector in 6 gleiche Teile zu teilen und durch die entsprechenden Teilpunkte Parallele zu den Axen zu ziehen.

In ähnlicher Weise wird sich die Construction bei andern Werten von $\frac{a^2}{b^2}$ einrichten lassen.

Auch im allgemeinen Falle lässt sich eine Ellipse derart angeben, dass der unter dem Winkel $\frac{2}{3}\varphi$ gezogene Radiusvector den Kreisradius r darstellt. Die Gleichung derselben lautet:

$$\frac{X^2}{\left(\frac{4ab^2}{a^2+3b^2}\right)^2} + \frac{Y^2}{\left(\frac{4a^2b}{3a^2+b^2}\right)^2} = 1$$

Obwol die Construction dieser Ellipse nicht mehr Schwierigkeiten bietet als die derjenigen Curve, von welcher nachher die Rede sein wird, so ziehen wir doch für den allgemeinen Fall eine andere Methode der Lösung vor, da es auf dem ersten Wege noch wieder besonderer complicirter Constructionen bedarf, um aus dem gefundenen r nun wirklich die Coordinaten $\mathfrak{P}$ und $\mathfrak{Q}$ zu gewinnen.

Die Sache gestaltet sich einfacher, wenn man statt der obigen Ellipse den geometrischen Ort der Kreismittelpunkte benutzt. Man hat dann für jeden einzelnen Winkel $\frac{2}{3}\varphi$ nur noch die Richtung von OM zu bestimmen und findet den Kreismittelpunkt als Durchschnittspunkt des geometrischen Orts mit einer in dieser Richtung gezogenen

Geraden. Den Radius r erhält man dann ganz von selbst, wenn man in M an eine zur positiven Xaxe parallel gezogene Gerade nach oben den Winkel $\frac{3}{4}\varphi$ anträgt und den freien Schenkel bis zum Schnitt mit der Ellipse verlängert. Wir finden diesen geometrischen Ort der Kreismittelpunkte, wenn wir die Werte von $r\cos(\frac{3}{4}\varphi)$ und $r\sin(\frac{3}{4}\varphi)$, die sich aus (28) ergeben, in die Gleichung (27) einsetzen. Es ergiebt sich dann die Gleichung:

$$\frac{\mathfrak{P}^2}{\left[\frac{a(a^2-b^2)}{a^2+3b^2}\right]^2}+\frac{\mathfrak{Q}^2}{\left[\frac{b(a^2-b^2)}{3a^2+b^2}\right]^2}=1 \tag{29}$$

Was nun die Construction dieser Ellipse angeht, so wollen wir zunächst die Annahme machen, dass $a > b$ ist. Der Brennpunkt F liegt dann auf der Xaxe in der Entfernung $\sqrt{a^2-b^2}$ von 0. Berücksichtigen wir ferner die Darstellungen

$$\tfrac{1}{2}\sqrt{a^2+3b^2}=\sqrt{\frac{a^2-b^2}{4}+b^2}$$

und

$$\tfrac{1}{2}\sqrt{3a^2+b^2}=\sqrt{a^2-\frac{a^2-b^2}{4}}$$

so ergeben sich für die Halbaxen die folgenden Constructionen:

1. Man errichte in der Mitte von $0F$ ein Lot, welches die durch den Scheitel B zur Xaxe gezogene Parallele in E trifft, verbinde 0 mit E und trage von 0 aus $\frac{1}{2}0F$ darauf ab bis G. Verbindet man dann E mit A, zieht GH par. EA, verbindet H mit E und zieht GJ par. EH, so ist $0J$ die erste Halbaxe der Ellipse.

   Beweis: Nach der Construction verhält sich $0G$ zu $0E$ wie $\sqrt{a^2-b^2}$ zu $\sqrt{a^2+3b^2}$. Es ist daher

   $$0H=a\cdot\frac{0G}{0E}=\frac{a\sqrt{a^2-b^2}}{\sqrt{a^2+3b^2}} \quad\text{und}$$

   $$0J=0H\cdot\frac{0G}{0E}=\frac{a(a^2-b^2)}{a^2+3b^2}$$

2. Man beschreibe um $0A$ einen Halbkreis, ferner mit $\frac{1}{2}0F$ um A einen Kreis, welcher den Halbkreis in K trifft, verbinde 0 mit K und trage von 0 aus $\frac{1}{2}0F$ darauf ab bis L.

Verbindet man dann K mit B, zieht LN par. KB, verbindet N mit K und zieht LT par. KN, so ist OT die zweite Halbaxe.

Beweis: Es verhält sich OL zu OK wie $\sqrt{a^2-b^2}$ zu $\sqrt{3a^2+b^2}$. Daher ist

$$ON = b\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{\sqrt{3a^2+b^2}} \quad \text{und} \quad OT = \frac{b(a^2-b^2)}{3a^2+b^2}$$

Es kommt nun darauf an die Richtung OM zu bestimmen. Sofern wir annehmen, dass der zu trisecirende Winkel $\frac{3}{2}\varphi$ ein concaver ist, liegt M im vierten Quadranten. Bezeichnen wir den Winkel, welchen OM mit der positiven Xaxe bildet, mit ϑ, so ergiebt sich aus (28)

$$\operatorname{tg}\vartheta = \frac{b^2}{a^2}\operatorname{tg}(\tfrac{3}{4}\varphi)$$

Man ziehe nun im Scheitel, A die Tangente und errichte auf der positiven Seite der X im Abstande $\frac{b^2}{a}$ von 0 nach beiden Seiten das Lot. Den Fusspunkt dieses Lotes findet man am einfachsten, indem man C mit B verbindet und in B auf BC die Senkrechte errichtet, welche die Xaxe in dem gewünschten Punkte trifft. Nach diesen Vorbereitungen gestaltet sich die Construction nun einfach in der folgenden Weise: Man trage an OA nach unten $\frac{3}{4}\varphi$ an und verlängere den Schenkel, bis er das Lot in V trifft, ziehe VW par. OA und verbinde W mit 0, so ist OW der gesuchte Radiusvector, auf welchem der Mittelpunkt M liegt.

Beweis. Es ist

$$AW = \frac{b^2}{a}\operatorname{tg}(\tfrac{3}{4}\varphi) = a\operatorname{tg}(AOW)$$

also

$$\operatorname{tg}(AOW) = \frac{b^2}{a^2}\operatorname{tg}(\tfrac{3}{4}\varphi) = \operatorname{tg}\vartheta \quad \text{und} \quad \text{Wkl. } AOW = \vartheta$$

Der Mittelpunkt M ist der Schnittpunkt von OW mit dem geometrischen Ort der Kreismittelpunkte. Zieht man dann durch M eine Parallele zu OA, trägt nach beiden Seiten den Winkel $\frac{3}{4}\varphi$ an, verlängert den oberen Schenkel bis zum Schnittpunkt P_4 mit der gegebenen Ellipse und beschreibt mit MP_4 um M den Kreis, so trifft derselbe die Ellipse in den Eckpunkten P_1, P_2, P_3 eines gleichseitigen Dreiecks, und es teilt die Verbindungslinie MP_1 den ganzen Winkel $\frac{3}{2}\varphi$ in drei gleiche Teile.

Nachdem der geometrische Ort der Kreismittelpunkte einmal construirt, in A die Scheiteltangente und im Abstande $\frac{b^2}{a}$ von 0 die Senkrechte zur Xaxe gezeichnet ist, gestaltet sich also die weitere Construction im einzelnen Falle sehr einfach.

Uebrigens gilt dieselbe Construction auch für Winkel grösser als 180°.

Der Punkt M rückt dann in den dritten Quadranten. In diesem Falle muss natürlich der Schenkel des in 0 an $0A$ angetragenen Winkels $\frac{2}{3}\varphi$ über 0 hinaus verlängert werden; die Punkte V und W liegen im ersten Quadranten und M liegt dieses Mal auf der Verlängerung von $0W$ über 0 hinaus.

Für den Winkel 180° fällt M mit dem unteren Scheitel des geometrischen Orts der Kreismittelpunkte zusammen und r ist gleich der Entfernung dieses Punktes von B. Für den Winkel 360° endlich ist M der linke Scheitel der Mittelpunktscurve und r die Entfernung dieses Punktes von C. Auch in diesen Fällen behält unsere Construction ihre Gültigkeit.

Wir gehen nun zu dem zweiten Falle über, dass $a < b$ ist.

Der Brennpunkt E liegt dann auf der Yaxe in der Entfernung $\sqrt{b^2 - a^2}$ von 0. Der geometrische Ort der Kreismittelpunkte ist dann genau dieselbe Ellipse, die man erhält, wenn man die grössere Halbaxe b als die erste, die kleinere a als die zweite ansieht und die Construction nach den im ersten Falle angegebenen Vorschriften ausführt.

Der Mittelpunkt M liegt in diesem Falle für concave Winkel $\frac{2}{3}\varphi$ im zweiten Quadranten, für convexe im ersten.

Um die Richtung $0M$ zu finden, verfahre man wie früher. Man ziehe in A die Scheiteltangente, verbinde C mit B, errichte in B auf BC das Lot, welches dieses Mal die Verlängerung von $0A$ trifft und construire in dem Schnittpunkte das Lot. Dann trage man an $0A$ den Winkel $\frac{2}{3}\varphi$ an, verlängere bis zum Schnittpunkte V mit dem Lote, ziehe VW par. $A0$ und verbinde 0 mit W. Bei concavem Winkel $\frac{2}{3}\varphi$ liegt dann M auf der Verlängerung von $W0$ über 0 hinaus, bei convexem auf $0W$ selbst.

Die Behandlung der beiden Fälle lässt erkennen, dass man mit Hülfe derselben Ellipse jeden Winkel auf 2 Arten triseciren kann.

Bei der einen Construction öffnet sich der Winkel von M aus in der Richtung der positiven Xaxe, bei der andern in der Richtung der positiven Yaxe. Beide Mittelpunkte liegen auf derselben Ellipse. Ist in der zu Grunde liegenden Ellipse die erste Axe grösser als die zweite, so liegt bei concavem $\frac{3}{4}\varphi$ der eine Mittelpunkt im vierten, der andere im dritten, bei convexem $\frac{3}{4}\varphi$ der eine im dritten, der andere im zweiten Quadranten. Ist dagegen die erste Axe kleiner als die zweite, so liegt bei concavem $\frac{3}{4}\varphi$ der eine Mittelpunkt im zweiten, der andere im ersten, bei convexem $\frac{3}{4}\varphi$ der eine im ersten, der andere im vierten Quadranten. Da nun aber der Symmetrie wegen zu jedem der beiden Mittelpunkte noch drei andere gehören, von denen aus die Trisection ebenfalls ausgeführt werden kann, so giebt es im Ganzen 8 verschiedene Möglichkeiten.

Bei zwei derselben öffnet sich der Winkel nach der Richtung der positiven, bei zwei andern nach der der negativen Xaxe, ebenso bei zwei weiteren nach der der positiven und bei den beiden letzten nach der der negativen Yaxe.

§ 9.

Die Trisection des Winkels mittelst fester Hyperbeln. Fig. 3.

Es sei die Hyperbel

$$\frac{X^2}{a^2} - \frac{Y^2}{b^2} = 1$$

gegeben. Soll diese mit der durch Gleichung (23) dargestellten Curve identisch sein, so muss

$$u = -\frac{a^2}{b^2}$$

und

$$a^2 = \frac{r^2}{16\,a^2b^4}\left[a^2(a^2-3b^2)^2\cos^2(\tfrac{3}{4}\varphi) - b^2(3a^2-b^2)^2\sin^2(\tfrac{3}{4}\varphi)\right]$$

sein, woraus

$$(30)\qquad r^2 = \frac{16\,a^4b^4}{a^2(a^2-3b^2)^2\cos^2(\frac{3}{4}\varphi) - b^2(3a^2-b^2)^2\sin^2(\frac{3}{4}\varphi)}$$

wird. Aus (26) erhalten wir ferner für die Coordinaten von M:

$$(31)\qquad \mathfrak{P} = -\frac{r}{4}\,\frac{a^2+b^2}{b^2}\cos(\tfrac{3}{4}\varphi),\qquad \mathfrak{Q} = -\frac{r}{4}\,\frac{a^2+b^2}{a^2}\sin(\tfrac{3}{4}\varphi)$$

Ferner wird der geometrische Ort der Kreismittelpunkte dargestellt durch:

(32) $$\frac{\mathfrak{P}^2}{\left[\frac{a(a^2+b^2)}{a^2-3b^2}\right]^2} - \frac{\mathfrak{Q}^2}{\left[\frac{b(a^2+b^2)}{3a^2-b^2}\right]^2} = 1$$

Der Ausdruck für r^2 lässt zunächst erkennen, dass das Intervall der Winkel $\frac{1}{3}\varphi$, welche mit Hülfe der vorgelegten Hyperbel trisecirt werden können, ein beschränktes ist. Die Construction ist nur dann ausführbar, wenn der Nenner von r^2 positiv ist, also nur für die Werte, für welche

$$a^2(a^2-3b^2)^2\cos^2(\tfrac{1}{3}\varphi) > b^2(3a^2-b^2)^4\sin^2(\tfrac{1}{3}\varphi) \quad \text{oder}$$

(33) $$\mathrm{tg}^2(\tfrac{1}{3}\varphi) < \frac{a^2(a^2-3b^2)^2}{b^2(3a^2-b^2)^2}$$

ist. Die Construction kann in analoger Weise ausgeführt werden wie bei der Ellipse. Der Mittelpunkt M wird gefunden als Durchschnittspunkt des geometrischen Orts mit einer durch 0 gehenden Geraden. Für concave Winkel $\frac{1}{3}\varphi$ liegt M im dritten Quadranten.

Bezeichnen wir den Winkel, welchen OM mit der negativen Xaxe bildet, mit ϑ, so ist

$$\mathrm{tg}\,\vartheta = \frac{b^2}{a^2}\,\mathrm{tg}(\tfrac{1}{3}\varphi)$$

Wenn wir ferner den Winkel, welchen die im entsprechenden Quadranten liegende Asymptote der Mittelpunktshyperbel mit der negativen Xaxe bildet, ε nennen, so ergiebt sich aus (32) der Wert

$$\mathrm{tg}^2\varepsilon = \frac{b^2(a^2-3b^2)^2}{a^2(3a^2-b^2)^2}$$

Die unter dem Winkel ϑ gezogene Gerade trifft daher die Hyperbel der Mittelpunkte nur dann, wenn

$$\mathrm{tg}^2\vartheta < \mathrm{tg}^2\varepsilon \quad \text{oder} \quad \mathrm{tg}^2(\tfrac{1}{3}\varphi) < \frac{a^2(a^2-3b^2)^2}{b^2(3a^2-b^2)^2}$$

ist. Dieses Resultat stimmt mit dem aus dem Ausdruck von r^2 gewonnenen völlig überein, und wir erkennen jetzt, dass die Hyperbel deswegen für keine grösseren Winkel zur Trisection verwandt werden kann, weil dann die unter dem Winkel ϑ gezogene Gerade den geometrischen Ort der Mittelpunkte nicht mehr trifft.

Will man grössere Winkel triseeiren, so muss man sich der cenjugirten Hyperbel

$$\frac{X^2}{a^2} - \frac{Y^2}{b^2} = -1$$

bedienen, welche gerade für diese und nur für diese benutzt werden kann. Man zeichne alse gleich ven vorn herein beide Hyperbeln nnd die beiden zngehörigen geometrischen Oerter der Kreismittelpnnkte, welche natürlich auch cenjugirt sein müssen. Dann lassen sich alle Winkel triseciren mit alleiniger Ausnahme derjenigen, für welche

$$\mathrm{tg}^2(\tfrac{3}{4}\varphi) = \frac{a^2(a^2-3b^2)^2}{b^2(3a^2-b^2)^2}$$

ist. Die Censtrnction des Radiusvecters bleibt auch für die conjngirte Hyperbel dieselbe. Liegt M auf dem geemetrischen Ort zur ersten Hyperbel, so wird der Winkel $\frac{3}{4}\varphi$ auch durch die erste Hyperbel trisecirt, im andern Falle durch die zweite.

Nur wenn die Richtnng des Radiusvectors mit der Richtnng der Asympteten znr Curve der Mittelpnnkte übereinstimmt, ist die Trisection unmöglich, da dann M nnendlich weit rückt.

Bever wir in der Betrachtung des allgemeinen Falles fortfahren, ist es wünschenswert, das bisher Abgeleitete an Beispielen zu demonstriren.

Die gleichseitige Hyperbel.

Der geemetrische Ort der Kreismittelpunkte hat die Eigenschaft, in einem Fallo mit der gegebenen Hypcrhel selbst übereinznstimmen. Dieser Fall tritt ein für dio gleichseitige Hyperbel.

Setzen wir in (32) $a^2 = b^2$. so kemmt

$$\mathfrak{P}^2 - \mathfrak{Q}^2 = a^2$$

Für die Coordinaten von M ergiebt sich ferner

$$\mathfrak{P} = -\frac{r}{2}\cos(\tfrac{3}{4}\varphi), \quad \mathfrak{Q} = -\frac{r}{2}\sin(\tfrac{3}{4}\varphi)$$

Endlich wird

$$r = 2 \,.\, 0M$$

Die Coustruction mit Hülfe der Hyperbel selbst ist ausführbar, so lange

$$\mathrm{tg}^2(\tfrac{3}{4}\varphi) < 1$$

ist, d. h. für alle Winkel unter 90°. Für die Winkel über 90° gilt die conjugirte Hyperbel. Die Construction gestaltet sich folgendermassen: Man trage in O an die negative Xaxe nach unten den Winkel $\frac{3}{2}\varphi$ an und verlängere den Schenkel bis zum Schnitte mit der gegebenen Hyperbel. Der Schnittpunkt ist der Kreismittelpunkt M, und MO ist gleich $\frac{1}{2}r$. Man verlängere dann MO über O hinaus bis zum Schnitte mit dem andern Hyperbelzweig und beschreibe mit der Entfernung von M bis zu diesem Schnittpunkte um M den Kreis, welcher die Hyperbel noch in den drei weiteren Punkten P_1, P_2, P_3 der Art trifft, dass P_1, P_2, P_3 die Ecken eines gleichseitigen Dreiecks bilden, und MP_1 den in M an MO angetragenen Winkel $\frac{3}{2}\varphi$ trisecirt. Es ist dies die in dem ersten Artikel von Panzerbieter angegebene Lösung des Problems.

Die Hyperbel von der Exentricität 2.

Noch in zwei andern Fällen erfordert die Construction des geometrischen Orts keine besondere Anstrengung, wenn nämlich entweder

$$3a^2 = b^2 \quad \text{oder} \quad a^2 = 3b^2 \quad \text{ist.}$$

Im ersten Falle erhalten wir die Gleichung

$$\mathfrak{P}^2 = \frac{a^2}{4}$$

welche zwei zur Xaxe senkrechte Geraden darstellt. Die Gleichung der Hyperbel heisst dann

$$\frac{X^2}{a^2} - \frac{Y^2}{3a^2} = 1$$

ihre Excentricität ist also gleich 2.

Ferner folgt aus (33), dass in diesem Falle die Curve zur Trisection aller Winkel verwendet werden kann, für welche

$$\operatorname{tg}^2(\tfrac{1}{4}\varphi) < \infty$$

ist, d. h. für alle Winkel mit Ausnahme des gestreckten, während die conjugirte Hyperbel

$$\frac{X^2}{a^2} - \frac{Y^2}{3a^2} = -1$$

zur Trisection völlig ungeeignet ist.

Für r ergieht sich der Wert $\pm \frac{3}{2} \frac{a}{\cos(\frac{3}{4}\varphi)}$, je nachdem $\frac{3}{2}\varphi$ concav oder convex ist, und als Coordinaten des Mittelpunktes M

$$\mathfrak{P} = \mp \frac{a}{2}, \quad \mathfrak{Q} = \mp \tfrac{3}{2} a \operatorname{tg}(\tfrac{3}{4}\varphi)$$

Bei concavem Winkel liegt demnach M im dritten, hei convexem im vierten Quadranten.

Daraus ergehen sich die folgenden Constructionen, welche fast ebenso einfach sind wie die hei der gleichseitigen Hyperhel.

Ist $\frac{3}{2}\varphi$ concav, so trage man im Scheitelpunkte A an AO nach unten die Hälfte des Winkels an und verlängere den Schenkel, his er die Senkrechte

$$X = -\frac{a}{2}$$

trifft. Dann ist der Schnittpunkt der gesuchte Kreismittelpunkt M und die Entfernung MA gleich dem Kreisradius r.

Wie man erkennt, gehen alle Kreise durch den Scheitel A der Hyperbel.

Im Falle, dass $\frac{3}{2}\varphi$ convex ist, trage man $\frac{3}{4}\varphi$ im andern Scheitelpunkte C an die Verlängerung von OC nach unten hin an und verlängere den Schenkel, bis er die Senkrechte

$$X = +\frac{a}{2}$$

trifft. Dann ist wiederum der Schnittpunkt der Mittelpunkt M und die Entfernung MC gleich dem Radius des Kreises.

In diesem Falle gehen alle Kreise durch den Scheitel C.

Beide Fälle lassen sich auch vereinigen, wenn man den Mittelpunkt M in der früheren Art als Durchschnittspunkt einer durch O gehenden Geraden mit dem geometrischen Orte hestimmt. Man errichte auf der positiven X axe in der Entfernung

$$\frac{b^2}{a} = 3a$$

das Lot, construire die Scheiteltangente in A, trage in O an OA nach ohen $\frac{3}{4}\varphi$ an, verlängere den Schenkel his zum Schnitt mit der Senkrechten (eventuell üher O hinaus), ziehe durch den Schnittpunkt eine Parallele zur X axe und verhinde den Schnittpunkt dieser Pa-

rallelen und der Tangente mit O. Im Falle eines concaven Winkels liegt dann M auf der Verlängerung dieser Verbindungslinie über O hinaus, im Falle eines convexen Winkels auf ihr selbst.

Da zum Punkte M noch 3 andere zu den Axen symmetrisch gelegene gehören, von denen aus der Winkel ebenfalls trisecirt werden kann, so giebt es im Ganzen 4 Möglichkeiten. Bei zwei derselben öffnet sich der Winkel in der Richtung der positiven Xaxe, bei den andern beiden in der entgegengesetzten Richtung. Ausserdem giebt es noch 4 weitere Möglichkeiten, bei welchen sich der Winkel nach der positiven und negativen Yaxe öffnet. Dieselben ergeben sich aber erst aus der Betrachtung des Falles

$$a^2 = 3b^2$$

zu dem wir jetzt übergehen.

Wenn $a^2 = 3b^2$ ist, so lässt sich die Hyperbel

$$\frac{X^2}{3b^2} - \frac{Y^2}{b^2} = 1$$

da hierfür der Ausdruck von r^2 stets negativ ist, überhaupt nicht zur Trisection verwenden, wohl aber die conjugirte Hyperbel

$$\frac{X^2}{3b^2} - \frac{Y^2}{b^2} = -1$$

Diese hat wieder die Excentricität 2 und unterscheidet sich von der vorigen nur durch die Lage zu den Axen. Während sich im vorigen Falle der trisecirte Winkel von M aus in der Richtung der Hauptaxe erstreckte, öffnet er sich jetzt senkrecht dazu.

Es wird für diesen Fall

$$r = \tfrac{3}{2}\frac{b}{\sin(\frac{3}{4}\varphi)}, \quad \mathfrak{P} = -\tfrac{3}{2}b\cot(\tfrac{3}{4}\varphi) \quad \text{und} \quad \mathfrak{Q} = -\frac{b}{2}$$

Die Construction gilt demnach für alle Winkel; M liegt für concave Winkel im dritten, für convexe im vierten Quadranten. Man trage für einen concaven Winkel das Complement des halben Winkels im Scheitel B an BO nach links hin an und verlängere bis zum Schnitt mit der Geraden

$$Y = -\frac{b}{2}$$

Dieser Schnittpunkt ist dann der Mittelpunkt M und MB der Kreisradius. Alle Kreise gehen durch den Scheitel B.

Ist der Winkel convex, so trage man $\frac{3}{4}\varphi - 90^0$ in B an BO nach rechts hin an und verlängere wieder bis zum Schnitt mit

$$Y = -\frac{b}{2}$$

Der Schnittpunkt ist M und MB_i der Radius. Alle Kreise gehen durch denselben Scheitelpunkt B.

Uebrigens lässt sich auch hier der Mittelpunkt M für beide Fälle in derselben Weise finden, wenn man denselben als Schnittpunkt des geometrischen Orts mit einer durch 0 gehenden Geraden bestimmt. Man errichte auf der positiven Xaxe in der Entfernung

$$\frac{a^2}{b} = \frac{1}{3}a$$

das Lot, construire im Scheitel A der conjugirten Hyperbel die Tangente, trage in 0 an 0 A nach unten $\frac{3}{4}\varphi$ an, verlängere den Schenkel bis zum Schnitte mit der Senkrechten (eventuell über 0 hinaus), ziehe durch den Schnittpunkt eine Parallele zur Xaxe und verbinde den Schnittpunkt dieser Parallelen und der Tangente mit 0. Im Falle eines concaven Winkels liegt dann M auf der Verlängerung dieser Linie über 0 hinaus, im andern Falle auf ihr selbst.

Es ist dies fast wörtlich die im Falle $3a^2 = b^2$ an der entsprechenden Stelle angegebene Construction.

Aus der Betrachtung beider Fälle ergiebt sich das Resultat, dass es im Ganzen 8 Möglichkeiten giebt, mit Hilfe der Hyperbel von der Excentricität 2 den Winkel zu trisecîren. Von 4 symmetrisch zu den Axen gelegenen Mittelpunkten öffnet sich der Winkel in der Richtung der Hauptaxe und entgegengesetzt, von den 4 andern in den beiden dazu senkrechten Richtungen.

Diese Lösung der Dösiteilung des Winkels findet sich sowol in den ersten beiden Artikeln von Panzerbieter wie auch in der genannten Programmabhandlung.

Weitere Behandlung im Falle einer beliebigen Hyperbel.

Es war schon gesagt worden und hat sich auch in den behandelten Beispielen bestätigt, dass die Construction des Mittelpunktes für die ursprüngliche Hyperbel wie für die conjugirte nach derselben Regel ausgeführt werden kann. Der Grund hierfür liegt in dem Umstande, dass die Formeln (31) unabhängig davon sind, von welcher der beiden

Hyperheln im gegebenen Falle die Trisection wirklich ausgeführt wird. Es ist allgemein

$$\operatorname{tg}\vartheta = \frac{b^2}{a^2}\operatorname{tg}(\tfrac{2}{3}\varphi)$$

Darans ergieht sich die folgende Constrnction, welche der für die Ellipse gegebenen ganz analog ist: Man ziehe im Scheitel A die Tangente und errichte anf der positiven Seite der X im Ahstande $\frac{b^2}{a}$ von 0 das Lot. Den Fnsspnnkt findet man am einfachsten, indem man C mit B verhindet und in B auf BC die Senkrechte errichtet, welche dio Xaxe in dem gosnchten Pnnkte trifft. Sodann trage man $\frac{2}{3}\varphi$ an $0A$ nach ohen an und verlängero den Schenkel (eventnell über 0 hinaus), bis er das Lot in V trifft, ziehe VW par. $0A$ nnd verhinde W mit 0. Im Falle eines concaven Winkels $\frac{2}{3}\varphi$ liegt dann M anf der Verlängerung des Radinsvectors über 0 hinaus, im Falle eines convexen Winkels anf ihm selbst. Je nachdem nun die eine oder andere Mittelpnnktscnrve gotroffen wird, wird der Winkel dnrch die eino oder andere Hyporhol trisocirt.

Führt man die Construction in eutsprechender Woise für die Yaxe aus, indem man die conjngirte Hyperhel als die nrsprüngliche ansieht, so erhält man noch einen zweiten Radinsvector, anf welchem der Mittelpunkt M liegt, von welchem ans der Winkel $\frac{2}{3}\varphi$ sich nach der Yaxe hin öffnet. Zu jedem der heiden Punkte gehören aher noch drei andore symmetrisch zu den Axen liegende, es lässt sich also auch im allgemeinen Falle dio Construction anf 8 verschiedene Arten ausführen.

Auch dio Constrnction des geometrischon Orts der Mittelpnnkte kann in ähnlicher Weise erfolgen wie hei der Ellipse. Der Brennpnnkt F liegt anf der Xaxe in der Entfernung $\sqrt{a^2+b^2}$ von 0. Je nach dem Verhältniss dieser Strecke zn den Axen $2a$ nnd $2b$ gestaltet sich der Anfang der Constrnction verschiedon. Um dieselbe wenigstens für einen Fall vollständig angehen zn können, wollen wir die Annahme machen, dass $a^2 > 3b^2$ sei. Es ist aus den Formeln leicht zu entnehmen, wie sich die Constrnction für die andern Fälle verändert. Für nnsern Fall ist $a^2+b^2 > 4b^2$ nnd $4a^2 > a^2+b^2$. Die Construction ist die folgendo:

1. Man construire üher $\frac{1}{2}0F$ als Hypotenuse das rechtwinklige Dreieck $0EZ$, dessen eine Kathete EZ gleich b ist, nnd trage von 0 aus auf $0E$ nnd dessen Verlängernng $\frac{1}{2}0F$ ab his G. Verbindet man dann E mit A, zieht

GH par. EA, verbindet H mit E und zieht GJ par. EH, so ist OJ die erste Halbaxe.

2. Man construire über OA als Hypotenuse das rechtwinklige Dreieck OKA, dessen eine Kathete

$$KA = \tfrac{1}{2}OF$$

ist und trage von O aus auf OK $\tfrac{1}{2}OF$ ab bis L. Verbindet man dann K mit B, zieht LN par. KB, verbindet N mit K und zieht LT par. KN, so ist OT die zweite Halbaxe.

Während bei der Ellipse die Construction stets endliche Werte ergiebt, die der Grösse nach unter den Halbaxen der gegebenen Ellipse gelegen sind, gestaltet sich hier die Sache ganz anders. Um uns eine klare Vorstellung zu verschaffen, wollen wir die Annahme machen, dass die Halbaxe a fest gegeben sei. Wir erschöpfen dann alle Möglichkeiten, wenn wir b sämtliche Werte von 0 bis ∞ durchlaufen lassen. Wir beginnen mit dem Falle, dass $a^2 = b^2$ ist. Wie wir schon bei der Behandlung des ersten Beispiels sahen, fallen dann beide Oerter mit den gegebenen Curven zusammen. Wird b kleiner, so entfernen sich die Scheitel des ersten Orts, während die des zweiten näher an 0 heranrücken. Bei $a^2 = 3b^2$ sind beide Zweige des ersten in unendliche Ferne gerückt, der zweite ist zu dem Paar gerader Linien

$$Y = \pm\frac{b}{2}$$

geworden. Nimmt b noch weiter ab, so erscheinen die beiden Zweige des ersten wieder und rücken an 0 heran, der zweite setzt seine Bewegung gegen den Mittelpunkt hin fort.

An der Grenze $b = 0$ wird die erste Halbaxe gleich a, die zweite gleich null. Gehen wir wieder zu dem Falle $a^2 = b^2$ zurück und lassen jetzt b zunehmen, so rückt umgekehrt der erste Ort gegen 0 vor, der zweite entfernt sich.

Für $3a^2 = b^2$ ist der erste zu dem Paar gerader Linien

$$X = \pm\frac{a}{2}$$

geworden, während der zweite in unendlicher Ferne verschwindet. Bei weiterem Wachsen von b erscheinen die Zweige des zweiten Orts anfangs wieder und nähern sich, der erste setzt seine Bewegung gegen den Mittelpunkt hin fort. Für $b = \infty$ rückt der erste Ort bis auf $\frac{a}{3}$ vor, der zweite aber ist im Unendlichen verschwunden, da

die entsprechende Halbaxe sich dem Werte b genähert hat und mit unendlichem b selbst unendlich geworden ist.

Was die Grenze angeht, bis zu welcher die gegebene Hyperbel selbst und von welcher ab die conjugirte zur Trisection verwendet wird, so ist darüber das Folgende zu sagen: Bei $a^2 = b^2$ verteilen sich die Winkel gleichmässig auf beide Curven, die Winkel unter 90° werden von der ersten, die über 90° von der zweiten triseeirt. Nimmt b ab, so sinkt auch die Grenze und erreicht den Wert null für $a^2 = 3b^2$. In diesem Falle kann mit der ersten Hyperbel überhaupt kein Winkel triseeirt werden; sämtliche Trisectionen werden von der conjugirten Hyperbel ausgeführt. Wird b noch kleiner, so wächst die Grenze wieder und nähert sich mit abnehmendem b allmählich dem Werte 180°. Ist $b^2 > a^2$, so nimmt der Grenzwert zu und erreicht bei $3a^2 - b^2$ den höchsten Wert 180°. In diesem Falle triseeirt die Hyperbel selbst alle Winkel, die conjugirte kann zur Construction überhaupt nicht verwendet werden, Bei noch grösseren Werten von b sinkt die Grenze wieder, d. h. die conjugirte Hyperbel tritt wieder für einen Teil der Winkel in Benutzung, und zwar fällt ihr mit wachsendem b ein immer grösserer Teil der Winkel zu, bis für $b = \infty$ der Grenzwert null geworden ist. Für ein sehr grosses b übernimmt also die conjugirte Hyperbel fast allein die Trisection, wie es für ein sehr kleines b die erste Hyperbel tat.

Die Betrachtung zeigt, dass ausser für die gleichseitige Hyperbel noch für zwei andere Fälle sich die Winkel auf beide Curven gleichmässig verteilen. Der eine tritt ein innerhalb des Intervalls $\infty > a^2 > 3b^2$, der andere innerhalb des Intervalls $\infty > b^2 > 3a^2$. Man findet die entsprechenden Bedingungen aus (33), indem man die rechte Seite gleich der Einheit setzt. Es ergiebt sich dann:

$$a = (2 \pm \sqrt{3})\, b$$

Wie wir bei der Discussion in § 5. sahen, stellt die allgemeine Gleichung Hyperbeln mit reeller erster Axe dar, wenn der Mittelpunkt sich von Q nach S und von R über L in's Unendliche bewegt. Wir bemerkten ferner, dass für den zweiten Teil des Weges sämtliche 4 Kreispunkte auf demselben Zweige der Hyperbel liegen. Es lässt sich nun leicht geometrisch erkennen, dass für die Hyperbeln von Q bis S stets $3b^2 > a^2$ und für alle Hyperbeln von R ab $3b^2 < a^2$ sein muss, und dass die Hyperbel $3b^2 = a^2$ für keinen Wert des Winkels φ durch die Gleichung dargestellt wird.

Wir wollen dieses Resultat auch analytisch bestätigen. Wir berechnen zu dem Zwecke die Coordinaten des vierten Kreispunktes

P_4. Da derselbe gleichzeitig auf dem einen Schenkel des Winkels $\frac{2}{3}\varphi$ liegt, und dieser durch eine Parallele zur Xaxe halbirt wird, so sind die Coordinaten

$$\mathfrak{P} + r\cos(\tfrac{2}{3}\varphi) \quad \text{und} \quad \mathfrak{Q} + r\sin(\tfrac{2}{3}\varphi)$$

oder gleich

$$-\frac{r}{4b^2}(a^2 - 3b^2)\cos(\tfrac{2}{3}\varphi) \quad \text{und} \quad -\frac{r}{4a^2}(b^2 - 3a^2)\sin(\tfrac{2}{3}\varphi)$$

Diese Coordinaten lassen die verschiedenen Lagen von P_4 erkennen.

Für den Fall eines concaven Winkels ergiebt sich das Folgende:

Ist $a^2 > 3b^2$, so liegt P_4 im zweiten Quadranten. Es müssen daher, soweit die Trisection mit der gegebenen Hyperbel selbst ausgeführt wird, alle 4 Kreispunkte auf dem linken Zweige derselben liegen. Für $a^2 = 3b^2$ wird die erste Coordinate gleich null, P_4 rückt in die Yaxe hinein und stellt den Schnittpunkt derselben mit der conjugirten Hyperbel dar, welche in diesem Falle allein zur Construtìon verwendet wird. Es stimmt dieses mit dem früheren Resultat völlig überein, dass alle Kreise durch den Scheitel B der conjugirten Hyperbel gehen.

Wenn $a^2 < 3b^2$ und $b^2 < 3a^2$ ist, liegt P_4 im ersten Quadranten. Da aber M stets im dritten Quadranten liegt, muss der Kreis jeden Zweig der Hyperbel in 2 Punkten treffen.

Für $b^2 = 3a^2$ rückt P_4 in die Xaxe hinein, fällt also mit dem Scheitel A zusammen. Alle Kreise gehen durch A, wie schon früher gefunden wurde.

Ist endlich $b^2 > 3a^2$, so liegt P_4 im vierten Quadranten. Soweit die Construction mit der gegebenen Hyperbel selbst ausgeführt wird, schneidet der Kreis jeden Zweig in 3 Punkten, soweit aber die conjugirte Hyperbel benutzt wird, liegen alle 4 Schnittpunkte auf demselben Zweige.

Für den Fall eines convexen Winkels liegt P_4 für das erste Intervall im ersten Quadranten, rückt dann durch die Yaxe hindurch in den zweiten Quadranten hinein und von diesem durch die negative Xaxe in den dritten. Doch ändert dieses nichts an der Tatsache, dass für das erste und letzte Intervall ein Teil der Kreise nur den einen Zweig der Hyperbel schneidet.

§ 10.

Die Trisection mittelst fester Parabeln. Figur 4.

Dio Gleichnng der Parahel sei zunächst

$$Y^2 = -2pX$$

wo $p > 0$ ist. Soll die in § 3 nnter (10) dargestellto Gleichuug dieso Parahel darstellen, so muss

$$r = \frac{4p}{\cos(\frac{3}{4}\varphi)} \tag{34}$$

sein, womit der Kreisradius sogleich bestimmt ist. Da r nur positiv sein kanu, so mnss der zu trisecirende Winkel coucav sein. Sollte aher die Anfgahe gestellt sein, einen convexen Winkel zu triseciren, so henutze man entweder die Parahel

$$Y^2 = 2pX$$

oder man führe die Constrnction für don concaven Winkel aus, welcher den gegehenen zu $4R$ ergänzt. Dann trisecirt MP_3 den zugehörigeu convexen Winkel.

Die Coordinaten des Mittelpunktes sind nach (11)

$$\mathfrak{P} = -\frac{r}{8}\,\frac{9-\cos^2(\frac{3}{4}\varphi)}{\cos(\frac{3}{4}\varphi)}, \quad \mathfrak{Q} = -\frac{r}{4}\sin(\tfrac{3}{4}\varphi) \tag{35}$$

Derselhe liegt also stets im dritten Quadranten.

Wie man sich durch kurze Berechnung üherzeugen kann, stimmt diese Lösung mit der von Panzerhieter in der angeführten Programmahhandlnng gegehenen üherein. Was die Construction selhst angeht, so weisen nnsere Formeln auf die folgende, von der dortigen etwas ahweichende Art der Ausführung hin: Die Entfernnng des Breunpunktes F von der Directrix ist gleich p. Man verlängere diese Strecke üher F hinaus um das Dreifache bis zum Punkte B und um das Dreinndeinhalhfache his znm Punkte C, so dass

$$AB = 4p \quad \text{und} \quad AC = 4\tfrac{1}{2}p$$

wird, nnd errichte in F, B und C Lote zur Axe. Hierauf trage man in A an AC den Winkel $\frac{3}{4}\varphi$ an, verlängere deu freien Schenkel, his er die Senkrechten in D, E und G schneidet, errichte $HG \perp GA$ nnd ziehe durch H eiue Parallele zur Yaxe nnd dnrch D eine Parallele zur Xaxe. Dann ist der Schnittpnnkt der heiden Parallelen der gesuchte Kreismittelpnnkt M nnd AE der Radius des Kreises.

Trägt man daher in M an MD nach beiden Seiten $\frac{3}{4}\varphi$ an und beschreibt mit AE um M einen Krois, so trifft derselbe die Parabel in den Endpunkten P_1, P_2, P_3 eines gleichseitigen Dreiecks und der Winkel $\frac{3}{2}\varphi$ wird durch MP_1 trisecirt.

Beweis: $4p = AE \,.\, \cos(\frac{3}{4}\varphi)$, also

$$AE = \frac{4p}{\cos(\frac{3}{4}\varphi)}$$

Ferner ist

$$HO = HA - OA = \frac{9}{8}\,\frac{r}{\cos(\frac{3}{4}\varphi)} - \frac{r}{8}\cos(\frac{3}{4}\varphi) = \frac{r}{8}\,\frac{9 - \cos^2(\frac{3}{4}\varphi)}{\cos(\frac{3}{4}\varphi)}$$

und

$$FD = AD \,.\, \sin(\frac{3}{4}\varphi) = \frac{r}{4}\sin(\frac{3}{4}\varphi)$$

Man hat also im gegebenen Fallo nur dio Hälfte des trisecirenden Winkels anzutragen, ein Lot zu errichten und zwei Parallelen zu ziehen.

Die Construction ist so elementar, dass wir des geometrischen Ortes der Kreismittelpunkte für diesen Fall gar nicht bedürfen. Dennoch wollen wir die Gleichung desselben ableiten.

Aus (34) ergiebt sich

$$\cos(\frac{3}{4}\varphi) = \frac{4p}{r}$$

Wir setzen diesen Wert in die Ausdrücke für $\mathfrak{P}$ und $\mathfrak{Q}^2$ ein, die sich aus (35) ergeben. Dann kommt

$$32p \,.\, \mathfrak{P} = 16p^2 - 9r^2 \quad \text{und}$$
$$16\mathfrak{Q}^2 = r^2 - 16p^2$$

woraus durch Elimination von r^2:

(36) $$\mathfrak{Q}^2 = -\frac{2}{9}p[\mathfrak{P} + 4p]$$

Der geometrische Ort ist also eine Parabel, die sich vom Punkte C als Scheitelpunkt aus nach der negativen Seite der Xaxe erstreckt. Der Parameter ist gleich dem neunten Teile des Parameters der gegebenen Parabel.

Will man den geometrischen Ort zur Construction verwenden, so gestaltet sich diese insofern einfacher, als man nur in A den Winkel $\frac{3}{4}\varphi$ anzutragen und durch D eine Parallele zur Xaxe zu ziehen



braucht, welche die Parabel der Mittelpunkte in M trifft. Durch Antragen des Winkels $\frac{3}{4}\varphi$ an MD ergiebt sich dann der Radius r von selbst.

Wir verwiesen oben für den Fall eines convexen Winkels auf die Parabel

$$Y^2 = 2pX$$

Setzen wir diese in Verbindung mit (10), so ergiebt sich:

$$r = \frac{-4p}{\cos(\frac{3}{4}\varphi)}$$

woraus ersichtlich, dass diese Curve in der Tat und zwar nur zur Trisection eines convexen Winkels verwendet werden kann. Der Mittelpunkt liegt hierfür im vierten Quadranten. Die Construction gestaltet sich genau wie im vorigen Falle.

Wir nehmen nun an, die gegebene Parabel habe die Gleichung

$$X^2 = -2pY$$

Dann ergiebt sich durch Vergleichung mit (13)

$$(37) \qquad r = \frac{4p}{\sin(\frac{3}{4}\varphi)}$$

und für die Coordinaten des Mittelpunkts kommt:

$$(38) \qquad \mathfrak{P} = -\frac{r}{4}\cos(\tfrac{3}{4}\varphi), \quad \mathfrak{Q} = -\frac{r}{8}\,\frac{9-\sin^2(\frac{3}{4}\varphi)}{\sin(\frac{3}{4}\varphi)}$$

In diesem Falle kann die Construction, da r den halben sinus des halben Winkels enthält, für alle Winkel angewendet werden. Für concave Winkel liegt M im dritten, für convexe im vierten Quadranten.

Für die Construction ergiebt sich das Folgende:

Man construire wie im vorigen Falle

$$AB = 4p, \quad AC = 4\tfrac{1}{2}p$$

errichte wieder in F, B und C Lote, trage aber dieses Mal das Complement von $\frac{3}{4}\varphi$ in A an AC nach der Seite der negativen X zu an und verlängere bis J, K und L, construire $NL \perp AL$ und ziehe

durch N und J Parallelen zu den Axen, die sich in M' schneiden. Der Radius ist dann gleich AK.

Die Behandlung beider Fälle lässt erkennen, dass auch mit Hülfe jeder Parabel der Winkel auf 2 Arten trisecirt werden kann. Da aber zu jedem der beiden Kreismittelpunkte der Symmetrie wegen noch ein zweiter gehört, so giebt es im Ganzen sogar 4 Möglichkeiten. Ist der Winkel concav, so öffnet er sich für 2 symmetrisch gelegene Mittelpunkte in der Richtung der Hauptaxe vom Brennpunkt zum Scheitel hin, für die beiden andern ebenfalls symmetrisch gelegenen nach den beiden zur Hauptaxe senkrechten Richtungen. Ist der Winkel convex, so öffnen sich 2 Winkel in der Richtung der Hauptaxe vom Scheitel zum Brennpunkt zurück, die beiden andern wieder nach den beiden hierzu senkrechten Richtungen.

Berlin, den 1. December 1892.

XXV.

Analytische Entwicklung von Gleichungen über drei in demselben Punkte sich schneidende Transversalen eines Dreieckes.

Von

Professor **Josef Kiechl.**

Einleitung.

Wird die Richtnng von A gegen B (Fig. 1) als die positive gewählt, und hat die Strecke AB die Länge von $+e$ Einheiten, so ist die Strecke BA mit Rücksicht anf den Gegensatz der Rictung von der Länge $-e$, also

$$BA = -AB$$

Jede Strecke anf der durch die Pnnkte A nnd B gehenden Geraden ist als positiv oder negativ zn hetrachten, je nachdem die Richtnng von dem ersten zum zweiten Endpnnkte der Richtnng AB gleich oder entgegengesetzt ist.

Bei zwei oder mehreren verschiedenen Geraden ist die positive Richtung der einen von jener der andern im allgemeinen nnahhängig, sind aher die Linien parallel, so wird voransgesetzt, dass ihre positiven Richtnngen ühereinstimmen; zwei parallele Strecken MN nnd RS haben gleiche oder entgegengesetzte Zeichen, je nachdem die Richtnng von M nach N mit der Richtung von R nach S übereinstimmt oder nicht.

Unter dem Teilverhältnisse in Bezng auf eine Strecke AB, nach welchem diese in irgend einem dritten Punkte geschnitten wird, — sei es, dass derselhe in ihr oder in ihrer Verlängerung liegt —,

verstehe man das Verhältniss zwischen dem Abschnitte, welcher sich von dem im Ausdrucke der Linie zuerst gesetzten Punkte *A* bis zum Schneidepunkte erstreckt, und dem Abschnitte vom Schneidepunkte bis zum andern Grenzpunkte *B*.

Die absolute Länge des ersten Abschnittes sei x, die des zweiten y (x und y veränderlich); so hat (Fig. 1)

AC	die Länge	$+x$
CB	„ „	$+y$
AC'	„ „	$+x$
$C'B$	„ „	$-y$
AC''	„ „	$-x$
$C''B$	„ „	$+y$

und es ist

$$\frac{AC}{CB} = \frac{+x}{+y}, \quad \frac{AC'}{C'B} = \frac{+x}{-y}, \quad \frac{AC''}{C''B} = \frac{-x}{+y}$$

Das Teilverhältniss des Schnittpunktes in Bezug auf die Strecke AB ist demnach positiv, wenn der Uebergang von dem Endpunkte A zum Teilpunkte und von diesem zum andern Endpunkte B in gleichem Sinne, negativ, wenn der Uebergang von dem einem Endpunkte der Strecke zum Teilpunkte in dem entgegengesetzten Sinne von dem erfolgt, in welchem man von diesem letztern zum andern Endpunkte der Strecke gelangt.

Es ist somit das Teilverhältniss positiv für die innere, negativ für die äussere Teilung.

In der Geraden, die durch A und B geht, ist jeder Punkt durch das Verhältniss $\pm\frac{x}{y}$ oder $\pm\frac{xz}{yz}$ bestimmt, in welchem die Strecke AB von ihm geteilt wird.

Für den Halbirungspunkt C''' ist das Teilverhältniss

$$\frac{AC'''}{C'''B} = +1$$

Liegt der Teilpunkt im Unendlichen, so wird das Teilverhältniss

$$\frac{A\infty}{\infty B} = \frac{AB}{\infty B} + \frac{B\infty}{\infty B} = -1$$

Es ist ferner

$$\frac{AC}{AC+CB} = \frac{x}{x+y} = \frac{AC}{AB} \quad \text{positiv}$$

$$\frac{CB}{AC+CB} = \frac{y}{x+y} = \frac{CB}{AB} \quad \text{"}$$

$$\frac{AC'}{AC'+C'B} = \frac{x}{x-y} = \frac{AC'}{AB} \quad \text{"} \quad x > y$$

$$\frac{C'B}{AC'+C'B} = \frac{-y}{x-y} = \frac{C'B}{AB} \quad \text{negativ}$$

$$\frac{AC''}{AC''+C''B} = \frac{-x}{-x+y} = \frac{AC''}{AB} \quad \text{"} \quad x < y$$

$$\frac{C''B}{AC''+C''B} = \frac{y}{-x+y} = \frac{C''B}{AB} \quad \text{positiv}$$

Es stellen also die Ausdrücke

$$\frac{\pm x}{\pm x+y} = \frac{x}{x \pm y}, \quad \frac{\pm y}{x \pm y} = \frac{y}{\pm x+y}$$

die Verhältnisse dar von den Abschnitten zur Strecke AB, sie sind positiv oder negativ, je nachdem die Abschnitte, genommen vom ersten Endpunkte bis zum Teilpunkte, beziehungsweise von diesem zum zweiten Endpunkte, mit der Richtung AB übereinstimmen oder nicht.

Sind x, y die Cartesischen Coordinaten des Punktes M (Fig. 2), welcher die Strecke $M'M''$ mit den Endpunktscoordinaten $x'y'$, $x''y''$ in einem gegebenen Verhältnisse $m:n$ teilt, so ist

$$m:n = M'M : MM'' = P'P : PP''$$

oder

$$m:n = (x'-x):(x-x'')$$

$$mx - mx'' = nx' - nx$$

also

$$x = \frac{mx''+nx'}{m+n}$$

ferner ist

$$m:n = M'M : MM'' = M'Q' : Q''M''$$

oder

$$m:n = (y'-y):(y-y'')$$

$$my - my'' = ny' - ny$$

also

$$y = \frac{my''+ny'}{m+n}$$

Für den äusseren Teilpunkt ergibt sich

$$x = \frac{mx'' - nx'}{m - n}, \quad y = \frac{my'' - ny'}{m - n}$$

Hiernach können die Fälle der innern und äussern Teilung wieder von einander unterschieden werden dadurch, dass die Teilung einer Strecke im Verhältnisse $+\frac{m}{n}$ die innere, im Verhältnisse $-\frac{m}{n}$ die äussere Teilung im quantitativen Verhältnisse $m : n$ bezeichnen soll; die Formeln für die Coordinaten des äussern Teilpunktes werden aus denen des innern erhalten durch die Veränderung des Vorzeichens eines Gliedes.

Die Coordinaten eines Punktes, welcher eine Strecke mit den Endpunktscoordinaten $x'y'$, $x''y''$ im quantitativen Verhältnisse $m : n$ teilt, sind demnach durch

$$x = \frac{mx'' \pm nx'}{m \pm n}, \quad y = \frac{my'' \pm ny'}{m \pm n}$$

darstellbar, das positive Zeichen gilt für die innere, das negative für die äussere Teilung.

Handelt es sich um die Aufgabe, das Verhältniss $m : n$ zu bestimmen, in welchem eine Gerade

$$Ax + By + C = 0$$

die gerade Verbindungslinie der Punkte $x'y'$, $x''y''$ teilt, so gelangt man zur Lösung durch die Bedingung, dass die Coordinaten des Teilungspunktes

$$x = \frac{mx'' + ny'}{m + n}, \quad y = \frac{my'' + ny'}{m + n}$$

der Gleichung der teilenden Linie genügen müssen, also

$$A \cdot \frac{mx'' + nx'}{m + n} + B \cdot \frac{my'' + ny'}{m + n} + C = 0$$

woraus folgt

$$\frac{m}{n} = -\frac{Ax' + By' + C}{Ax'' + By'' + C}$$

Um das Verhältniss zu bestimmen, nach dem die Strecke mit den Endpunktscoordinaten $x'y'$, $x''y''$ geteilt wird durch die Gerade, welche die Punkte $x'''y'''$, $x^{IV}y^{IV}$ enthält, bildet man die Gleichung dieser Geraden

$$(y''' - y^{IV})\,x - (x''' - x^{IV})\,y + x''' y^{IV} - x^{IV} y''' = 0$$

und man erhält

$$\frac{m}{n} = -\frac{(y''' - y^{IV})\,x' - (x''' - x^{IV})\,y' + x''' y^{IV} - x^{IV} y'''}{(y''' - y^{IV})\,x'' - (x''' - x^{IV})\,y'' + x''' y^{IV} - x^{IV} y'''}\ ^{1)}$$

A. Der den Transversalen gemeinsame Punkt liegt im Endlichen.

Die drei Seiten eines Dreieckes ABC (Fig. 3) werden von drei Transversalen, die sich in einem Punkte O treffen, durchschnitten. Der gemeinsame Punkt sei gewählt als Anfangspunkt eines Parallel-Coordinatensystems mit beliebigem Achsenwinkel, a, α, b, β, c, γ seien die veränderlichen Coordinaten der Dreieckspunkte, nämlich

$$A = (a,\ \alpha), \quad B = (b,\ \beta), \quad C = (c,\ \gamma);$$

es sei ferner

$$\frac{AD}{DB} = \pm\frac{p}{q}, \quad \frac{AI}{IB} = \pm\frac{p'}{q'}, \quad \frac{AM}{MB} = \pm\frac{p''}{q''}$$

$$\frac{BE}{EC} = \pm\frac{r}{s}, \quad \frac{BG}{GC} = \pm\frac{r'}{s'}, \quad \frac{BL}{LC} = \pm\frac{r''}{s''}$$

$$\frac{CF}{FA} = \pm\frac{t}{u}; \quad \frac{CH}{HA} = \pm\frac{t'}{u'}, \quad \frac{CK}{KA} = \pm\frac{t''}{u''}$$

wobei p, q, p', q', p'', q'' u. s. w. die absoluten veränderlichen Längen der Seiten-Abschnitte bedeuten, und die Teilverhältnisse positiv zu nehmen sind für die innere, negativ für die äussere Teilung, und es gelte für die Seite AB die Richtung von A nach B, für BC von B nach C und für CA von C nach A als positive Richtung, so ist

$$D = \left(\frac{pb \pm qa}{p \pm q},\ \frac{p\beta \pm q\alpha}{p \pm q}\right), \quad I = \left(\frac{p'b \pm q'a}{p' \pm q'},\ \frac{p'\beta \pm q'\alpha}{p' + q'}\right)$$

$$M = \left(\frac{p''b \pm q''a}{p'' \pm q''},\ \frac{p''\beta \pm q''\alpha}{p'' \pm q''}\right)$$

$$E = \left(\frac{rc \pm sb}{r \pm s},\ \frac{r\gamma \pm s\beta}{r \pm s}\right), \quad G = \left(\frac{r'c \pm s'b}{r' \pm s'},\ \frac{r'\gamma \pm s'\beta}{r' \pm s'}\right)$$

$$L = \left(\frac{r''c \pm s''b}{r'' \pm s''},\ \frac{r''\gamma \pm s''\beta}{r'' \pm s''}\right)$$

---

1) Salmon-Fiedler, anal. Geom. d. Kegelschn. § 42, 43.

$$F=\left(\frac{ta\pm uc}{t\pm u};\ \frac{t\alpha\pm u\gamma}{t\pm u}\right),\quad H=\left(\frac{t'a\pm u'c}{t'\pm u'},\ \frac{t'\alpha\pm u'\gamma}{t'\pm u'}\right)$$

$$K=\left(\frac{t''a\pm u''c}{t''\pm u''},\ \frac{t''\alpha\pm u''\gamma}{t''\pm u''}\right)$$

Mit Benutzung der in der Einleitung zuletzt erhaltenen Formel gelangt man zu den folgenden Ausdrücken für die Verhältnisse der Abschnitte, in welche die verschiedenen Strecken der Transversalen durch die Dreiecksseiten geteilt werden. Durch die vier innerhalb der Klammern befindlichen Buchstaben ist die Anfeinanderfolge der Punkte entsprechend den Punkten (x', y'), (x'', y''), $(x'''. y''')$, $(x^{IV}$ $y^{IV})$ der Fermel angezeigt.

$(O,\ E,\ A,\ B)$

$$\frac{OD}{DE}=-\frac{a\beta-b\alpha}{(\alpha-\beta)\frac{rc\pm sb}{r\pm s}-(a-b)\frac{r\gamma\pm s\beta}{r\pm s}+a\beta-b\alpha}$$

$$=-\frac{a\beta-b\alpha}{\frac{r}{r\pm s}(c\alpha-c\beta-a\gamma+b\gamma+a\beta-b\alpha)}=-\frac{a\beta-b\alpha}{\frac{r}{r\pm s}S}$$

$(O,\ D,\ B,\ C)\quad S=c\alpha-c\beta-a\gamma+b\gamma+a\beta-b\alpha$

$$\frac{OE}{ED}=-\frac{b\gamma-c\beta}{(\beta-\gamma)\frac{pb\pm qa}{p\pm q}-(b-c)\frac{p\beta\pm q\alpha}{p\pm q}+b\gamma-c\beta}$$

$$=-\frac{b\gamma-c\beta}{\frac{\pm q}{p\pm q}(a\beta-a\gamma-b\alpha+c\alpha+b\gamma-c\beta)}=-\frac{b\gamma-c\beta}{\frac{\pm q}{p\pm q}S}$$

$(O,\ D,\ C,\ A)$

$$\frac{OF}{FD}=-\frac{c\alpha-a\gamma}{(\gamma-\alpha)\frac{pb\pm qa}{p\pm q}-(c-a)\frac{p\beta\pm q\alpha}{p\pm q}+c\alpha-a\gamma}$$

$$=-\frac{c\alpha-a\gamma}{\frac{p}{p\pm q}(b\gamma-b\alpha-c\gamma+a\beta+c\alpha-a\gamma)}=-\frac{c\alpha-a\gamma}{\frac{p}{p\pm q}S}$$

$(O,\ F,\ A,\ B)$

$$\frac{OD}{DF}=-\frac{a\beta-b\alpha}{(\alpha-\beta)\frac{ta\pm uc}{t\pm u}-(a-b)\frac{t\alpha\pm u\gamma}{t\pm u}+a\beta-b\alpha}$$

$$=-\frac{a\beta-b\alpha}{\frac{\pm u}{t\pm u}(c\alpha-c\beta-a\gamma+a\beta+a\beta-b\alpha)}=-\frac{a\beta-b\alpha}{\frac{\pm u}{t\pm u}S}$$

(O, F, B, C)

$$\frac{OE}{EF} = -\frac{b\gamma - c\beta}{(\beta-\gamma)\frac{ta\pm uc}{t\pm u} - (b-c)\frac{t\alpha\pm u\gamma}{t\pm u} + b\gamma - c\beta}$$

$$= -\frac{b\gamma - c\beta}{\frac{t}{t\pm u}(a\beta - a\gamma - b\alpha + c\alpha + b\gamma - c\beta)} = -\frac{b\gamma - c\beta}{\frac{t}{t\pm u}S}$$

(O, E, C, A)

$$\frac{OF}{FE} = -\frac{c\alpha - a\gamma}{(\gamma-\alpha)\frac{rc\pm sb}{r\pm s} - (c-a)\frac{r\gamma\pm s\beta}{r\pm s} + c\alpha - a\gamma}$$

$$= -\frac{c\alpha - a\gamma}{\frac{\pm s}{r\pm s}(b\gamma - b\alpha - c\beta + a\beta + c\alpha - a\gamma)} = -\frac{c\alpha - a\gamma}{\frac{\pm s}{r\pm s}S}$$

In derselben Weise wird gefunden

$$\frac{OI}{IG} = -\frac{a\beta - b\alpha}{\frac{r'}{r'\pm s'}S}, \quad \frac{OG}{GI} = -\frac{b\gamma - c\beta}{\frac{\pm q'}{p'\pm q'}S}, \quad \frac{OH}{HG} = -\frac{c\alpha - a\gamma}{\frac{\pm s'}{r'\pm s'}S}$$

$$\frac{OI}{IH} = -\frac{a\beta - b\alpha}{\frac{\pm u'}{t'\pm u'}S}, \quad \frac{OG}{GH} = -\frac{b\gamma - c\beta}{\frac{t'}{t'\pm u'}S}, \quad \frac{OH}{HI} = -\frac{c\alpha - a\gamma}{\frac{p'}{p'\pm q'}S}$$

$$\frac{OM}{MK} = -\frac{a\beta - b\alpha}{\frac{\pm u''}{t''\pm u''}S}; \quad \frac{OL}{LK} = -\frac{b\gamma - c\beta}{\frac{t''}{t''\pm u''}S}, \quad \frac{OK}{KL} = -\frac{c\alpha - a\gamma}{\frac{\pm s''}{r''\pm s''}S}$$

$$\frac{OM}{ML} = -\frac{a\beta - b\alpha}{\frac{r''}{r''\pm s''}S}, \quad \frac{OL}{LM} = -\frac{b\gamma - c\beta}{\frac{\pm q''}{p''\pm q''}S}, \quad \frac{OK}{KM} = -\frac{c\alpha - a\gamma}{\frac{p''}{p''\pm q''}S}$$

Hieraus ergibt sich weiter

$$\frac{OE}{ED}\cdot\frac{DE}{OD} = -\frac{OE}{OD} = \frac{EO}{OD} = \frac{r}{r\pm s}\cdot\frac{p\pm q}{\pm q}\cdot\frac{b\gamma - c\beta}{a\beta - b\alpha}$$

$$\frac{OD}{DF}\cdot\frac{FD}{OF} = -\frac{OD}{OF} = \frac{DO}{OF} = \frac{p}{p\pm q}\cdot\frac{t\pm u}{\pm u}\cdot\frac{a\beta - b\alpha}{c\alpha - a\gamma}$$

$$\frac{OF}{FE}\cdot\frac{EF}{OE} = -\frac{OF}{OE} = \frac{FO}{OE} = \frac{t}{t\pm u}\cdot\frac{r\pm s}{\pm s}\cdot\frac{c\alpha - a\gamma}{b\gamma - c\beta}$$

und durch Multiplication dieser drei Gleichungen

$$-1 = \pm\frac{p}{q} \cdot \pm\frac{r}{s} \cdot \pm\frac{t}{u}$$

$$\frac{OH}{HG} \cdot \frac{GH}{OG} = -\frac{OH}{OG} = \frac{HO}{OG} = \frac{t'}{t' \pm u'} \cdot \frac{r' \pm s'}{\pm s'} \cdot \frac{c\alpha - a\gamma}{b\gamma - c\beta}$$

$$\frac{OG}{GH} \cdot \frac{IG}{OI} = -\frac{OG}{OI} = \frac{GO}{OI} = \frac{r'}{r' \pm s'} \cdot \frac{p' \pm q'}{\pm q'} \cdot \frac{b\gamma - c\beta}{a\beta - b\alpha}$$

$$\frac{OI}{HI} \cdot \frac{HI}{OH} = -\frac{OI}{OH} = \frac{IO}{OH} = \frac{p'}{p' \pm q'} \cdot \frac{t' \pm u'}{\pm u'} \cdot \frac{a\beta - b\alpha}{c\alpha - a\gamma}$$

$$-1 = \pm\frac{p'}{q'} \cdot \pm\frac{r'}{s'} \cdot \pm\frac{t'}{u'}$$

$$\frac{OK}{KL} \cdot \frac{LK}{OL} = -\frac{OK}{OL} = \frac{KO}{OL} = \frac{t''}{t'' \pm u''} \cdot \frac{r'' \pm s''}{\pm s''} \cdot \frac{c\alpha - a\gamma}{b\gamma - c\beta}$$

$$\frac{OM}{MK} \cdot \frac{KM}{OK} = -\frac{OM}{OK} = \frac{MO}{OK} = \frac{p''}{p'' \pm q''} \cdot \frac{t'' \pm u''}{\pm u''} \cdot \frac{a\beta - b\alpha}{c\alpha - a\gamma}$$

$$\frac{OL}{LM} \cdot \frac{ML}{OM} = -\frac{OL}{OM} = \frac{LO}{OM} = \frac{r''}{r'' \pm s''} \cdot \frac{p'' \pm q''}{\pm q''} \cdot \frac{b\gamma - c\beta}{a\beta - b\alpha}$$

$$-1 = \pm\frac{p''}{q''} \cdot \pm\frac{r''}{s''} \cdot \pm\frac{t''}{u''}$$

Auf der Seite *AB* ist *A* der erste *B* der zweite Punkt
„ *BC* „ *B* „ *C* „
„ *CA* „ *C* „ *A* „

Ein Abschnitt zwischen dem ersten und dem Schnittpunkte wird in der Folge stets genommen vom ersten aus, z. B. *AD*, *BL*, *CF*, ein Abschnitt zwischen dem zweiten und dem Schnittpunkte von diesem aus z. B *DB*, *LC*, *HA*.

Der Abschnitt der Transversale, dessen beide Endpunkte auf Seiten des Dreieckes *ABC* liegen, heisse ein „Seitensegment", derjenige, welcher zwischen einer Seite und dem gemeinsamen Punkte *O* liegt, mit Bezug auf diesen „Punktsegment" der Transversale.

Die Abschnitte der Seiten und die Punktabschnitte der Transversalen sind als anliegend, wenn sie einen Endpunkt gemein haben, im andern Falle als nicht anliegend bezeichnet. Die neben dem Dreiecke *ABC* im Gebilde vorhandenen Dreiecke heissen „Nebendreiecke". Seiten, die nicht näher bezeichnet werden, sind als Seiten des Dreieckes der Betrachtung *ABC* anzusehen.

Es ist

$$\frac{OE}{ED} \cdot \frac{FD}{OF} = \pm \frac{p}{q} \cdot \frac{b\gamma - c\beta}{c\alpha - a\gamma}$$

$$\frac{OH}{HG} \cdot \frac{IG}{OI} = \pm \frac{r'}{s'} \cdot \frac{c\alpha - a\gamma}{a\beta - b\alpha}$$

$$\frac{OM}{MK} \cdot \frac{LK}{OL} = \pm \frac{t''}{u''} \cdot \frac{a\beta - b\alpha}{b\gamma - c\beta}$$

daher

$$\pm \frac{p}{q} \cdot \pm \frac{r'}{s'} \cdot \pm \frac{t''}{u''} = \frac{OE}{ED} \cdot \frac{DF}{FO} \times \frac{OH}{HG} \cdot \frac{GI}{IO} \times \frac{OM}{MK} \cdot \frac{KL}{LO}$$

oder nach Einführung der Abschnitte der Seiten und entsprechender Umformung

$$\frac{AD}{DB} \cdot \frac{BG}{GC} \cdot \frac{CK}{KA} = \frac{DF}{FO} \cdot \frac{GI}{IO} \cdot \frac{KL}{LO} \times \frac{1}{\frac{DE}{EO} \cdot \frac{GH}{HO} \cdot \frac{KM}{MO}}$$

Ebenso ist

$$\frac{AD}{DB} \cdot \frac{BL}{LC} \cdot \frac{CH}{HA} = \frac{DF}{FO} \cdot \frac{LM}{MO} \cdot \frac{HG}{GO} \times \frac{1}{\frac{DE}{EO} \cdot \frac{LK}{KO} \cdot \frac{HI}{IO}}$$

$$\frac{AI}{IB} \cdot \frac{BL}{LC} \cdot \frac{CF}{FA} = \frac{IH}{HO} \cdot \frac{LM}{MO} \cdot \frac{FE}{EO} \times \frac{1}{\frac{IG}{GO} \cdot \frac{LK}{KO} \cdot \frac{FD}{DO}} \qquad \text{I.}$$

$$\frac{AI}{IB} \cdot \frac{BE}{EC} \cdot \frac{CK}{KA} = \frac{IH}{HO} \cdot \frac{ED}{DO} \cdot \frac{KL}{LO} \times \frac{1}{\frac{IG}{GO} \cdot \frac{EF}{FO} \cdot \frac{KM}{MO}}$$

$$\frac{AM}{MB} \cdot \frac{BG}{GC} \cdot \frac{CF}{FA} = \frac{MK}{KO} \cdot \frac{GI}{IO} \cdot \frac{FE}{EO} \times \frac{1}{\frac{ML}{LO} \cdot \frac{GH}{HO} \cdot \frac{FD}{DO}}$$

$$\frac{AM}{MB} \cdot \frac{BE}{EC} \cdot \frac{CH}{HA} = \frac{MK}{KO} \cdot \frac{ED}{DO} \cdot \frac{HG}{GO} \times \frac{1}{\frac{ML}{LO} \cdot \frac{EF}{FO} \cdot \frac{HI}{IO}}$$

Das Product der Teilverhältnisse der Schnittpunkte je einer Transversale in Bezug auf je eine Seite ist gleich dem Producte multiplicirt mit dem reciproken Producte aus den Verhältnissen der Seiten- und derjenigen zugehörigen Punktsegmente der drei Transversalen, welche den entsprechenden Abschnitten der Seiten nicht anliegen; die vom Schnittpunkte aus genommenen Seitensegmente

in dem einen Producte sind mit den Vordergliedern, die im reciproken mit den Hintergliedern der Verhältnisse des ersten Productes Seiten desselben Nebendreieckes.

Specielle Fälle.

1. Sind D, G, K beziehungsweise die Halbirungspunkte der Seiten AB, BC, CA (Fig. 4) so folgt aus der ersten Gleichung

$$\frac{DE}{EO} \cdot \frac{GH}{HO} \cdot \frac{KM}{MO} = \frac{DF}{FO} \cdot \frac{GI}{IO} \cdot \frac{KL}{LO}$$

2. Gehen DO, GO, KO durch die Ecken C, A, B (Fig. 5), so vereinfacht sich die erste Gleichung

da $\frac{DF}{FO} = \frac{DE}{EO} = \frac{DC}{CO}$

$$\frac{GI}{IO} = \frac{GH}{HO} = \frac{GA}{AO}$$

$$\frac{KL}{LO} = \frac{KM}{MO} = \frac{KB}{BO}$$

zu $\frac{AD}{DB} \cdot \frac{BG}{GC} \cdot \frac{CK}{KA} = +1$ (Ceva's Theorem)

3. Sind die Transversalen parallel zu den drei Seiten des Dreieckes ABC nämlich

$$DO \parallel BC, \quad GO \parallel CA, \quad KO \parallel AB \quad \text{(Fig. 6)}$$

so ist

$$\frac{DE}{EO} = \frac{GH}{HO} = \frac{KM}{MO} = -1$$

da die Durchschnittspunkte E, H, M im Unendlichen liegen, daher folgt aus der ersten Gleichung

$$\frac{AD}{DB} \cdot \frac{BG}{GC} \cdot \frac{CK}{KA} = -\frac{DF}{FO} \cdot \frac{GI}{IO} \cdot \frac{KL}{LO}$$

oder, da

$$DB = -LO, \quad GC = -FO, \quad KA = -IO$$

$$\frac{AD}{KL} \cdot \frac{BG}{DF} \cdot \frac{CK}{GI} = +1$$

Aus der dritten Gleichung ergibt sich

$$\frac{IB}{KL} \cdot \frac{LC}{DF} \cdot \frac{FA}{GI} = +1$$

und aus der sechsten

$$\frac{FO}{OD} \cdot \frac{IO}{OG} \cdot \frac{LO}{OK} = +1 \text{ [1])}$$

Es ist

$$\frac{EO}{OD} \cdot \frac{HO}{OG} \cdot \frac{MO}{OK} = \frac{r}{r \pm s} \cdot \frac{t'}{t' \pm u'} \cdot \frac{p''}{p'' \pm q''} \times \frac{p \pm q}{\pm q} \cdot \frac{r' \pm s'}{\pm s'} \cdot \frac{t'' \pm u''}{\pm u''}$$

oder nach Einführung der Seiten und ihrer Abschnitte

$$\frac{EO}{OD} \cdot \frac{HO}{OG} \cdot \frac{MO}{OK} = \frac{BE}{BC} \cdot \frac{CH}{CA} \cdot \frac{AM}{AB} \times \frac{1}{\frac{DB}{AB} \cdot \frac{GC}{BC} \cdot \frac{KA}{CA}} = \frac{BE}{DB} \cdot \frac{CH}{GC} \cdot \frac{AM}{KA}$$

Ebenso ist

$$\frac{EO}{OD} \cdot \frac{IO}{OH} \cdot \frac{KO}{OL} = \frac{BE}{BC} \cdot \frac{AI}{AB} \cdot \frac{CK}{CA} \times \frac{1}{\frac{DB}{AB} \cdot \frac{HA}{CA} \cdot \frac{LC}{BC}} = \frac{BE}{DB} \cdot \frac{AI}{HA} \cdot \frac{CK}{LC}$$

$$\frac{FO}{OD} \cdot \frac{IO}{OG} \cdot \frac{LO}{OK} = \frac{FA}{CA} \cdot \frac{IB}{AB} \cdot \frac{LC}{BC} \times \frac{1}{\frac{AD}{AB} \cdot \frac{BG}{BC} \cdot \frac{CK}{CA}} = \frac{FA}{AD} \cdot \frac{IB}{BG} \cdot \frac{LC}{CK} \qquad \text{II.}$$

$$\frac{FO}{OD} \cdot \frac{GO}{OH} \cdot \frac{MO}{OL} = \frac{FA}{CA} \cdot \frac{GC}{BC} \cdot \frac{MB}{AB} \times \frac{1}{\frac{AD}{BC} \cdot \frac{CH}{CA} \cdot \frac{BL}{BC}} = \frac{FA}{AD} \cdot \frac{GC}{CH} \cdot \frac{MB}{BL}$$

$$\frac{FO}{OE} \cdot \frac{GO}{OI} \cdot \frac{MO}{OK} = \frac{CF}{CA} \cdot \frac{BG}{BC} \cdot \frac{AM}{AB} \times \frac{1}{\frac{EC}{BC} \cdot \frac{IB}{AB} \cdot \frac{KA}{CA}} = \frac{CF}{EC} \cdot \frac{BG}{IB} \cdot \frac{AM}{KA}$$

---

1) **Adams**, die Lehre von den Transversalen V. 1.

$$\frac{FO}{OE}\cdot\frac{IO}{OH}\cdot\frac{LO}{OM}=\frac{CF}{CA}\cdot\frac{AI}{AB}\cdot\frac{BL}{BC}\times\frac{1}{\frac{EC}{BC}\cdot\frac{HA}{CA}\cdot\frac{MB}{AB}}$$

$$=\frac{CF}{EC}\cdot\frac{AI}{HA}\cdot\frac{BL}{MB}$$

„Das Product der Teilverhältnisse des gemeinsamen Punktes O in Bezug auf die Seitensegmente der drei Transversalen zwischen je einem Seitenpaare ist gleich dem Producte aus den Verhältnissen derjenigen Abschnitte der Seiten, welche mit den Seitensegmenten ein Nebendreieck bilden und den entsprechenden Segmenten der Teilverhältnisse anliegen; von den letztern sind je zwei Vorder- sowie je zwei Hinterglieder nicht Seiten desselben Nebendreieckes“.

Zur Prüfung der Uebereinstimmung im Zeichen der beiden Producte können die Abschnitte des zweiten so geordnet werden, dass die Abschnitte derselben Seite je ein Verhältniss bilden.

Specielle Fälle.

1. Sind D, G, K die Mitten von AB, BC, CA (Fig. 4), so geht aus der ersten Gleichung

$$\text{da}\quad \frac{DB}{AB}=\frac{GC}{BC}=\frac{KA}{CA}=\frac{1}{2}$$

hervor

$$\frac{EO}{OD}\cdot\frac{HO}{OG}\cdot\frac{MO}{OK}=8\frac{BE}{BC}\cdot\frac{CH}{CA}\cdot\frac{AM}{AB}$$

und aus der dritten Gleichung

$$\frac{FO}{OD}\cdot\frac{IO}{OG}\cdot\frac{LO}{OK}=8\frac{FA}{CA}\cdot\frac{IB}{AB}\cdot\frac{LC}{BC}$$

2. Gehen die Transversalen DO, GO, KO durch die Ecken C, A, B (Fig. 5), so wird in der ersten Gleichung

$$\frac{BE}{BC}=\frac{CH}{CA}=\frac{AM}{AB}=1$$

$$EO=CO,\quad HO=AO,\quad MO=BO$$

daher ist

$$\frac{CO}{OD}\cdot\frac{AO}{OG}\cdot\frac{BO}{OK}=\frac{AB}{DB}\cdot\frac{BC}{GC}\cdot\frac{CA}{KA}$$

die dritte Gleichung nimmt die Form an

$$\frac{CO}{OD} \cdot \frac{AO}{OG} \cdot \frac{BO}{OK} = \frac{AB}{AD} \cdot \frac{BC}{BG} \cdot \frac{CA}{CK}$$ [1]

Für die Mitteltransversalen folgt

$$\frac{CO}{OD} \cdot \frac{AO}{OG} \cdot \frac{BO}{OK} = +8$$

3. Sind die Transversalen parallel zu den drei Seiten (Fig. 6), so wird in der dritten Gleichung

$$\frac{FA}{CA} = \frac{AD}{AB}, \quad \frac{IB}{AB} = \frac{BG}{BC}, \quad \frac{LC}{BC} = \frac{CK}{CA}$$

und es ergibt sich die bereits gefundene Gleichung

$$\frac{FO}{OD} \cdot \frac{IO}{OG} \cdot \frac{LO}{OK} = +1$$

Es ist

$$\pm\frac{p}{q} \cdot \pm\frac{r}{s} \cdot \pm\frac{t}{u} \times \pm\frac{p'}{q'} \cdot \pm\frac{r'}{s'} \cdot \pm\frac{t'}{u'} \times \pm\frac{p''}{q''} \cdot \pm\frac{r''}{s''} \cdot \pm\frac{t''}{u''} = -1$$

oder nach Einführung der Abschnitte und Vertauschung der Factoren

$$\frac{AD}{DB} \cdot \frac{AI}{IB} \cdot \frac{AM}{MB} \times \frac{BG}{GC} \cdot \frac{BL}{LC} \cdot \frac{BE}{EC} \times \frac{CK}{KA} \cdot \frac{CF}{FA} \cdot \frac{CH}{HA} = -1$$ [2] III.

„Das Product der Teilverhältnisse sämtlicher Schnittpunkte der drei Transversalen in Bezug auf die Seiten ist gleich -1".

Specielle Fälle.

1. Sind die Seiten in D, G, K halbirt (Fig. 4), so vereinfacht sich die Gleichung

$$\text{zu} \quad \frac{AI}{IB} \cdot \frac{AM}{MB} \times \frac{BL}{LC} \cdot \frac{BE}{EC} \times \frac{CF}{FA} \cdot \frac{CH}{HA} = -1$$

---

1) Grunerts Archiv Tl. XXVII p. 345, Adams, Transv. X.

2) Die Gleichung gilt auch bei beliebiger gegenseitigen Lage der drei Transversalen, Carnot, Geom. der Stellung Tl. II p. 232.

2. Gehen DO, GO, KO beziehungsweise durch die Ecken C, A, B (Fig. 5), so verwandelt sich die Gleichung zunächst in

$$\frac{AD}{DB}\cdot\frac{BG}{GC}\cdot\frac{CK}{KA}\times\frac{0}{0}\cdot\frac{0}{0}\cdot\frac{0}{0}=-1$$

nach der sechsten Gleichung der Gruppe II

$$\text{ist}\quad \frac{AI}{MB}\cdot\frac{BL}{EC}\cdot\frac{CF}{HA}=\frac{FO}{OE}\cdot\frac{IO}{OH}\cdot\frac{LO}{OM}$$

welche Gleichung beim Uebergange auf die in der Figur 5 gegebenen Grenzlage die Form annimmt

$$\frac{0}{0}\cdot\frac{0}{0}\cdot\frac{0}{0}=\frac{CO}{OC}\cdot\frac{AO}{OA}\cdot\frac{BO}{OB}=-1$$

daher folgt

$$\frac{AD}{DB}\cdot\frac{BG}{GC}\cdot\frac{CK}{KA}=+1\quad\text{(Ceva's Theorem)}$$

3. Ist $DO \parallel BC$, $GO \parallel CA$, $KO \parallel AB$ (Fig. 6), so ist

$$\frac{AM}{MB}=\frac{BE}{EC}=\frac{CH}{HA}=-1$$

daher

$$\frac{AD}{DB}\cdot\frac{AI}{IB}\times\frac{BG}{GC}\cdot\frac{BL}{LC}\times\frac{CK}{KA}\frac{CF}{FA}=+1\ ^{1)}$$

Es ist

$$\frac{OD}{DE}\cdot\frac{r}{r\pm s}=-\frac{a\beta-b\alpha}{S}$$

$$\frac{OG}{GH}\cdot\frac{t'}{t'\pm u'}=-\frac{b\gamma-c\beta}{S}$$

$$\frac{OK}{KM}\cdot\frac{p''}{p''\pm q''}=-\frac{c\alpha-a\gamma}{S}$$

folglich

$$\frac{OD}{DE}\cdot\frac{r}{r\pm s}+\frac{OG}{GH}\cdot\frac{t'}{t'\pm u'}+\frac{OK}{KM}\cdot\frac{p''}{p''\pm q''}=-1$$

oder

$$\frac{OD}{DE}\cdot\frac{BE}{BC}+\frac{OG}{GH}\cdot\frac{CH}{CA}+\frac{OK}{KM}\cdot\frac{AM}{AB}=-1$$

Auf dieselbe Weise wird gefunden

1) Adams, Transv. V. 2.

$$\frac{OE}{ED} \cdot \frac{DB}{AB} + \frac{OH}{HG} \cdot \frac{GC}{BC} + \frac{OM}{MK} \cdot \frac{KA}{CA} = -1 \qquad \text{IV.}$$

$$\frac{OF}{FD} \cdot \frac{AD}{AB} + \frac{OI}{IG} \cdot \frac{BG}{BC} + \frac{OL}{LK} \cdot \frac{CK}{CA} = -1$$

$$\frac{OD}{DF} \cdot \frac{FA}{CA} + \frac{OG}{GI} \cdot \frac{IB}{AB} + \frac{OK}{KM} \cdot \frac{AM}{AB} = -1$$

$$\frac{OE}{EF} \cdot \frac{CF}{CA} + \frac{OH}{HG} \cdot \frac{GC}{BC} + \frac{OM}{ML} \cdot \frac{BL}{BC} = -1$$

$$\frac{OF}{FE} \cdot \frac{EC}{BC} + \frac{OI}{IH} \cdot \frac{HA}{CB} + \frac{OL}{LK} \cdot \frac{CK}{CA} = -1$$

u. s. f.

Im Ganzen können 48 Gleichungen dieser Art gebildet werden.

„Die algebraische Summe der drei Producte aus den Verhältnissen der Punktsegmente, von welchen je zwei nicht Seiten desselben Nebendreieckes sind, zu den zugehörigen Seitensegmenten der drei Transversalen, und den Verhältnissen der Abschnitte, welche mit den Seitensegmenten als Seiten desselben Nebendreieckes erscheinen und den Punktsegmenten nicht anliegen, zu ihren Seiten ist gleich — 1.

Specielle Fälle.

1. Sind D, G, K die Mitten der Seiten AB, BC, CA (Fig. 4), so liefert die zweite Gleichung

$$\frac{OE}{ED} + \frac{OH}{HG} + \frac{OM}{MK} = -2$$

die dritte

$$\frac{OF}{FD} + \frac{OI}{IG} + \frac{OL}{LK} = -2$$ [1]

2. Gehen DO, GO, KO durch die Ecken C, A, B (Fig. 5), so folgt aus der ersten und vierten Gleichung

$$\frac{OD}{DC} + \frac{OG}{GA} + \frac{OK}{KB} = -1$$

1) Diese Gleichung findet sich abgeleitet mit der Beschränkung, dass der gemeinsame Punkt innerhalb des Dreieckes liegt, im Progr. des kath. Gymn. zu Köln 1859.

3. Sind die Transversalen parallel zu den drei Seiten (Fig. 6), so geht aus der ersten Gleichung,

$$\text{da} \quad \frac{BE}{DE} = \frac{CH}{GH} = \frac{AM}{KM} = 1$$

$$\text{und} \quad OD = -BL, \quad OG = -CF, \quad OK = -AI$$

$$\text{hervor} \quad \frac{BL}{BC} + \frac{CF}{CA} + \frac{AI}{AB} = +1$$

die zweite Gleichung geht über in

$$\frac{DB}{AB} + \frac{GC}{BC} + \frac{KA}{CA} = +1$$

Durch Subtraction dieser zwei Gleichungen von der Identität $3 = 3$ ergeben sich noch

$$\frac{LC}{BC} + \frac{FA}{CA} + \frac{IB}{AB} = +2.$$

$$\frac{AD}{AB} + \frac{BG}{BC} + \frac{CK}{CA} = +2$$

Durch Addition des Ausdruckes

$$\frac{BE}{BC} + \frac{CH}{CA} + \frac{AM}{AB}$$

zu beiden Teilen der ersten Gleichung der Gruppe IV wird erhalten

$$\frac{BE}{BC}\left(1 + \frac{OD}{DE}\right) + \frac{CH}{CA}\left(1 + \frac{OG}{GH}\right) + \frac{AM}{AB}\left(1 + \frac{OK}{KM}\right)$$
$$= -1 + \left(\frac{BE}{BC} + \frac{CH}{CA} + \frac{AM}{AB}\right)$$

nun ist

$$1 + \frac{OD}{DE} = \frac{DE + OD}{DE} = \frac{OE}{DE} = -\frac{OE}{ED}$$

ferner

$$1 + \frac{OG}{GH} = -\frac{OH}{HG}, \quad 1 + \frac{OK}{KM} = -\frac{OM}{MK}$$

daher

$$\frac{OE}{ED} \cdot \frac{BE}{BC} + \frac{OH}{HG} \cdot \frac{CH}{CA} + \frac{OM}{MK} \cdot \frac{AM}{AB} = 1 - \left(\frac{BE}{BC} + \frac{CH}{CA} + \frac{AM}{AB}\right)$$

Auf gleiche Weise wird aus den übrigen Gleichungen der Gruppe IV gefunden

$$\frac{OD}{DE}\cdot\frac{DB}{AB}+\frac{OG}{GH}\cdot\frac{GC}{BC}+\frac{OK}{KM}\cdot\frac{KA}{CA}=1-\left(\frac{DB}{AB}+\frac{GC}{BC}+\frac{KA}{CA}\right)$$

$$\frac{OD}{DF}\cdot\frac{AD}{AB}+\frac{OG}{GI}\cdot\frac{BH}{BC}+\frac{OK}{KL}\cdot\frac{CK}{CA}=1-\left(\frac{AD}{AB}+\frac{BG}{BC}+\frac{CK}{CA}\right) \quad \text{V}$$

$$\frac{OF}{FD}\cdot\frac{FA}{CA}+\frac{OI}{IG}\cdot\frac{IB}{AB}+\frac{OM}{MK}\cdot\frac{AM}{AB}=1-\left(\frac{FA}{CA}+\frac{IB}{AB}+\frac{AM}{AB}\right)$$

$$\frac{OF}{FE}\cdot\frac{CF}{CA}+\frac{OG}{GH}\cdot\frac{GC}{BC}+\frac{OL}{LM}\cdot\frac{BL}{BC}=1-\left(\frac{CF}{CA}+\frac{GC}{BC}+\frac{BL}{BC}\right)$$

$$\frac{OE}{EF}\cdot\frac{EC}{BC}+\frac{OH}{HI}\cdot\frac{HA}{CA}+\frac{CK}{CA}\cdot\frac{OK}{KL}=1-\left(\frac{EC}{BC}+\frac{HA}{CA}+\frac{CK}{CA}\right)$$

u. s. f.

Ihre Anzahl ist 48.

„Die algebraische Summe der drei Producte aus den Verhältnissen der Punktsegmente, von welchen nicht je zwei Seiten desselben Nebendreieckes sind, zu denjenigen Seitensegmenten der drei Transversalen, welche nicht durchaus zwischen demselben Seitenpaare liegen, und den Verhältnissen der Abschnitte, welche mit den Seitensegmenten als Seiten desselben Nebendreieckes erscheinen und den Punktsegmenten anliegen, zu ihren Seiten ist gleich 1 weniger der algebraischen Summe der letzten Verhältnisse aus den Seiten und ihren Abschnitten".

Specielle Fälle.

1. Sind D, G, K die Halbirungspunkte von AB, BC, CA (Fig. 4), so liefert die zweite Gleichung

$$\frac{OD}{DE}+\frac{OG}{GH}+\frac{OK}{KM}=-1$$

die dritte

$$\frac{OD}{DF}+\frac{OG}{GI}+\frac{OK}{KL}=-1$$

2. Gehen DO, GO, KO durch die Ecken C, A, B (Fig. 5), so ergibt sich aus der ersten und vierten Gleichung

$$\frac{OC}{CD}+\frac{OA}{AG}+\frac{OB}{BK}=-2$$

3. Sind die Transversalen zu den drei Seiten parallel (Fig. 6), so reducirt sich die zweite Gleichung auf die bereits gefundene

$$0 = 1 - \left(\frac{DB}{AB} + \frac{GC}{BC} + \frac{KA}{CA}\right)$$

B. Der den Transversalen gemeinsame Punkt liegt im Unendlichen.

Sind die drei Transversalen zu einander parallel (Fig. 7), so sind die Verhältnisse $\frac{EO}{OD}, \frac{HO}{OG}, \frac{MO}{OK}$ u. s. f., sämtlich gleich -1, $\frac{EO}{DO} = \frac{HO}{GO} = \frac{MO}{KO}$ u. s. f. gleich $+1$.

Die Gleichungen der Gruppe I gehen über in

$$\begin{aligned}
\frac{AD}{DB} \cdot \frac{BG}{GC} \cdot \frac{CK}{KA} &= \frac{DF}{DE} \cdot \frac{GI}{GH} \cdot \frac{KL}{KM} \\
\frac{AD}{DB} \cdot \frac{BL}{LC} \cdot \frac{CH}{HA} &= \frac{DF}{DE} \cdot \frac{LM}{LK} \cdot \frac{HG}{HI} \\
\frac{AI}{IB} \cdot \frac{BL}{LC} \cdot \frac{CF}{FA} &= \frac{IH}{IG} \cdot \frac{LM}{LK} \cdot \frac{FE}{FD} \\
\frac{AI}{IB} \cdot \frac{BE}{EC} \cdot \frac{CK}{KA} &= \frac{IH}{IG} \cdot \frac{ED}{EF} \cdot \frac{KL}{KM} \qquad \text{VI} \\
\frac{AM}{MB} \cdot \frac{BG}{GC} \cdot \frac{CF}{FA} &= \frac{MK}{ML} \cdot \frac{GI}{GH} \cdot \frac{FE}{FD} \\
\frac{AM}{MB} \cdot \frac{BE}{EC} \cdot \frac{CH}{HA} &= \frac{MK}{ML} \cdot \frac{ED}{EF} \cdot \frac{HG}{HI}
\end{aligned}$$

„Das Product aus den Teilverhältnissen der Schnittpunkte je einer Transversale in Bezug auf je eine Seite ist gleich dem Producte aus den Verhältnissen der vom Schnittpunkte aus genommenen Seitensegmente der Transversalen, welche mit den entsprechenden Abschnitten im ersten Producte als Seiten desselben Nebendreieckes erscheinen".

Specieller Fall.

Ist $$\frac{FD}{DE} = \frac{IG}{GH} = \frac{LK}{KM} = \frac{m}{n} \quad \text{(Fig. 8)}$$

so ist nach der ersten Gleichung

$$\frac{AD}{DB} \cdot \frac{BG}{GC} \cdot \frac{CK}{KA} = \left(-\frac{m}{n}\right)^3 \text{ 1)}$$

Für $m = n$ besteht

$$\frac{AD}{DB} \cdot \frac{BG}{GC} \cdot \frac{CK}{LA} = -1$$

Aus den Gleichungen der Gruppe II geht hervor

$$\frac{BE}{DB} \cdot \frac{CH}{GC} \cdot \frac{AM}{KA} = -1$$

$$\frac{BE}{DB} \cdot \frac{AI}{HA} \cdot \frac{CK}{LC} = -1$$

$$\frac{FA}{AD} \cdot \frac{IB}{BG} \cdot \frac{LC}{CK} = -1 \qquad \text{VII}$$

$$\frac{FA}{AD} \cdot \frac{GC}{CH} \cdot \frac{MB}{BL} = -1$$

$$\frac{CF}{EC} \cdot \frac{BG}{IB} \cdot \frac{AM}{KA} = -1$$

$$\frac{CF}{EC} \cdot \frac{AI}{HA} \cdot \frac{BL}{MB} = -1$$

„Das Product aus den Verhältnissen der Abschnitte je einer Seite, durchaus genommen von dem als ersten bezeichneten Eckpunkte bis zum Schnittpunkte je einer Transversale oder von diesem bis zum zweiten Eckpunkte, und der Abschnitte, welche mit ihnen Seiten desselben Nebendreieckes sind, ist gleich -1“.

In Bezug auf die Prüfung der Uebereinstimmung im Zeichen gilt das, was bei Gruppe II bemerkt ist.

Werden die Gleichungen der Gruppe IV und V durch ein Punktsegment der Transversale dividirt, so erhalten sie Formen, welche beim unbegrenzten Fortrücken des gemeinsamen Punktes O sich umwandeln in

---

1) Grunerts Archiv 13. Tl. XXXVII. 3.

$$\frac{1}{DE} \cdot \frac{BE}{BC} + \frac{1}{GH} \cdot \frac{CH}{CA} + \frac{1}{KM} \cdot \frac{AM}{AB} = 0$$

$$\frac{1}{ED} \cdot \frac{DB}{AB} + \frac{1}{HG} \cdot \frac{GC}{BC} + \frac{1}{MK} \cdot \frac{KA}{CA} = 0$$

$$\frac{1}{FD} \cdot \frac{AD}{AB} + \frac{1}{IG} \cdot \frac{BG}{BC} + \frac{1}{LK} \cdot \frac{CK}{CA} = 0$$

$$\frac{1}{DF} \cdot \frac{FA}{CA} + \frac{1}{GI} \cdot \frac{IB}{AB} + \frac{1}{KM} \cdot \frac{AM}{AB} = 0 \qquad \text{VIII}$$

$$\frac{1}{EF} \cdot \frac{CF}{CA} + \frac{1}{HG} \cdot \frac{GC}{BC} + \frac{1}{ML} \cdot \frac{BL}{BC} = 0$$

$$\frac{1}{FE} \cdot \frac{EC}{BC} + \frac{1}{IH} \cdot \frac{HA}{CA} + \frac{1}{LK} \cdot \frac{CK}{CA} = 0$$

u. s. f.

Ihre Anzahl ist 48.

„Die algebraische Summe der Producte aus den reciproken Seitensegmenten der drei Transversalen, von welchen je zwei Anfangspunkte nicht auf derselben Seite liegen, und den Verhältnissen der Abschnitte, welche mit den Segmenten der Transversalen Seiten desselben Nebendreieckes sind und den Endpunkt von diesen zu einem ihrer Endpunkte haben, zu ihren Seiten ist gleich 0".

Specielle Fälle.

1. Sind D, G, K die Halbirungspunkte von AB, BC, CA, so ist nach der zweiten Gleichung

$$\frac{1}{ED} + \frac{1}{HG} + \frac{1}{MK} = 0$$

nach der dritten

$$\frac{1}{FD} + \frac{1}{IG} + \frac{1}{LK} = 0$$

2. Gehen die Transversalen beziehungsweise durch D, G K und die Ecken C, A, B, so folgt aus der ersten und dritten Gleichung

$$\frac{1}{DC} + \frac{1}{GA} + \frac{1}{KB} = 0$$

XXVI.

Zur Zahlentheorie.

(Zweiter Artikel.)

Von

G. Speckmann.

Im Anschluss an den auf Seite 439—441 des Teiles XI. dieses Archivs veröffentlichten Aufsatz „Zur Zahlentheorie“ mögen hier noch einige weitere zahlentheoretische Bemerkungen Platz finden.

I.

In dem genannten Aufsatz ist gezeigt, dass sich die natürliche Zahlenreihe in 2, 3, 4, . . . n arithmetische Reihen, zwischen deren Gliedern die Differenz n besteht, dadurch zerlegen lässt, dass man zunächst eine Verticalreihe mit den Zahlen 1 bis n bildet und dann eine zweite, dritte u. s. w. Verticalreihe mit den Zahlen $n+1$ bis $2n$, $2n+1$ bis $3n$ u. s. w. daneben stellt.

Für die durch diese Zerlegung der natürlichen Zahlenreihe entstehenden arithmetischen Reihen gilt die allgemeine Formel

$$a + xn$$

oder, zur $m$ten Potenz erhoben

$$(1+xn)^m \quad \begin{pmatrix} a = 1,\ 2,\ 3, \ldots x \\ x \text{ beliebig} \\ n = 0,\ 1,\ 2,\ \ 3 \text{ u. s. w.} \end{pmatrix}$$

Andere Formeln gewinnt man, wenn man die Zahlen der natürlichen

Zahlenreihe auf Grund der gezeigten Zerlegung in folgender Weise in Classen einteilt.

$x = 2.$

I. Classe. Zahlform $2n - 1$ ($n = 1, 2, 3$, u. s. w.), Reihe 1. 3, 5. u. s. w.

II. Classe. Zahlform $2n$ ($n = 1, 2, 3$, u. s. w.), Reihe 2, 4, 6, u. s. w.

$x = 3.$

I. Classe. Zahlform $3n + 1$ ($n = 0, 1, 2$, u. s. w.), Reihe 1, 4, 7, u. s. w.

II. Classe. Zahlform $3n - 1$) ($n = 1, 2, 3$, u. s. w.), Reihe 2, 5, 8, u. s. w.

III. Classe. Zahlform $3n$ ($n = 1, 2, 3$, u. s. w.), Reihe 3, 6, 9, u. s. w.

Für diese Formen gelten, wie leicht erkennbar, die folgenden Formeln:

1) Ist die Reihenanzahl und die Differenz x der Reihenglieder eine gerade Zahl, so gelten die Formeln

$$xn + k \begin{pmatrix} n = 0,\ 1,\ 2,\ \text{u. s. w.} \\ k = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots \frac{n-2}{2} \end{pmatrix}$$

$$xn - k \begin{pmatrix} n = 1,\ 2,\ 3,\ \text{u. s. w.} \\ k = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots \frac{n-2}{2} \end{pmatrix} \quad \text{und}$$

$$\frac{x}{2}n\,(n = 1,\ 2,\ 3,\ \text{u. s. w.})$$

2) Ist die Reihenanzahl und die Differenz der Reihenglieder eine ungerade Zahl, so erhält man für die Zahlformen die allgemeinen Formeln

$$xn + k \begin{pmatrix} n = 0,\ 1,\ 2,\ \text{u. s. w.} \\ k = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots \frac{n-1}{2} \end{pmatrix}$$

$$xn - k \begin{pmatrix} n = 1,\ 2,\ 3,\ \text{u. s. w.} \\ k = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots \frac{x-1}{2} \end{pmatrix} \quad \text{und}$$

$$xn (n = 1,\ 2,\ 3,\ \text{u. s. w.})$$

Erhebt man diese Formeln zur $m$ten Potenz, so kann man daraus die folgenden Binomialreihen herleiten:

1) $$(xn+k)^m = (xn)^m + \binom{m}{1}(xn)^{m-1}k + \ldots$$

$$+ \ldots \begin{pmatrix} n = 0,\ 1,\ 2,\ \text{u. s. w.} \\ k = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots \frac{x-2}{2} \end{pmatrix}$$

$$(xn-k)^m = (xn)^m - \binom{m}{1}(xn)^{m-1}k$$

$$+ \ldots - \ldots \begin{pmatrix} n = 1,\ 2,\ 3,\ \text{u. s. w.} \\ k = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots \frac{x-2}{2} \end{pmatrix}$$

$$\left(\frac{x}{2}\right)^m n^m (n = 1,\ 2,\ 3,\ \text{u. s. w.})$$

2) $$(xn+k)^m = (xn)^m + \binom{m}{1}(xn)^{m-1}k$$

$$+ \ldots \begin{pmatrix} n = 0,\ 1,\ 2,\ \text{u. s. w.} \\ k = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots \frac{x-1}{2} \end{pmatrix}$$

$$(xn-k)^m = (xn)^m - \binom{m}{1}(xn)^{m-1}k$$

$$+ \ldots - \ldots \begin{pmatrix} n = 1,\ 2,\ 3,\ \text{u. s. w.} \\ k = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots \frac{x-1}{2} \end{pmatrix}$$

$$x^m n^m (n = 1,\ 2,\ 3,\ \text{u. s. w.})$$

II.

Zur Ermittelung der in der natürlichen Zahlenreihe enthaltenen Primzahlen scheint die Zerlegung der natürlichen Zahlenreihe in 6 arithmetische Reihen und die daraus entnommene Darstellung der Doppelreihe $6n \pm 1$ oder für die übersichtliche Darstellung praktischer $6n \mp 1$ am geeignetsten zu sein. — Man kann indes in unendlich verschiedener Weise eine Anzahl Reihen aufstellen, in denen alle Primzahlen ausser den im Modul n enthaltenen Primfactoren

enthalten sein müssen. Ist n eine gerade Zahl, so kann man auch von vornherein die geraden Zahlen weglassen und aus den ungeraden Zahlen die Verticalreihen bilden.

Beispiele:

$n = 4.$ 1, 5, 9,
3, 7, 11, u. s. w.

In diesen beiden Reihen sind alle Primzahlen > 2 mit enthalten.

$n = 6.$ 1. 7, 13,
3, 9, 15, u. s. w.
5, 11, 17

Die Zahlen der 2. Reihe sind alle durch 3 teilbar. Die Primzahlen > 3 sind in der 1. und 3. Reihe mit enthalten.

$n = 10.$ 1, 11, 21,
3, 13, 23,
5, 15, 25, u. s. w.
7, 17, 27,
9, 19, 29

Hier sind alle Primzahlen ausser 2 und 5 in der 1., 2., 4. und 5. Reihe mit enthalten. Die 3. Reihe liefert nur Zahlen, die durch 5 teilbar sind.

$n = 12.$ 1, 13, 25
3, 15, 27
5, 17, 29, u. s. w.
7, 19, 31
9, 21, 33
11, 23, 35

Alle Primzahlen > 3 sind hier in der 1., 3., 4. und 6. Reihe mit enthalten. Die 2. und die 5. Reihe geben nur Zahlen, die durch 3 teilbar sind.

Oldenburg i. G.

XXVII.

Ueber die Factoren der Zahlen.

Von

G. Speckmann.

Will man alle Primfactoren einer beliebigen Zahl Z ermitteln, so versucht man zweckmässig zunächst, ob Z durch 2^n, 3^n, 5^n teilbar ist. Dies ist bekanntlich eine leichte Sache. Eine Zahl nun welche durch 2, 3, 5 und deren Potenzen nicht teilbar ist, hat stets die Form $6n \mp 1$. In Betreff der Factoren der Zahlen von der Form $6n \mp 1$ bestehen die folgenden Gesetze:

$$(6x-1)(6y-1) = 6z+1$$
$$(6x+1)(6y+1) = 6z+1$$
$$(6x+1)(6y-1) = 6z-1$$

Schliesst man, wie oben schon angedeutet, von den Zahlen $6n \mp 1$ diejenigen aus, welche mit 5 endigen, so ist die Endziffer einer jeden dieser Zahlen = 1, 3, 7 oder 9. Wird eine teilbare Zahl, die mit 1, 3, 7 oder 9 endigt, zunächst in 2 Factoren zerlegt, so müssen diese Factoren die folgenden Endziffern haben:

Endziffer von Z:	Endziffer der Factoren:
1	1, 1 oder 3, 7 oder 9, 9
3	1, 3 „ 7, 9
7	1, 7 „ 3, 9
9	1, 9 „ 3, 3

Ist nun eine Zahl Z von der bezeichneten Form gegeben, und nennen wir die möglichen Endziffern der Factoren derselben a, b

und c, d, so lassen sich aus den Zahlen 0 bis 9 diejenigen Zahlenverbindungen herstellen, welche den Gleichungen

$$ax+by = \ldots r \quad \text{und} \quad cx+dy = \ldots r$$

genügen [1]). (r ist hier diejenige zweitletzte Ziffer von Z, welche zurückbleibt, wenn man ab resp. cd von Z subtrahirt). — Unter diesen Zahlenverbindungen muss, wenn die Factoren von Z zweistellig sind, unbedingt eine vorkommen, welche die Factoren von Z darstellt. Sind die Factoren von Z aber mehr als zweistellig, so muss unter den Zahlenverbindungen unbedingt eine vorkommen, welche die zwei letzten Ziffern der Factoren von Z darstellt.

Es sei $Z = 2047$. Diese Zahl hat die Form $6n+1$. Die Endziffer ist eine 7. Zerlegt man Z also in 2 Factoren, so müssen diese die Endziffern 1, 7 oder 3, 9 haben. Subtrahirt man $7 \,.\, 1 = 7$ von 2047, so bleibt als vorletzte Ziffer 4. Subtrahirt man $3 \,.\, 9 = 27$ von 2047, so bleibt als vorletzte Ziffer 2. Im ersten Falle ist r also $= 4$ und im zweiten $= 2$. Diejenigen Zahlenverbindungen, welche den Gleichungen

$$1x+7y = \ldots 4 \quad \text{resp.} \quad 3x+9y = \ldots 2$$

genügen, sind die folgenden

I.	01	11	21	31	41	51	61	71	81	91
	47	77	07	37	67	97	27	57	87	17
II.	03	13	23	33	43	53	63	73	83	93
	49	19	89	59	29	99	69	39	09	79

Diese Zahlenverbindungen werden dadurch leicht erzeugt, dass man für jede Abteilung als erste obere Ziffer der Zahlenverbindungen fortlaufend die Zahlen 0 bis 9 nimmt und auch die Endziffer der Zahlen niederschreibt. Nachdem man dann für die untere erste Ziffer der beiden ersten Zahlenverbindungen einer Abteilung passende Zahlen gefunden, welche wir mit m und n bezeichnen wollen, bestimmt man bei den übrigen Verbindungen die erste untere Ziffer dadurch, dass man zu der ersten unteren Ziffer einer vorhergebenden Zahlenverbindung die stetige Differenz $n-m$ hinzu zählt. Bei den oben angegebenen Zahlenverbindungen ist z. B. in der ersten Abteilung die stetige Differenz zwischen den unteren ersten Ziffern $= 3$ und bei den Zahlenverbindungen der zweiten Abteilung $= 7$. $\sqrt{2047}$ ist > 45

1) Bei den mit 1 endigenden Zahlen kommt noch die dritte Gleichung

$$ex+fy = \ldots = r$$

hinzu.

Es muss also ein Primfactor von $Z < 45$ sein, und es ist zu vermuten, dass auch die anderen Primfactoren von Z unter 100 liegen. Von den aufgestellten Zahlenverbindungen können wir nun diejenigen streichen, bei welchen die eine Zahl durch 3 teilbar ist, und bei welchen nicht beide Zahlen entweder von der Form $6n-1$ oder von der Form $6n+1$ sind. Nachdem dies geschehen, bleiben die Zahlenverbindungen $\begin{array}{c}31\\ \underline{37}\\ 1147\end{array}$, $\begin{array}{c}13\\ \underline{19}\\ 247\end{array}$, $\begin{array}{c}23\\ \underline{89}\\ 2047\end{array}$ zurück. Von diesen Verbindungen liefert die dritte das Product 2047. Die Zahl 2047 hat also die Factoren 23 und 89.

Liegt nur der eine Factor von Z unter 100 und der andere über 100 hinaus, so setze man unter alle aufgestellten Zahlenverbindungen das Product und subtrahire jedes dieser Producte von Z. Die entstehenden Reste lassen dann erkennen, aus welchen Factoren Z zusammengesetzt ist. Es sei Z z. B. $= 6847$. Subtrahirt man jedes der Producte der eben schon angegebenen Zahlenverbindungen von Z, so findet sich, dass

$$6847 - 41 \,.\, 67 = 4100$$

ist. Die beiden ersten Ziffern dieses Restes sind der einen Zahl der Zahlenverbindung gleich und es ist daraus zu schliessen, dass 41 ein Factor von Z ist, und dass der anderen Zahl der Zahlenverbindung eine 1 vorgesetzt werden muss, und somit der andere Factor von $Z = 167$ ist.

In ähnlicher Weise, wie es hier bei Zahlen, deren niedrigster Factor zweistellig, geschehen, kann man auch bei Zahlen, deren niedrigster Factor eine dreistellige Zahl ist, durch Aufstellung der entsprechenden Zahlenverbindungen die beiden letzten Ziffern der Factoren und die Factoren selbst zu bestimmen suchen, wie hier kurz gezeigt werden soll. Nachdem man die Zahlenverbindungen der beiden Endziffern aufgestellt hat, setze man jeder Zahl dieser Verbindungen die erste Ziffer von $\sqrt{Z}$ vor und erniedrige diese Ziffer bei entstehenden durch 3 teilbaren Zahlen um 1. Sodann setze man unter jede Verbindung das Product und subtrahire dasselbe von Z. Unter den Resten wird dann einer bestimmte Beziehungen zu den Zahlen einer Zahlenverbindung haben. Es sei Z z. B. $= 15207$.

$$Z - 1 \,.\, 7 = \ldots 0, \quad Z - 3 \,.\, 9 = \ldots 8$$

Die in Betracht kommenden Zahlenverbindungen sind unter Voransetzung der ersten Ziffer von $\sqrt{Z}$ die folgenden:

I.	101	111	121	131	141	151	161	171	181	191
	107	137	167	197	127	157	187	117	147	177
II.	103	113	123	133	143	153	163	173	183	193
	169	139	109	179	149	119	189	159	129	199

Hier ist

$$Z - 111 \,.\, 137 = 0$$

Die Factoren von Z sind also $= 111$ und 137. Es sei ferner

$$Z = 28907, \quad Z - 111 \,.\, 137 = 13700$$

Der eine Factor von Z ist also 137 und der andere Factor ist

$$111 + 100 = 211$$

Ferner sei

$$Z = 37407, \quad Z - 111 \,.\, 137 = 222000, \quad 222 \text{ ist } = 2 \,.\, 111$$

Der eine Factor von Z ist $= 111$ und der andere Factor ist $= 137 + 200 = 337$. Es sei ferner

$$Z = 59007, \quad Z - 121 \,.\, 167 = 38800$$
$$121 + 167 = 288, \; 388 - 288 = 100.$$

Die Factoren von Z sind

$$121 + 100 = 221 \quad \text{und} \quad 167 + 100 = 267$$

Für das letzte Beispiel hätte besser die richtige erste Ziffer von $\sqrt{Z}$, eine 2 den Zahlenverbindungen vorangesesetzt werden können.

Auch bei Zahlen, deren niedrigster Factor eine vierstellige Zahl ist, lässt sich das oben beschriebene Verfahren oft mit Erfolg anwenden. Hier sind den betreffenden Zahlenverbindungen die beiden ersten Ziffern von $\sqrt{Z}$ voranzusetzen. Hat eine Zahl mehr als 2 Primfactoren, so ist das Verfahren nach Absonderung je eines Primfactors zu wiederholen.

Oldenburg i. G.

XXVIII.

Beweis des Satzes, dass jede unbegrenzte arithmetische Reihe, in welcher das Anfangsglied zur Differenz relativ prim ist, unendlich viele Primzahlen enthält.

Von

G. Speckmann.

In einer arithmetischen Reihe, in welcher das Anfangslied a und die Differenz x den gleichen Teiler k haben, kann, ausser dem Anfangsgliede, welches eine Primzahl sein kann, keine einzige Primzahl vorkommen und alle Zahlen einer solchen Reihe sind durch k teilbar. In jeder arithmetischen Reihe, in welcher Primzahlen vorhanden sind, muss also das Anfangsglied zur Differenz relativ prim sein.

Es soll nun bewiesen werden, dass in jeder unendlichen arithmetischen Reihe, in welcher das Anfangsglied zu der Differenz relativ prim ist, unendlich viele Primzahlen enthalten sind.

Vergleicht man eine arithmetische Reihe, worin Anfangsglied und Differenz relativ prim sind, mit der Reihe der Primzahlen, so ist bei der arithmetischen Reihe der Abstand zwischen zwei aufeinander folgenden Gliedern immer gleich; bei der Reihe der Primzahlen aber ist dieser Abstand ein ungleicher, sprunghafter. Ist nun eine arithmetische Reihe von der bezeichneten Art gegeben, so muss es, da es unendlich viele Primzahlen giebt, unendlich oft vorkommen können, dass der Abstand zwischen dem Anfangsgliede a

der arithmetischen Reihe und einer Primzahl p, also $p-a$ einem Vielfachen der Differenz x der arithmetischen Reihe gleich ist, und so oft dies der Fall ist, ist in der arithmetischen Reihe eine Primzahl enthalten. „Die Ungleichheit der Differenz zwischen den „Primzahlen und die Stetigkeit der Differenz der arithmetischen „Reihe bilden also neben dem Umstande, dass das Anfangsglied der „arithmetischen Reihe zu der Differenz derselben relativ prim ist, „den Grund dafür, dass in einer solchen arithmetischen Reihe un„endlich viele Primzahlen enthalten sein müssen".

Da jede Primzahl > 3 die Form $6n \mp 1$ hat, so kann man statt des Satzes, dass in jeder unendlichen arithmetischen Reihe, in der das Anfangsglied zur Differenz relativ prim ist, unendlich viele Primzahlen enthalten sind, auch den Satz aufstellen, dass in jeder unendlichen Reihe der genannten Art unendlich viele Zahlen von der Form $6n \mp 1$ enthalten sein müssen. — Eine Reihe mit constanter Differenz, in der das Anfangsglied a zu der Differenz relativ prim ist, kann nämlich nie nur teilbare Zahlen oder nur Primzahlen von der Form $6n \mp 1$ enthalten. Jede gerade Zahl hat nun die Form $2n$ oder, auf den Modul 6 bezogen, eine der Formen $3n$, $6n \mp 2$ und jede ungerade Zahl hat die Form $2n-1$ oder, auf dem Modul 6 bezogen, eine der Formen $6n \mp 1$, $6n+3$. Wir können unsere Untersuchung also darauf beschränken, dass wir feststellen, ob in jeder der nachfolgenden Reihenarten, die alle Reihen, in denen das Anfangsglied zur Differenz relativ prim ist, umfassen müssen, unendlich viele Zahlen von der Form $6n \mp 1$ vorkommen. Die Reihenarten sind diese:

	Anfangsglied:	Differenz:
1)	$6n \mp 1$	$2n$
2)	$6n+3$	$6n \mp 2$
3)	$6n$	$6n \mp 1$
4)	$6n \mp 2$	$6n \mp 1$
5)	$6n \mp 2$	$6n+3$
6)	$6n \mp 1$	$6n+3$
7)	$6n+3$	$6n \mp 1$

Setzt man in der ersten Reihenart die Differenz $= s(2n)$ und lässt s die Zahlen $0, 1, 2 \ldots \infty$ durchlaufen, so wird in der betr. Reihe mindestens so oft eine Zahl von der Form $6n \mp 1$ enthalten sein, als in der Reihe $0, 1, 2 \ldots \infty$ eine Zahl vorkommt, die ein Vielfaches von 3 ist, denn

$$3r \cdot 2n = 6m \quad \text{und} \quad 5m + 6 \mp 1$$

ist stets eine Zahl von der Form $6n \mp 1$. Ein Vielfaches von 3 kommt in der Reihe 0, 1, 2 . . . ∞ aber unendlich oft vor. Bei der zweiten Reihenart entsteht so oft eine Zahl von der Form $6n \mp 1$, als s in $s(6n \mp 2)$ beim Durchlaufen der Reihe 0, 1, 2 . . . ∞ ein Vielfaches von 2 darstellt, das nicht durch 3 teilbar ist. Bei der dritten Reihenart entsteht so oft eine Zahl von der Form $6n \mp 1$, als s in $s(6n \mp 1)$ eine ungerade Zahl darstellt, die nicht durch 3 teilbar ist. Bei der 4., 5. und 6. Reihenart ist jede ungerade Zahl der Reihe (mit Ausnahme der durch 3 teilbaren ungeraden Zahlen) eine Zahl von der Form $6n \mp 1$. Durchläuft bei der 7. Reihenart s in $s(6n \mp 1)$ die Reihe 0, 1, 2 . . . ∞, so wird in der betr. arithmetischen Reihe immer dann eine Zahl von der Form $6n \mp 1$ entstehen, wenn s eine gerade Zahl darstellt, die nicht durch 6 teilbar ist. — In jeder Reihe der vorstehend behandelten Arten müssen also unendlich viele Zahlen von der Form $6n \mp 1$ vorkommen und folglich müssen auch in jeder unendlichen arithmetischen Reihe mit bestimmter Differenz, in der das Anfangsglied a zu der Differenz x relativ prim ist, unendlich viele Primzahlen enthalten sein.

Oldenburg i. G.

XXIX.

Miscellen.

1.

Projective Lösung einer geometrischen Aufgabe.

Ein Kreisbogen, dessen Mittelpunktswinkel und Pfeilhöhe gegeben ist, kann dadurch gezeichnet werden, dass man zuerst den Halbmesser desselben trigonometrisch berechnet und hierauf den für denselben gefundenen Ausdruck construirt. Besonders einfach gestaltet sich aber die Lösung dieser Aufgabe mittelst projectiver Geometrie.

Durchschneidet man Fig. 1. vom Scheitel a aus die Schenkel des gegebenen Winkels mit einer beliebigen Zirkelöffnung, so erhält man die Punkte x. Die Sehne xx schneidet die Halbirungslinie des Winkels in b, der Bogen dieselbe in b'. Wäre bb' gleich der gegebenen Pfeilhöhe h, so wäre die Aufgabe gelöst. Die Punkte b und b' bilden aber ein homologes Punktepaar zweier ähnlichen Punktreihen, wenn der Halbmesser ax des Bogens variirt. Die Sehnen xx bilden nämlich dann ein Parallelstrahlenbüschel, weshalb die Punktreihen x und b perspectivisch liegen. Die Punktreihe b' ist aber jener x congruent, daher mit b projectivisch. Wird der Halbmesser ax unendlich gross, so fallen b und b' in's Unendliche, daher sind die conlocalen Punktreihen b und b' ähnlich, und man erkennt, dass a ein Doppelpunkt derselben ist.

Trägt man von b' aus auf der Halbirungslinie immer gegen den Scheitel die Pfeilhöhe auf, so erhält man eine neue Punktreihe β, welche mit jener b' congruent ist. Diese Punktreihe gehört nach früherem auch α an, wenn $a\alpha$ gleich der Pfeilhöhe gemacht wird.

Die Punktreihe β ist nun jener b projectiv. und wenn β mit b zuzusammenfällt, so ist die Aufgabe gelöst. Man hat daher nur den im Endlichen befindlichen Doppelpunkt der conlocalen ähnlichen Punktreihen β und b zu ermitteln. Dieser kann nun mit den Winkelbrettchen allein gezeichnet werden.

Man ziehe irgendwo eine Parallele P zur Halbirungslinie des Winkels und schneide dieselbe durch irgend zwei Parallele, die man durch α und β gezogen hat, in α' und β'. Dann ist die Punktreihe $\alpha'\beta'$ . . . project. ab . . ., und beide liegen perspectivisch, da sich im Unendlichen homologe Punkte decken. Der Schnittpunkt O der Verbindungslinien $\alpha'a$ und $\beta'b$ ist demnach das Centrum der Perspectivität und die durch dasselbe gezogene Parallele zu $\alpha\alpha'$ muss die Halbirungslinie in dem verlangten Doppelpunkte d schneiden. Errichtet man in diesem eine Senkrechte auf die Halbirungslinie, so trifft diese die Schenkel des Winkels in den Endpunkten des verlangten Bogens.

Ebenso einfach ergibt sich jetzt die Lösung der Aufgabe:

„Man zeichne eine Kugelzone, von der gegeben sind die Höhe und die ihren Kreisen entsprechenden Mittelpunktswinkel".

Auflösung. Man zeichne zunächst die zwei gegebenen Winkel mit gemeinschaftlichem Scheitel a so, dass die Winkelflächen aufeinander liegen, und die Halbirungslinien sich decken. Hierauf schneide man die vier Schenkel derselben mit dem nämlichen Kreisbogen von a aus, wodurch man auf den Schenkeln des grösseren Winkels die Punkte x, auf jenen des kleineren die Punkte y erhält. Die Punktreihen x and y sind congruent, wenn der Halbmesser des Bogens variirt. Zieht man die dem Bogen in beiden Mittelpunktswinkeln entsprechenden Sehnen xx und yy, so erhält man auf der gemeinschaftlichen Halbirungslinie die Punkte b und B, welche homologe Punkte zweier ähnlichen Punktreihen sind, wenn der Bogen variirt. Trägt man auf der Halbirungslinie des Winkels von B aus gegen den Scheitel die Höhe der Zone h auf, so erhält man den Punkt β. Fällt β mit b zusammen, so ist die Aufgabe gelöst. Die Punktreihe β ist aber mit jener B congruent, daher mit b projectiv, man hat demnach nur den im Endlichen gelegenen Doppelpunkt d der conlocalen ähnlichen Punktreihen zu bestimmen. Diese Ermittlung erfolgt genau so wie in Fig. 1., weshalb von einer besonderen Figur abgesehen wurde. Die in d auf die Halbirungslinie errichtete Senkrechte schneidet den Schenkel des grösseren Winkels in dem

Endpunkte des Halbmessers der der Zone zugehörigen Kugel. Die Kugelzone erscheint hierauf in der Zeichnung auf eine durch ihre Achse gehende Ebene orthogonal projicirt.

Wien, im Januar 1893.

Wilhelm Rulf.

2.

Beliebig weit angenäherte π-Constructionen.

Im zweiten Anhang von Dr. E Glinzer's reichhaltiger Planimetrie (in 4. Auflage 1891 bei Gerhardt Kühtmann in Dresden erschienen) findet sich seit der 3. Auflage von 1887 eine schöne Construction zur beliebigen Annäherung an die Länge des Kreisumfanges, die von Prof. Dr. Herm. Schubert in Hamburg herrührt. Sie benutzt die Tangenten an eine Folge spiralig geordneter Halbkreise und gründet sich auf die beiden bekannten cyklometrischen Sätze des Archimedes vom harmonischen und geometrischen Mittel:

$$u' = \frac{2\,ue}{u+e}$$

$$e' = \sqrt{u'e}$$

wo e und u die Halbumfänge des ein- und umgeschriebenen regelmässigen $n$ecks, e' und u' dasselbe für's $2n$-eck bedeuten.

Nun pflegt man jedoch bei der elementaren π-Berechnung neuerdings (z. B. Mehler in seinen Hauptsätzen der Elem.-Math.) jenen Satz vom harmonischen Mittel zu vermeiden und benutzt vielmehr die bequeme Relation

$$\frac{e'}{e} \quad \text{oder} \quad \frac{u'}{u} = \frac{r}{\varrho'}$$

wo r den Radius des ursprünglichen Kreises, ϱ' den sogenannten kleinen Radius des $2n$ ecks, d. h. den Abstand seiner Seite vom Centrum bezeichnet.

Drum lag der Gedanke nahe, ob nicht auch bei der constructiven Rectification des Kreises die entsprechende Vereinfachung sich anbringen liesse.

Dies gelingt in der Tat auf folgende Weise:

ABCD sei der Halbumfang eines regelmässigen Sechseckes, eingeschrieben in den Halbkreis *AD*, und in *A* die Tangente *AT* gezogen. Auf der verlängerten Seite *AB* mache man

$$AE = e_6 = 3 \text{ Radiuslängen}$$

Hierauf werde Wkl. *EAT* halbirt (oder, was dasselbe wäre, die Zwölfecksseite verlängert), in *E* das Lot auf *AE* errichtet und bis zum Schnitte *F* mit der Halbirenden gezogen. Dann ist

$$AF = e_{12}$$

In gleicher Weise durch fortgesetztes Winkelhalbiren und Loterrichten bekommt man e_{24}, e_{48} . . . . Gar bald sind für die benutzten Zeichengeräte die Längen der Strecken e_4 und e_{24} nicht mehr unterscheidbar; von da ab hat man lauter Kreisradien aus *A*. Und wird nun auf *AT* die Strecke *AZ* solang wie diese letzten Strecken gemacht, so ist

AZ die gesuchte Halbkreislänge.

Zum Beweise hierfür genügt es, den vorhin erwähnten Quotienten $\frac{r}{\varrho}$, trigonometrisch auszudrücken. Es ist nämlich

$$\frac{e_{24}}{e_4} = \frac{r}{\varrho_{24}} = 1 : \cos\frac{180^0}{24}$$

Erste Anmerkung. Wenn man das Lot *EF* und ebenso die folgenden Lote verlängert bis zum Schnitte mit *AT*, so bekommt man auf dieser Tangente die Halbumfänge der umgeschriebenen Vielecke. Werden nun ausserdem die Längen *AE*, *AF*. . . sämtlich auf *AT* übertragen, so zeigt sich anschaulich, wie das gesuchte *AZ* in engere und immer engere Grenzen eingeschlossen wird.

Zweite. Selbstverständlich kann man, wie vom Sechseck, so auch von jedem andern regelmässigen Vieleck ausgehen.

Leipzig, December 1891.

Dr. J. E. Böttcher. *)

3.

Zur Zahlentheorie. (Artikel III.)

In meinem, in diesem Archiv, Reihe 2, Band XII. Pag. 431 abgedruckten Aufsatze „Zur Zahlentheorie" habe ich gezeigt, dass

*) Die Schrift d. Hrn. Wasserbaudirectors Chr. Nehls „über graphische Rectification von Kreisbögen" Hamburg 1882 geht von fast denselben Grundgedanken aus.

sich die natürliche Zahlenreihe in 2, 3, . . . n arithmetische Reihen, zwischen deren Gliedern die Differenz n besteht, dadurch zerlegen lässt, dass man zunächst eine Verticalreihe mit den Zahlen 1 bis n bildet und dann eine zweite, dritte u. s. w. Verticalreihe mit den Zahlen $n+1$ bis $2n$, $2n+1$ bis $3n$ u. s. w. daneben stellt

Aus dieser Zerlegungsart der natürlichen Zahlenreihe geht hervor, dass man die Zahlen der natürlichen Zahlenreihe in unendlich verschiedener Weise in Classen einteilen kann.

Für die Zerlegung der natürlichen Zahlenreihe in $n = 2, 3, 4, 5, 6$ arihmetische Reihen mag beispielsweise die Einteilung in Classen hier folgen.

$n = 2$

I. Classe. Zahlform $2n - 1$ ($n = 1, 2, 3,$ u. s. w); Reihe 1, 3, 5, u. s. w.

II. Classe. Zahlform $2n$ ($n = 1, 2. 3,$ u. s. w.), Reihe 2, 4, 6 u. s. w.

$n = 3.$

I. Classe. Zahlform $3n - 1$ ($n = 1, 2, 3,$ u. s. w), Reihe 2, 5, 8, u. s. w.

II. Classe. Zahlform $3n + 1$ ($n = 0, 1, 2, 3,$ u. s. w.), Reihe 1, 4, 7, u. s. w.

III. Classe. Zahlform $3n$ ($n = 1, 2. 3,$ u. s. w), Reihe 3, 6, 9, u. s. w.

$n = 4.$

I. Classe. Zahlform $2n$ ($n = 1, 2, 3,$ u. s. w.), Reihe 2, 4, 6, u. s. w.

II. Classe. Zahlform $4n - 1$ ($n = 1, 2, 3,$ u. s. w.), Reihe 3, 7, 11, u. s. w.

III. Classe. Zahlform $4n + 1$ ($n = 0, 1, 2, 3,$ u. s. w., Reihe 1, 5, 9, u. s. w.

$n = 5.$

I. Classe. Zahlform $5n - 1$ ($n = 1, 2, 3,$ u. s. w.), Reihe 4, 9, 14, u. s. w.

II. Classe. Zahlform $5n + 1$ ($n = 0, 1, 2, 3,$ u. s. w.), Reihe 1, 6, 11, u. s. w.

III. Classe. Zahlform $5u - 2$ ($u = 1, 2, 3,$ u s. w.), Reihe 3, 8, 13, u. s w.

IV. Classe. Zahlform $5n+2$ ($n = 0, 1, 2, 3.$, u. s. w.), Reihe 2, 7, 12, u. s. w.

V. Classe. Zahlform $5n$ ($n = 1, 2, 3$, u. s. w.), Reihe 5, 10, 15, u. s. w.

$n = 6.$

I. Classe. Zahlform $6n-1$ ($n = 1, 2, 3$, u. s. w), Reihe 5, 11, 17. n. s. w.

II. Classe. Zahlform $6n+1$ ($n = 0, 1, 2, 3$, n. s. w.), Reihe 1, 7, 13, u. s. w.

III. Classe. Zahlform $6n-2$ ($n = 1, 2, 3$, n s. w), Reihe 4, 10, 16, n s. w.

IV. Classe. Zahlform $6n+2$ ($n = 0, 1, 2, 3$, n. s. w.), Reihe 2, 8, 14, n. s. w.

V. Classe. Zahlform 3n ($n = 1, 2, 3$, n. s. w.), Reihe 3. 6, 9, u. s. w

In jeder dieser 5 Abtheilnngen sind also alle Zahleu der natürlicheu Zahlenreihe enthalten.

Oldeuhurg i. G.

G. Speckmann.

4.

Das Dreieck bezogen auf seine Hauptträgheitsaxen.

Es ist in der Ehene ein rechtwinkliges Axensystem der xy gegehen. Man soll in allgemeinstem Ausdrnck das Dreieck darstellen, dessen Hauptträgheitsaxen jene Axen sind.

Seieu $x_1 y_1$. $x_2 y_2$, $x_3 y_3$ die Coordinateu, a_1, a_2, a_3 die Gegenseiten der Ecken A_1, A_2, A_3. Geht man von einer Ecke A_1 aus längs a_3 um eine variahle kleinere Strecke $a_3 u$ his N und von N längs der Geraden $NA_3 = n$ um eiue variahle kleiuere Strecke nv bis P, so ist P ein variahler Pnnkt, der das ganze Dreieck Δ erzeugt, wenn u und v von 0 his 1 variiren.

Die Coordiuaten von P siud

$$\left.\begin{aligned} x &= x_1 + (x_2 - x_1) u (1-v) + (x_3 - x_1) v \\ y &= y_1 + (y_2 - y_1) u (1-v) + (y_3 - y_1) v \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

worans als Functionsdeterminante hervorgeht:

$$D = \begin{vmatrix} x_2 - x_1 & x_3 - x_1 \\ y_2 - y_1 & y_3 - y_1 \end{vmatrix} (1-v) = D'(1-v)$$

Hiernach ist der Dreiecksinhalt

$$\Delta = \int_0^1 \partial u \int_0^1 \partial v \, . \, D = \tfrac{1}{2} D'; \text{ mithin } D = 2\Delta(1-v)$$

Nach Einsetzung der Werte (1) gibt eine leichte Integration die statischen Momente

$$\int_0^1 \partial u \int_0^1 \partial v \, . \, Dx = \tfrac{1}{3}\Delta(x_1 + x_2 + x_3)$$

$$\int_0^1 \partial u \int_0^1 \partial v \, . \, Dy = \tfrac{1}{3}\Delta(y_1 + y_2 + y_3) \text{ sowie das Integral}$$

$$\int_0^1 \partial u \int_0^1 \partial v \, . \, Dxy = \frac{\Delta}{12}\{(2x_1 + x_2 + x_3)y_1 + (x_1 + 2x_2 + x_3)y_2 + (x_1 + x_2 + 2x_3)y_3\} \quad (2)$$

Diese 3 Grössen müssen für Hauptträgheitsaxen null sein. Die vollständigen Bedingungen unserer Aufgabe sind also:

$$x_1 + x_2 + x_3 = 0; \quad y_1 + y_2 + y_3 = 0; \quad x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3 = 0$$

Nach Elimination von x_3 und y_3 lässt sich das Resultat schreiben:

$$(x_2 + \tfrac{1}{2}x_1)(y_2 + \tfrac{1}{2}y_1) + \tfrac{3}{4}x_1 y_1 = 0 \quad (3)$$

Geometrisch gedeutet ergibt es folgendes.

Eine Ecke A_1 ist willkürlich. Die zweite A_2 liegt beliebig auf der gleichseitigen Hyperbel (3), deren Asymptoten den Hauptträgheitsaxen parallel sind. Ihren Mittelpunkt K findet man, indem man den Radiusvector $A_1 O$ über den Anfangspunkt O hinaus um die halbe Länge OK verlängert. Ihre reelle Axe halbirt die 2 Scheitelwinkel der Asymptoten, innerhalb deren A_1 nicht liegt. Ihre Scheitel ergeben sich aus der Potenz $\tfrac{3}{4}x_1 y_1$. Die dritte Ecke ist der Endpunkt der Verlängerung von $A_2 K$ um ihre Länge.

Die Hauptträgheitsmomente erhält man aus dem Integral (2), indem man y für x und x für y schreibt. Sie sind also:

$$X = \frac{\Delta}{12}(y_1^2 + y_2^2 + y_3^2); \quad Y = \frac{\Delta}{12}(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)$$

d. h. für das Dreieck dieselben wie für das System gleichbelasteter Ecken.

R. Hoppe.

2.

XXIV. Glase

u. Röhrenleitgn. bei konstanter, sowie veränderl. Drnckhöbe fliessen. Bearh. nacb System Kleyer. Stnttgart, Julins Maier. 8 Mk.

Lanenstein, R., Leitfaden der Mechanik. Elementares Lehrbnch f. tecbn. Mittelschnlen u. zum Selhstnnterricht. Stuttgart, Cotta'sche Bucbh. Nachf. 3 Mk.

Technik.

Bibliothek, elektro-tecbnische. 45. Bd. Wien, Hartlehen. 3 Mk.; geb. 4 Mk.

Bišcan, W., die Dynamomascbine. Znm Solhststudinm f. Mechaniker, Installateure, Maschinenschlosser etc., sowie als Anleitg. zur Selbstanfertigg. v. Dynamomaschinen leichtfasslich dargestellt. Leipzig, Leiner. 2 Mk.; geb. 2 Mk. 50 Pf.

Canter, O., der tecbnische Telegraphendienst. Lehrbncb f. Telegraphen-, Post- n. Eisenhahnheamten. 4. Anfl. Breslan, Kern's Verl. Geh. 6 Mk.

Echo, elektrotechnisches. Chefred.: W. Krieg. 5. Jahrg. 1892. 27. Hft. Leipzig, Leiner. Vierteljährlich 3 Mk.

Fortschritte der Elektrotechnik. Hrsg. v. K. Strecker. 4. Jahrg. Das Jahr 1890. 4. Hft. Berlin, Springor. 8 Mk.

— dasselhe. 5. Jahrg. Das Jahr 1891. 1. Hft. Ebd. 6 Mk.

Kral, J., Elcmente d. Staats-Telegraphendienstes. 18. Aufl. 1. Hft. Wien, Gerold & Comp. Für 2 Hfte. 4 Mk.

Thompson, S. P., die dynamoelektrischen Maschinen. Ein Handhuch für Stndirende der Elektrotechnik. 4. Aufl. Deutsche Uehersetzg. von C. Grawinkel. (In 12 Hftn.) 1. Hft. Halle, Knapp. 2 Mk.

Vogler, A., Jedermann Elektrotecbniker. Anleitnng zur Herstellg. der hauptsächlichsten elektr. Apparate u. elektr. Leitgn. u. znr Anstellnng elekriscber Versuche. 1. Bdchn. 2. Aufl. Leipzig, Mor. Schäfer. 1 Mk. 50 Pf

Wetter, L., dio Fortschritte der Privat-Telepbonie. Vortrag. Köln, Neubner. 30 Pf.

— das Bergmann'sche Röhrensystem. Vortrag. Ehd. 30 Pf.

Zacharias, J., die Accumulatoren zur Aufspeicherung d. elektrischen Stromes, deren Anfertigung, Verwendung u. Betrieh. Jena, Costenoble. 9 Mk.; geh. 10 Mk 50 Pf.

Optik, Akustik und Elasticität.

Helmboltz, H. v., Handbucb der physiologischen Optik. 2. Aufl. 7. Lfg. Hamhurg, Voss. 3 Mk.

Hüfuer, Anleitnng zum Gehrauche d. Hüfner'schen Spectrophotometers, in seiner nenesten verhesserten Form ansgeführt v. E. Alhrecht. Tübingen, Moser'sche Bnchh. 60 Pf.

Puschl, C., znr Elasticität der Gase. Leipzig, Freytag. 30 Pf.

Tischner, A., le mouvemeut de la lumière. Leipzig, Fock, Verl. 40 Pf.

Erd- und Himmelskunde.

Gezeitentafeln f. d. J. 1893. Hydrographisches Amt d. Reichs-Marine-Amts. Mit 14 Blättern in Steindr., enth. Darstellgn. der Gezeitenströmgn. in der Nordsee, im engl. Kanal u. der irischen See. Berlin, Mittler & S. 1 Mk. 50 Pf.

Hann, J., weitere Untersnchnngen üh. die tägliche Oscillation d. Barometers. Leipzig, Freytag. 3 Mk. 40 Pf.

Jahrhuch, Dentsches meteorologisches, J. 1889. Beohachtungssystem d. Königr. Preussen u henachharter Staaten. Ergebnisse der meteorolog. Beohachtgn. im J. 1889. Hrsg. v. dem königl. preuss. meteorolog. Institut durch W. v. Bezold. 3. Hft. Berlin, Asher & Co. 21 Mk. (1889 kplt. 27 Mk.)

Monatsherichte der dentschen Seewarte. Hrsg. v. d. Direktion. Novbr. u. Decbr. 1891. Hamhurg, Friederichsen & Co. à 50 Pf.

Pnhlikationen d. astrophysikalischen Ohservatoriums zu Potsdam. Hrsg. v. H. C. Vogel. Nr. 25. 7. Bd. 1. Tl. Leipzig, Engelmann. 10 Mk.

Schneider, H., gegen Falb's kritische Tage. Eine Kritik. Berlin, Dümmler's Buchh. 50 Pf.

Schreiher, P., Untersuchung üh. das Wesen der sogenannten Bessel'schen Formel, sowie deren Anwendnng auf die tägliche periodische Veränderung der Lufttemperatnr. Leipzig, Engelmann. 5 Mk.

Schuhert, H., Zeitnnterschiede, e. alphahet. Tabelle der mitteleurop. Zeit, Ortszeit n. Einwohuerzahl aller deutschen Orte üh. 10000 Einwohner. Hamhurg, Meissner's Verl. 80 Pf.

Sternkarte, drehhare. Der Sternenhimmel zu jeder Stunde d. Jahres. Ausg. f. Mitteleuropa. 10. Aufl. Chromolith. Frankfurt, Deutsche Lehrmittelaustalt. 1 Mk. 25 Pf., transparent 1 Mk. 60 Pf.; m. Beleuchtungsapparat 1 Mk. 85 Pf.; als Lichtschirm zum Anhängen 1 Mk. 75 Pf.; m. Lichtschirmständer 5 Mk.

Veröffentlichnngen d. Rechnen-Instituts der königl. Sternwarte zu Berlin. Nr. 1. Berlin, Dümmler's Verl. 4 Mk.

Vierteljahrsschrift der astronomischen Gesellschaft. Hrsg. v. R. Lehmann-Filhés u. H. Seeliger. 27. Jahrg. 1892. 2. Hft. Leipzig, Engelmann. 2 Mk.

Weiss, E., Bilder-Atlas der Sternenwelt. 41 fein lith. Tafeln nebst erklär. Texte n. mehreren Text-Illustr. Eine Astronomie f. jedermann. 2. Aufl. 16.—18. (Schluss-)Lfg. Esslingen, Schreiber. à 50 Pf.

Nautik.

Jahrbuch, kleines nautisches, f. 1893. 32. Jahrg. Hrsg.: W. Ludolph. Bremen, Heinsius Nachf. 75 Pf.

Jahrbuch, nautisches, od. Ephemeriden u. Tafeln f. d. J. 1895 zur Bestimmung der Zeit, Länge u. Breite zur See nach astronom. Beobachtgn. Hrsg. vom Reichsamt d. Innern unter Red. v. Tietjen. Berlin, C. Heymann's Verl. Geb. 1 Mk. 50 Pf.

Segelhandbuch f. den Indischen Ozean. Hrsg. v. der Direktion der deutschen Seewarte. Hamburg, Friederichsen & Co. Geb. in Leinw. 30 Mk.

Physik.

Favarger, A., l'électricité et ses applications à la chronométrie. 2. ed. Genf, Stapelmohr. 6 Mk.

Gef, W., die Wärmequelle der Gestirne in mechanischem Maass, e. Beitrag zur mechan. Wärmetheorie. Heidelberg, Siebert, Verl. 1 Mk.

Handbuch der Physik, hrsg. v. A. Winkelmann. 12. Lfg. Breslau, Trewendt. 3 Mk. 60 Pf.

Hovestadt, H., Lehrbuch der absoluten Masse u. Dimensionen der physikalischen Grössen. Bearb. nach System Kleyer. Stuttgart, Jul. Maier. 6 Mk.

Hübner, M., Grundzüge d. Physik. Ein Merk- u. Wiederholungsbuch. 2. Aufl. Breslau, Morgenstern, Verl. Kart. 60 Pf.

Jäger, G., die Zustandsgleichung der Gase in ihrer Beziehung zu den Lösungen. Leipzig, Freytag. 30 Pf.

Klemenčič, J., üb. das Verhalten d. Eisens gegen elektrische Schwingungen. Ebd. 20 Pf.

Krebs, G., Leitfaden der Experimentalphysik f. Gymnasien. Mit e. Anh.: Mathematische Geographie u. Grundlehren der Chemie. 3. Aufl. Wiesbaden, Bergmann. 4 Mk. 60 Pf.

Miller, A., e. experimenteller Beitrag zur Kenntniss der Verwandlung der Energieformen. Progr. München, Kellerer. 1 Mk.

Obermayer, A. v., üb. gleitende Funken. Leipzig, Freytag. 40 Pf.

Sanoy, J., physikalisch-ökonomische Studien. Die Bedeutung der Elektrizität f. das soziale Leben. Konstanz, Ackermann, Verl. 1 Mk. 50 Pf.

Schriften der physikalisch-ökonomischen Gesellschaft zu Königsberg i./Pr. 32. Jahrg. 1891. Königsberg, Koch. 6 Mk.

Sohncke, L., gemeinverständliche Vorträge aus dem Gebiete der Physik. Jena, Fischer. 4 Mk.

Waltenhofen, A. v., die internationalen absoluten Maasse, insbesondere die elektrischen Maasse, für Studirende der Elektrotechnik in Theorie u. Anwendg. Dargestellt u. durch Beispiele erläutert. 2. Aufl. Braunschweig, Vieweg & S. 6 Mk.

Zwerger, M., Leitfaden zum Unterricht in der elementaren Physik. 1. Tl.: Von den Kräften, dem Gleichgewichte, der Wellenbewegg., dem Schalle u. der Wärme. München, Lindauer'sche Buchh. 1 Mk. 50 Pf.

Vermischte Schriften.

Berichte üb. die Verhandlungen der königl. sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften zu Leipzig. Mathematisch-phys. Classe. 1891. II. Leipzig, Hirzel. 1 Mk.

Himmel und Erde. Illustrirte naturwissenschaftl. Monatsschrift. Hrsg. v. der Gesellschaft Urania. Red.: M. W. Meyer. IV. Jahrg. Octbr. 1891 bis Septbr. 1892. 10. Hft. Berlin, Herm. Paetel. Vierteljährlich 3 Mk. 60 Pf.

Journal f. die reine u. angewandte Mathematik. Hrsg. v. L. Fuchs. 110. Bd. (4 Hfte.) 1. Hft. Berlin, Georg Reimer. Für den Band 12 Mk.

Mémoires de l'académie impériale des sciences de St.-Pétersbourg. VII. série. Tome XXVIII. Nrs. 9. u. 11. Leipzig, Voss' Sort. 3 Mk. 30 Pf.

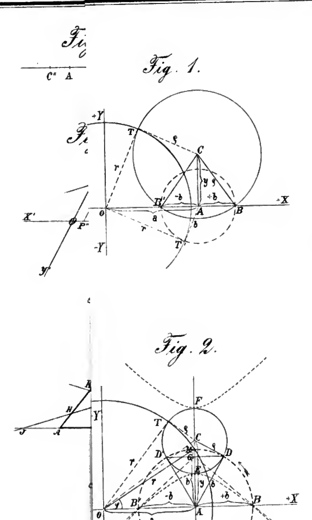
Sammlung populärer Schriften, hrsg. v. der Gesellschaft Urania zu Berlin. Nr. 14 u. 15. Berlin, Herm. Paetel. à 60 Pf.

Schriften der Gesellschaft zur Förderung der gesammten Naturwissenschaften zu Marburg. 12. Bd. 5. Abhandlg. Marburg, Elwert'sche Verlagsbuchh. 1 Mk. 50 Pf.

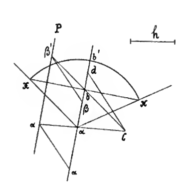
Sitzungsberichte der kaiserl. Akademie der Wissenschaften. Mathematisch-naturwissenschaftl. Classe. Abth. IIa. Abhandlungen aus dem Gebiete der Mathematik, Astronomie, Physik, Meteorologie u. der Mechanik. 101. Bd. 1.—3. Hft. Leipzig, Freytag. 6 Mk. 60 Pf.

Sitzungsberichte der mathematisch-physikalischen Classe der k. b. Akademie der Wissenschaften zu München. 1892. 2. Hft. München, Franz'scher Verl. 1 Mk. 20 Pf.

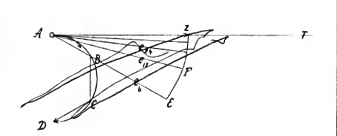
Zeitschrift f. Mathematik u. Physik, hrsg. unter der Red. v. O. Schlömilch, E. Kahl u. M. Cantor. 37. Jahrg. 1892. Suppl. Leipzig, Teubner. 5 Mk.



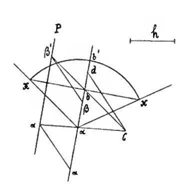
XXV. Kiechl:euer: Complexe Zahlen.



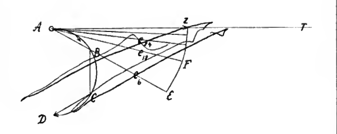
XXIX. Rulf: Projective Lösung einer Aufgabe.



XXIX. Böttcher: π Construction.



XXIX. Rulf: Projective Lösung einer Aufgabe.



XXIX. Böttcher: π Construction.

Litterarischer Bericht

XLV.

Geschichte der Mathematik und Physik.

Vorlesungen über Geschichte der Mathematik. Von **Moritz Cantor**. Zweiter Band, von 1200—1668. Erster Theil. Leipzig 1892. B. G. Teubner. 499 S.

Der hier behandelte Zeitraum ist leer an wissenschaftlich mathematischer Forschung, aber nicht leer an instructiven Punkten und Momenten historischen Interesses. Betrieben wird in der Tat nur das kaufmännische Rechnen und die Feldmesskunst, der Unterricht pflanzt fast nur die mathematischen Kenntnisse der Griechen und Araber fort; dennoch erwachsen aus jenen praktischen Bestrebungen mancherlei ideelle Früchte, wenn gleich ohne regelmässige Entwickelung, öfters unterbrochen durch Rückschritt und Unklarheiten, hervor, in denen man die Anfänge der Begriffe und Formen der heutigen Mathematik nachweisen kann, namentlich bildet sich die Algebra und Trigonometrie durch Inangriffnahme elementarer Probleme allmählich aus. Das vorliegende Werk zeichnet sich durch Vielseitigkeit der aus Licht gezogenen Gegenstände, durch eingehende historische Kritik, sowie durch populären Styl vorteilhaft aus. Die Geschichte wird an das Leben der mehr oder weniger hervorragenden Autoren angeknüpft, auf deren Tätigkeit alle Fragen der Entwickelung der Doctrin zurückführen; abgesehen von den einzelnen Personen wird aber auch über die Gründung der Universitäten und deren Verhalten zur Mathematik Nachricht gegeben. Wenn gleich im Verhältniss zu den geringen wissenschaftlichen Leistungen jener

Zeit das Buch einen grossen Umfang gewonnen hat, so wird man bei Durchlesung schwerlich etwas überflüssig zu ihrer Charakterisirung finden. In der Tat hat der Verfasser einen ziemlich hohen Grad der Unbedeutendheit zur Grenze der Erörterung genommen; doch dient das Beigebrachte noch immer als Beispiel der herrschenden eigentümlichen Ideen und Meinungen. Folgenden Männern wird der Reihe nach ein Platz in der Geschichte der Mathematik erteilt: Leonardo von Pisa, Jordanus Nemorarius, Johannes de Sacrohosco, Johannes Campanus, Richard von Wallingford, Johannes Maudith, Bradwardinus, Raimundus Lullus, Johannes de Muris, Petrus von Dacien, Jahannes de Lineriis, Dominicus Parisiensis, Nicole Oresme, Albertus de Saxonia, Henricus Hassianus, Conrad von Jungingen, Paolo Dagomari, Biagio da Parma, Johann von Gemunden, Peurbach, Nicolaus Cusanus, Prosdocimo de Boldomandi, Jakob von Cremona, Johannes Widmann, Regiomontanus, Ratdolt, Alberti, L i o n a r d o da V i n c i, Treviso, Luca Paciuola, Chuquet, Lefèvre, Georg Valla, Orontius Finaeus, Alfons X von Spanien, Petro Sanchez, Ciruelo, Silicius, Gaspar Lax, Juan de Ortego, Petro Nuñez, Stifel, Johannes Werner, Peter Apianus, Albrecht Dürer, Koppernikus, Memmius, Cardanus, Luigi Ferrari, Tartaglia u. a.

H.

Zur Geschichte der Einführung der jetzigen Ziffern in Europa durch Gerbert. Eine Studie von Professor Dr. H. W e i s s e n b o r n. Berlin 1892. Mayer u. Müller. 123 S.

Am Titel ist das Wort „Einführung" auffällig, welches weder durch die Schrift selbst noch durch irgend etwas hekanntes gerechtfertigt erscheint. Soviel auch Gerhert für die Annahme der indischen Ziffern durch eigenen Vorgang gewirkt hat, so zeigt doch die Geschichte der nachfolgenden 5 Jahrhunderte keine Spur eines dauernden Einflusses: die römischen Zahlzeichen bleiben nach wie vor bei allen Rechnungen, sogar den astronomischen in Gebrauch; auch in Betreff der Zeitgenossen Gerherts kommt der Verfasser gar nicht auf die Frage, ob jemand seine Zahlenschrift adoptirt hat. Eingeführt hat also, wie wir sagen ohne ein Wort des Textes zu bestreiten, Gerbert die indischen Ziffern nicht; er ist ein Vorläufer des im 16. Jahrhundert beginnenden Umschwungs in der systematischen Gestaltung der Arithmetik, der gerade wegen der langen Zwischenzeit um so mehr historisches Interesse bietet. Das vorliegende Buch schliesst sich an ein 5 Jahre früher erschienenes: „Beiträge zur Kenntniss der Mathematik des Mittelalters" — an. In jenem mag manches angegeben sein, was man im gegenwärtigen

vermissen kann (z. B. Heimat und Lebenszeit von Gerbert). Was aber nicht wol möglich war in jenem so befriedigend zum Abschluss zu bringen, dass es hätte jetzt übergangen werden dürfen, ist doch die Frage nach dem Standpunkt von Gerbert's Rechenlehre, namentlich da der Verfasser selbst erklärt, dass die spärlichen Nachrichten nicht erlauben irgend welche sichere Schlüsse zu ziehen. Hierüber findet sich Folgendes angegeben. Gerbert kannte und gebrauchte die 9 Ziffern der Araber mit arabischen Namen. Letztere waren auf die Rechenmarken geschrieben, während Andere lauter gleiche Marken anwandten. Von schriftlichem Rechnen ist nicht die Rede. Die Einrichtung seines Abacus ist unbekannt. Die Null war zu seiner Zeit bekannt, galt aber als etwas verschiedenes von den Ziffern. Er wandte sie nie an (natürlich, wenn er wirklich nur mit Abacus rechnen lehrte). Aus alledem ist keine Spur von scientivem Fortschritt zu erkennen. Der Verfasser erwähnt, dass schon die Griechen das Rechnen mit Abacus nicht als Teil der Arithmetik betrachteten. In der Tat ist es nur eine momentane Arbeit ohne Gewinn für den Verstand. Auch der praktische Vorteil der 9 Ziffern ist unwesentlich. Hätte sich also wirklich Gerbert's Lehre nur in der angegebenen Weise unterschieden, so wäre kaum ein Motiv zur Wahl der arabischen Ziffern, als etwa Vorliebe für das Fremde, ersichtlich. Aus den vorliegenden Angaben lässt sich zweierlei entnehmen. Erstens, die Einrichtung des Abacus ist keine traditionell feststehende, daher auch wol schwerlich eine aus dem Altertum stammende, wie Viele vorauszusetzen scheinen, sondern hängt vom Ermessen der einzelnen Lehrer ab. Zweitens, die Null (zero) ist ein Element in der derzeitigen Rechenlehre, das aber ohne Verständniss (von den Arabern) aufgenommen zu sein scheint. Dafür tritt hier als ein neues Zeugniss die Bemerkung ein, dass die Null begrifflich nicht als Ziffer aufgefasst werde. Noch mehr zu der Annahme gedrängt sind wir durch die von Boncompagni im 15. Bande des Bulletino ans Licht gezogene ganz rätselhafte Aufstellung zweier Schriftsteller, die übereinstimmend erklären, zero bedeute eine der 9 Ziffern, aber nicht die Null. Zur Hauptfrage jedoch macht der Verfasser diese: Von wem hat Gerbert das Rechnen gelernt? — und zwar handelt es sich von Anfang bis Ende darum, ob ein gewisser Josephus sapiens, auch Hispanus genannt, sein Lehrer gewesen, was über denselben näheres zu ermitteln sei, und mit welchen Männern des Namens Joseph er wol identisch sein könne. Offenbar ist das Interesse an jener Frage in Bezug auf Gerbert ganz durch die sachliche Bestimmung bedingt, was dieser von Joseph gelernt haben soll; die blosse Tradition der alten Rechenkunst kann über die Gestaltung von Gerbert's Lehre und deren Quelle keinen Aufschluss geben. Eine solche Unterweisung hat der Verfasser nicht gemeint;

um also überhaupt den Gegenstand seiner Untersuchung verständlich auszusprechen, war eine Berührung des specifischen Lehrinhalts, d. h. keine blosse Aussage (wie auf Seite 14) dass ein solcher vorhanden gewesen, nicht zu umgehen, und darauf kommt er nie zu sprechen. Das Buch bietet sehr viel litterarischen Stoff. Die Citate stehen meist in Zwischensätzen des Textes und sind ausführlicher behandelt in einer grossen Anzahl angehängter Noten. Da sie zufälligen Anlass haben, so ist es wenig wahrscheinlich, dass sie beanspruchen etwas erschöpfendes oder eine Auswahl des Instructivsten zu geben. H.

Bilder aus der Geschichte der Physik. Für Freunde der Naturwissenschaften und für Studirende an höheren Schulen. Von Dr. Eugen Netoliczka, kaiserl. Rath, Professor der Physik i. R. in Graz, Ritter des k. k. österreichischen Franz-Josef-Ordens, Besitzer der gold. Medaille für Kunst und Wissenschaft und des Verdienstkreuzes des grossherz. Mecklenburgischen Ordens der wendischen Krone. Nach des Verfassers Tode fortgesetzt und durchgesehen von Dr. A. Wachlewski, k. k. Gymnasial-Professor. Wien und Leipzig 1891. A. Pichler's Witwe u. Sohn. 258 S.

Das Buch gibt in der Kürze das Wichtigste, was dem Zwecke historischer Ausbildung entspricht, und zeugt in allen Stücken von einer richtigen Auffassung seiner Aufgabe. Dem, was die Vorrede zur Begründung der Notwendigkeit historischen Betreibens der Wissenschaft ausspricht, müssen wir sogleich zu näherer Bestimmung hinzufügen, dass es sich um das Werden der heutigen Wissenschaft handelt. Wir haben nicht die alten Forscher in ihrem dunkeln Suchen zu begleiten, sondern deren Wege mit dem gewonnenen Lichte zu erhellen und irrige Gedanken von richtigen zu unterscheiden. Erst nachdem man mehr zu dieser Praxis übergegangen ist, und die Aeusserungen der Alten im Sinne der jetzigen Ideen zu deuten versucht, hat sich gezeigt, dass die alte Zeit der Physik weniger fremd ist, als es früher schien. Man muss es darum auch als möglich zulassen, dass manche reifere Erkenntnisse Einzelner nur darum mit deren Ableben untergegangen sind, weil ihre Zeitgenossen sie nicht zu würdigen verstanden. Das vorliegende Buch zeichnet sich dadurch aus, dass es die moderne Perspective entschieden zum Princip der Darstellung macht; demgemäss bilden auch die Zweige der heutigen Physik die Themata der einzelnen Abschnitte. Dass der Schüler auch die begangenen Irrtümer kennen lernen muss, wird in der Vorrede betont und in der Ausführung danach verfahren. Die Notwendigkeit tritt am deutlichsen in der Erfahrung zutage, dass die „Freunde der Naturwissenschaft", welche

zur Zeit keine Forscher sind, sich die Wege der Entdeckung viel zu kurz denken, begreiflicherweise, weil sie über alles, was ihnen gewöhnlich und im allgemeinen geläufig ist, ohne Beachtung hinweg zur neuen Entdeckung eilen. Dieser Umstand zeigt, wie in der Tat die Ungründlichkeit im Betreiben der Wissenschaft im nächsten Zusammenhange steht mit dem Mangel historischer Bildung, d. h. derjenigen, welche die Wissenschaft nicht bloss auf ihrem neuesten Standpunkt kennt. Die Geschichte wird hier der Zeit nach nur in die des Altertums, des Mittelalters und der Neuzeit, letztere beginnend in der Mitte des 18. Jahrhunderts, eingeteilt. Von jedem dieser Zeitabschnitte wird zuerst ein allgemeines Bild entworfen, doch ist auch dieses mit allen erreichbaren tatsächlichen Angaben verbunden, so dass an manchen Stellen der Ueberblick durch blosse Zusammenordnung der Tatsachen gegeben wird. Hierauf folgen, in Bezug auf das Altertum, die Mechanik, Optik, Akustik, Magnetismus, Elektricität, kosmische Physik und Chemie. Für alle diese Zweige sind die Stellen zusammengesucht, aus denen wir über die Kenntnisse, technische Verwendung und Erklärungsversuche der Alten irgend etwas entnehmen können. Alles dies zeigt, dass hinreichender Trieb vorhanden war die von Natur gegebenen Erscheinungen so genau als möglich zu beobachten und aus den Resultaten Schlüsse auf die Gesetze und Ursachen derselben zu ziehen, dass sich aber nirgends der Gedanke findet die Entscheidung über Fragen der letztern durch das Experiment zu suchen. Da der Verfasser hierdurch die Physik der Alten charakterisirt, so lag wol nichts näher als die neue Zeit von da an zu rechnen, wo das Experiment als Quelle der Naturerkenntniss principiell erkannt und klar ausgesprochen ist, und das ist nicht im 18., sondern im 17. Jahrhundert durch Bako geschehen. Die Reihe von Entdeckungen, welche aus dem neuen Forschungsprincip in schneller Folge hervorwuchsen, und die den schroffsten Gegensatz gegen den Charakter des Mittelalters zeigen, bringt trotzdem der Verfasser mit zum Mittelalter — man findet schwerlich ein anderes Motiv als demselben einen Anteil an historischer Bedeutung, die ihm sonst zu sehr mangelt, zuzuwenden. Die Geschichte der Neuzeit, wie sie im Buche heisst, stellt sich nun als reine Fortsetzung der im zweiten Abschnitt behandelten dar. Je mehr sie sich der Gegenwart nähert, desto mehr musste natürlich der Umstand auf die Abfassung Einfluss üben, dass die Lösung und Entscheidung immer neuer Fragen der Zukunft vorbehalten bleibt, dass also der Bearbeiter nicht mehr in der Lage ist von reiferem Standpunkt über die auftretenden Ansichten zu urteilen. Dem entsprechend hat hier der Verfasser die sonst beobachtete Kürze und Uebersichtlichkeit aufgegeben und ausführlicher über die für wichtig erachteten Arbeiten der an den neuern Entdeckungen beteiligten Forscher berichtet. H.

Geschichte der Physik. Von Dr. E. Gerland, Dozent für Physik und Elektrotechnik an der Königlichen Bergakademie zu Clausthal i. H. Mit 72 in den Text gedruckten Abbildungen. Leipzig 1892. J. J. Weber. 356 S.

Das Buch gehört als Nr. 4. zu Weber's „Naturwissenschaftlicher Bibliothek." Die Geschichte der gesamten Physik ist hier ohne Scheidung der Zweige in einen fortlaufenden Faden chronologischer Folge mit grossem Geschick verarbeitet, in lebensvoller und dabei stets exacter Sprache, der es auch nicht an den erforderlichen positiven Angaben mangelt. Man lernt alles einzeln im Durchlesen; dahingegen bleibt die Aufgabe sich über den jeweiligen Standpunkt der physikalischen Erkenntniss zu unterrichten ganz dem Leser überlassen. Die Quellen sind im Texte nie angegeben; zum Ersatze folgt am Schlusse ein Litteraturverzeichniss; Verweisung auf dasselbe findet nicht statt. H.

Ueber den Antheil der mathematischen Wissenschaften an der Kultur der Renaissance. Vortrag gehalten im Rathhaus zu Zürich am 5. Februar 1891. Von Dr. F. Rudio, Professor in Zurich. Hamburg 1892. Verlagsanstalt und Druckerei A. G. 33 S.

Der Vortrag ist in erster Linie eine begeisterte Lobpreisung der Mathematik für Zuhörer, welche derselben vermutlich fern stehen, und zwar durch Musterung ihrer Geschichte, aus welcher viele Züge geeignet Hochschätzung zu erwecken vorgeführt werden. Namentlich wird darauf hingewiesen, dass die Blütezeit der Culturvölker immer mit neuen mathematischen Erkenntnissen, erhöhten Leistungen der Mathematik und eifrigerer Hinneigung zu ihr verbunden auftritt. Obgleich es nirgends ausgesprochen noch nachgewiesen wird, so scheint doch die Rede überall darauf abzuzielen, dass man das Betreiben der Mathematik ohne weiteres als Ursache der gleichzeitigen Cultur auffassen soll, und den Gedanken fernzuhalten, dass bei erwachtem Culturleben neben andern Wissenschaften natürlicherweise auch die Mathematik nicht fehlen wird. Was endlich die Renaissance betrifft, so kommt nur das Wort öfters vor, von ihrem Wesen und der Zeit ihrer Erscheinung ist nie die Rede. H.

Wilhelm Weber. Eine Lebensskizze von Heinrich Weber, Professor an der Herzogl. technischen Hochschule zu Braunschweig. Mit einem Bildnis aus dem Jahre 1884. Breslau 1893. Eduard Trewendt. 111 S.

Indem die Schrift die Lebensgeschichte W. Weber's — Sohnes des Prof. der Theologie Michael W., geb. d. 24. Oct. 1804 in Wittenberg, gest. den 23. Juni 1891 in Göttingen — ohne Abschweife erzählt, werden uns zugleich ein ansehnlicher Kreis von Gelehrten ersten Ranges, mit denen er im Umgang stand, und bekannte Begebenheiten, die auf seine Schicksale und seine Tätigkeit bestimmend wirkten, vorgeführt, letztere noch besonders Interesse erregend durch wörtliche Mitteilung von Urkunden und Correspondenzen. Die ersten 2 Abschnitte umfassen die Studienjahre in Halle und Berlin; von letzterem Universitätsbesuche datiren die meisten freundschaftlichen Beziehungen. Nun folgen die 4 Perioden von Weber's Lehr- und Forschertätigkeit: von 1831 bis 1837 als Professor in Göttingen, dann nach Amtsentsetzung in der Zwischenzeit bis 1843, dann als Professor in Leipzig, dann nach seiner Wiederberufung 1849 in Göttingen. Ueber seine wissenschaftliche Tätigkeit, die wol eine sehr concentrirte, ohne fremde Teilnahme und litterarischen Verkehr gewesen sein mag, verhält sich die Erzählung ziemlich schweigsam: die Gegenstände werden kaum mehr als dem Titel nach genannt; erst in der letzten Periode wird auf manches mehr eingegangen; dafür wird der Leser durch Züge des Charakters entschädigt.

H.

Carl Heinrich Schellbach. Gedächtnissrede gehalten in der Aula des Königlichen Friedrichs-Wilhelms-Gymnasiums am 29. October 1892 von Felix Müller. Mit einem Bildnis Schellbach's. Berlin 1893. Georg Reimer. 35 S.

Die angegebenen äussern Facta betreffend das Leben des Verewigten sind folgende. Er ist geb. d. 25. Dec. 1804 auf der Reise nach seiner Vaterstadt Eisleben, unterrichtet daselbst auf dem Gymnasium, studirte Mathematik, Physik und Philosophie von 1824 an in Halle, zog 1829 nach Berlin, promovirte 1834 in Jena, lehrte von da an bis 1841 am Friedrich-Werder'schen, dann am Königl. Friedrich-Wilhelms-Gymnasium, von 1843 an zugleich an der Königl. Kriegsakademie und gehörte seit jener Zeit zur wissenschaftlichen Prüfungscommission, war lange Zeit Lehrer des Kronprinzen Friedrich Wilhelm, nachherigen Kaisers Friedrich, gründete 1855 das mathematisch-pädagogische Seminar, war beteiligt an der Herausgabe des Crelle'schen Journals, trat 1889 in den Ruhestand und starb d. 29. Mai 1892. Die Rede beleuchtet sehr eingehend seine vielseitige Tätigkeit innerhalb und ausserhalb der Schule, entwickelt diejenigen seiner pädagogischen Grundsätze, welche der Redner selbst adoptirt

und als von ihm in seinem Unterrichte empfangen darstellt, und führt in ihrem Verlaufe viele seiner Schriften und Reden auf. Der gedruckten Ausgabe der Rede ist die vollständige Zusammenstellung dieser Schriften am Schlusse beigefügt. H.

Sammlungen.

Recueil de problèmes de mathématiques. Géométrie analytique à deux dimensions (et géometrie supérieure) à l'usage des classes de mathématiques Par C. A. Laisant, Docteur ès sciences, Ancien élève de l'Ecole Polytechnique. Paris 1893. Gauthier Villars et fils. 311 S.

Diese Aufgaben sind aus den bedeutendsten französischen mathematischen Zeitschriften seit 1842 vom Verfasser ausgezogen, geordnet und mit Verweisungen versehen. Einige darunter verlangen den Beweis aufgestellter Sätze. Sie sind nicht ausschliesslich für Schulen, sondern zum Teil für die reine Wissenschaft bestimmt, auch kommen Aufgaben berühmter Autoren vor. Von vielen Aufgaben sind Lösungen bereits veröffentlicht; die Autoren der Fragen sind, soweit der Verfasser sie hat ermitteln können, stets angegeben, und die Lösungen citirt. Die Hauptabschnitte sind: Gebilde aus Geraden und Kreisen, Kegelschnitte, algebraische Curven, transcendente oder allgemeine Curven, geometrische Oerter, Enveloppen, bewegte Gebilde. H.

100 Aufgaben aus der niederen Geometrie nebst vollständigen Lösungen. Mit 104 Abbildungen. Von Dr. Karl Schwering, Oberlehrer und Professor. Freiburg i. Br. 1891. Herder. 152 S.

Der 1. Teil enthält 60 planimetrische, der 2te 40 stereometrische mannichfaltige, hinsichtlich der Schwierigkeit absichtlich gemischte, für Erweckung des Interesses ausgewählte Aufgaben. Nicht nur die Lösungen und Beweise, sondern auch alles, was zur Analysis und Determination gehört, sowie die anzuwendenden Sätze stehen ausführlich dabei. Sie sind darauf berechnet mit einem beliebigen Lehrbuche verbunden gebraucht zu werden. H.

Planimetrische Aufgaben für den Gebrauch im Schul-, Privat- und Selbstunterricht bearbeitet von Prof. Dr. F. Reidt, Oberlehrer

am Gymnasium zu Hamm. Erster Toil. Aufgabon goordnet nach den Lehrsätzcn des Systems. Zwoite Anflage. Breslau 1890. Ednard Trewendt. 96 S.

Im 26. litt. Bericht S. 15 ist dor 2. Teil in 1. Anflage besprochen. Was daselbst zur Charakterisirnng des Ganzen gesagt ist, trifft anch in Betreff des jetzt erschienenen Teils vollkemmen zn. Etwas hinznzufügen ist kein Anlass. H.

Die wichtigcron Drciecksaufgaben aus der ebenen Trigonemetrie. Für den Schulgebrauch und zum Selbststudium zusammengestellt und aufgelöst vou Waldemar Madol. Berlin 1892. Max Rügcr. 63 S.

Es sind 305 Combinatienen zn 3 aus den Seiten, deren Summen, Differenzen und Quadratsummon, Höhen, deron Summen und Differenzen, Inhalt, Um- und Inkreisradius und Winkeln als gegebeno Bestimmungsstücke des Dreiecks zuerst in Zeichen tabellarisch aufgestellt. Dann wird für jode dieser Combinationen der Weg der successiven Berechnung der unbekannton Seiten und Winkel durch Angabo dor auf logarithmischo Rechnung eingerichteten Formeln angezeigt. H.

Geerling's Rechenbuch, Hand- und Hilfsbuch für höhere und Subalternbeamte, Militäranwärter und Praktikanten, welche zum Zwecko ihrer Austellung oder Beförderung in höhere Amtsstellungen oine Prüfung im Rechnen abzulegen haben. Zwölfte Auflage. Leipzig 1892. Ad. Gestewitz Nachf. 104 S.

Das Buch gibt in sehr goschickter Abfassung ehne Voranssetzung besenderer Schulbildung ausreichende Anweisung zum Rechnen, und zwar umfasst es dio 4 Species in Ganzen, gemeinen und Decimalbrüchen, Proportionen, Quadrat- und Kubikwurzelausziehung, Precent-, Disconto-, Wechselrechnung, Zins- und Zinseszinsrechnung, Mischungsrechnung, Kettenrechnung, Buchstabenrechnung, Flächen- und Körperberechnung, Aufgaben aus der Mechanik, verher Auskunft über die Erferdernisse der Prüfungen. H.

5000 Aufgaben nebst Resultaten ans dor Bruchrechnung — — und:

Arithmetischos Quellsalz für Freunde des Rechnens. Von

Ferd. Roese. Wismar 1890. Hinstorff. 46 S. $13\frac{1}{2} \times 10\frac{1}{2}$ cm. und 176 S. $5\frac{3}{4} \times 4\frac{1}{2}$ cm.

Ein grosser Vorrat an numerischen Exempeln auf kleinem Raume. H.

Aufgaben aus der theoretischen Mechanik nebst Auflösungen. Von Dr v. Zech, Prof. a. D. Zweite Auflage unter Mithilfe von Dr. C. Cranz, Docent der technischen Hochschule Stuttgart. Stuttgart 1891. J. B. Metzler. 225 S.

Die Aufgaben gehören zu folgenden 10 Teilen der Mechanik: Zusammensetzung der Kräfte, Gleichgewicht in der Ebene, im Raume, virtuelle Verschiebungen, Gleichgewicht mit Reibung, Graphostatik, Dynamik des Punktes, Stoss, Festigkeit, Hydrostatik, Drehung um feste Axe, Dynamik der Körper. Sie sind ohne jede willkürliche Specialisirung, lassen sich sogar bald mehr, bald weniger als Anhang zur Theorie selbst rechnen. Die 2. Auflage ist vermehrt durch Aufnahme mancher Aufgaben von C. W. Baur. H.

Aufgaben aus der Physik nebst einem Anhange, physikalische Tabellen enthaltend. Zum Gebrauche für Lehrer und Schüler in höheren Unterrichtsanstalten und besonders beim Selbstunterricht. Von Prof. Dr. C. Fliedner, Gymnasialprorector a. D., Inhaber des Roten Adlerordens IV. Classe. Siebente, verbesserte und vermehrte Auflage, bearbeitet von Prof. Dr. G. Krebs in Frankfurt a. M. Mit 74 in den Text eingedruckten Holzstichen -- — und:

Auflösungen zu den Aufgaben aus der Physik etc. s. o. Mit 122 in den Text eingedruckten Holzstichen. — Braunschweig 1891. Friedrich Vieweg und Sohn. 134 + 23 + 197 S.

Die Aufgabensammlung ist sehr reichhaltig und vielseitig. Die Auswahl schliesst sich sichtlich der technischen Verwendung an. Aufgaben, welche bloss nach Quantitäten fragen, also Berechnung fordern, bieten sich natürlich am leichtesten dar und sind auch hier in grösster Anzahl vorhanden. Die Data sind, nach Voransschickung einiger Aufgaben, welche das allgemeine Verfahren in Erinnerung bringen, in bestimmten Zahlen aufgestellt. Bei manchen Aufgaben werden auch Constructionen verlangt. Nun erstrecken sich die Aufgaben aber auch in ziemlichem Umfange auf Experimente. Bei diesen scheint Beschreibung derselben als genügende Lösung betrachtet werden zu sollen; wieviele die Schüler ausführen können, bleibt natürlich vorbehalten. H.

Uebungsbuch zur Arithmetik und Algebra, enthaltend die Formeln, Lehrsätze und Auflösungsmethoden in systematischer Anordnung und eine grosse Anzahl von Fragen und Aufgaben. Anhang für höhere realistische Lehranstalten (Realgymnasien, Oberrealschulen u. s. w.) bearbeitet von Dr. E. Wrobel, Gymnasiallehrer in Rostock. — — Und:

Resultate zu dem Uebungsbuch zur Arithmetik und Algebra. Anhang. Herausgegeben von Dr. E. Wrobel, Gymnasiallehrer in Rostock. Rostock 1892. Wilh. Werther. 70 + 30 S.

Dies Buch gehört als Anhang zu dem gleichbetitelten, welches im 33. litt. Bericht S. 32 besprochen ist. Es behandelt gleicherweise die Gleichungen 3. und 4. Grades, die Auflösung numerischer Gleichungen durch Näherung, den Moivre'schen Lehrsatz, Potenziren und Radiciren complexer Zahlen, Auflösung binomischer Gleichungen *n*ten Grades, unendliche Reihen und Maxima und Minima der Functionen. H.

Aufgaben aus der Stereometrie und Trigonometrie. Für Gymnasien und Realschulen bearbeitet von K. Jüdt, K. Professor und Rektor der Realschule in Ansbach. Vierte, vermehrte Auflage. Ansbach 1891. Fr. Seybold. 61 S.

Die Anordnung entspricht den Cursen der bairischen Gymnasien und Realschulen und ist mittelst h. Ministerial-Entschliessung denselben zum Gebrauche empfohlen. Demgemäss enthält der 1. Teil Aufgaben zur Stereometrie, grösstenteils Körperberechnung, der 2te zur ebenen Trigonometrie. H.

Mathematische und physikalische Bibliographie.

XXXVIII.

Geschichte der Mathematik und Physik.

Cantor, M., Vorlesungen über Geschichte d. Mathematik. 2. Bd. Von 1200—1668. 2. Thl. Leipzig, Teubner. 10 Mk.; 2. Thl. kplt. 24 Mk.

Fortschritte, die, der Physik im J. 1886. Dargestellt v. der physikal. Gesellschaft zu Berlin. 42. Jahrg. 2. Abth. Berlin, Georg Reimer. 17 Mk.

Joannis Geometrae carmen de S. Panteleemone, integrum ed. L. Sternbach, Krakau, Buchh. d. poln. Verlags-Ges. 3 Mk.

Lindemann, üb. die uns erhaltenen Bücher aus der Bibliothek d. Copernikus. — Ueber die Hypothesen der Geometrie. Königsberg, Koch. 15 Pf.

Mahler, E., der Kalender der Babylonier. Leipzig, Freytag. 60 Pf.

Riemann's, B., gesammelte mathematische Werke u. wissenschaftlicher Nachlass. Hrsg. v. H. Weber. 2. Aufl., bearb. v. H. Weber. Leipzig, Teubner. 18 Mk.

Methode und Principien.

Bieler, A., schulgemässe Behandlung der Geometrie in Bürger- und Mittelschulen. Für Lehrer u. Seminaristen bearb. (In 2 Tln.) 1. Tl.: Die Grundlehren der Geometrie. Hannover, Meyer. 1 Mk.

Hoffmann, G., die Andersohn'sche Drucktheorie u. ihre Bedeutung f. die einheitliche Erklärung der physischen Erscheinungen. Halle, Schwetschke'scher Verl. 1 Mk.

Kublin, S., die Bewegungen der Elemente. Eine kosmischtellur. Studie. Fünfkirchen, Engel. 60 Pf.

Mewes, R., Kraft u. Masse, Bilder d. Kosmos. (Identität der Naturkräfte.) 1. Tl. Berlin, Exp. d. „Immaterialgüter." 2 Mk.

Sachse, F. J., der praktische, geistbildende u. erziehliche Unterricht im Rechnen u. in der Raumlehre. 1. Tl. Allgemeine Lehrkunde d. Rechenunterrichts. 2. Aufl. Osnabrück, Webberg. 2 Mk. 25 Pf.

Weinhold, K., Glücksrad u. Lebensrad. Berlin, Georg Reimer. Kart. 2 Mk. 50 Pf.

Wenzel, L., logische Operationen in der Mathematik u. beim mathematischen Unterrichte. (Fortsetzung.) Progr. Klagenfurt, v. Kleinmayr. 1 Mk.

Lehrbücher.

Kambly, L., die Elementar-Mathematik, f. den Schulunterricht bearb. 4. Tl. Stereometrie. Nebst Uebungsaufgaben. 22. Aufl. Breslau, Hirt, Verl. 1 Mk. 50 Pf.

Wimmenauer, Th., die Elemente der Mathematik f. Gymnasien, nach den neuen Lehrplänen bearb. 1. Tl.: Arithmetik. 2. Afl. Ebd. 2 Mk.

Sammlungen.

Braun, W., Rechenbuch f. die unteren Klassen v. Mittelschulen. 1. Tl. Das Rechnen m. ganzen Zahlen. 3. Aufl. Bamberg, Uhlenhuth's Buchh. Kart. 1 Mk. 20 Pf.

Kleyer, A., vollständig gelöste Aufgaben-Sammlung aus allen Zweigen der Rechenkunst, der niederen u. höheren Mathematik, der Physik etc. 1128.—1147. Hft. Stuttgart, Jul. Maier. à 25 Pf.

Knios, K., u. O. Bachmann, Aufgabensammlung f. das Rechnen m. unbestimmten Zahlen. 1. Tl. 4. Aufl. München, Kellerer. 1 Mk. 20 Pf.

Madel, W., die wichtigsten Dreiecksaufgaben aus der ebenen Trigonometrie. Für den Schulgebrauch u. zum Selbststudium zusammengestellt u. aufgelöst. Berlin, Rüger, Verl. 1 Mk. 80 Pf.

Roeder, H., Aufgaben aus der ebenen Geometrie. Breslau, Hirt, Verl. 1 Mk. 35 Pf.

Sachs, S., Auflösungen der im M. Hirsch, Sammlung v. Beispielen u. s. w. enth. Gleichungen u. Aufgaben. 13. Aufl. v. G. Valentin. Altenburg, H. A. Pierer. 5 Mk.

Sammlung v. Formeln aus dem Gebiete der Algebra, Geometrie, Stereometrie, Trigonometrie, Mechanik u. Astronomie, zusammengestellt f. den Schulgebrauch. 3. Aufl. Würzburg, Stahel, Verl. 50 Pf.

Schubort, H., Aufgaben aus der Arithmetik u. Algebra f. Real- u. Bürgerschulen. Ein Auszug aus der Sammlung v. arithmet. u. algebr. Fragen u. Aufgaben. Potsdam, Stein. 1 Mk.

Stubba, A., Sammlung algebraischer Aufgaben, nebst Anleitg. zur Auflösg. derselben durch Verstandesschlüsse. 12. Aufl., bearb. v. K. Backhaus. Altenburg, H. A. Pierer. 2 Mk.

Wrobel, E., Uebungsbuch zur Arithmetik u. Algebra, enth. die Formeln, Lehrsätze u. Auflösungsmethoden in systemat. Anordng. u. e. grosse Anzahl v. Fragen u. Aufgaben. Zum Gebrauche an Gymnasien, Realschulen u. andern höheren Lehranstalten bearb. 1. Tl. Die 7 arithmet. Operationen, Proportionen, Gleichungen 1. Grades m. 1 u. mehreren Unbekannten. Anh.: Quadratische Gleichgn. m. 1 Unbekannten. 2. Aufl. Rostock, Werther's Verl. 2 Mk. 60 Pf.; geb. 3 Mk.

Tabellen.

Gauss, F. G., fünfstellige vollständige logarithmische u. trigonometrische Tafeln. 37. Aufl. Halle, Strien. Geb. in Leinw. 2 Mk. 50 Pf.

Kahle, P., Sonnen- u. Sterntafel f. Deutschland, Oesterreich u. die Alpen. Zur Bestimmg. der Himmelsrichtg. u. Zeit nach dem Stand der Sonne u. Sterne im geograph. Unterricht, bei topograph. Aufnahmen u. auf Reisen. Nebst erläut. Text u. e. Uebersichtskarte v. Mitteleuropa zur Bestimmg. d. Unterschiedes zwischen Ortszeit u. der mitteleurop. Einheitszeit (M. E. Z.). Aachen, C. Mayer's Verl. 1 Mk. 35 Pf.

Nell, A. M., fünfstellige Logarithmen der Zahlen u. der trigonometrischen Funktionen, nebst den Logarithmen f. Summe u. Differenz zweier Zahlen, deren Logarithmen gegeben sind, sowie einigen anderen Tafeln, m. e. neuen, die Rechnung erleichternden Anordng. der Proportionaltheile. 7. Aufl. Darmstadt, Borgsträsser, Verl. Geh. 1 Mk. 80 Pf.

Scherer, Hülfstafel zur Berechnung rechtwinkeliger Coordinaten (Kreis 360°) m. Scherer's logarithmisch-graphischer Rechentafel. Cassel, Klaunig. 1 Mk.

Schlömilch, O., fünfstellige logarithmische u. trigonometr. Tafeln. Wohlfeile Schulausgabe. 11. Aufl. Braunschweig, Vieweg & S. 1 Mk.

Seiffert, O., logarithmische Hilfstafel zur Berechnung der Fehlervergleichungs-Koeffizienten beim Einschneiden nach der Methode der kleinsten Quadrate. Halle, Strien, Verl. 2 Mk.

Westrick, F. A., fünfstellige Logarithmen f. den Schulgebrauch. Münster, Aschendorff'sche Buchh. Geh. 1 Mk.

Arithmetik, Algebra und reine Analysis.

Bachmann, P., Vorlesungen über die Natur der Irrationalzahlen. Leipzig, Teubner. 4 Mk.

Bork, H., u. F. Poske, Hauptsätze der Arithmetik, f. die Unter- u. Mittelklasse höherer Lehranstalten zusammengestellt. 3. Aufl. Berlin, Georg Reimer. Kart. 60 Pf.

Gegenbauer, L., üb. einige arithmetische Determinanten höheren Ranges. Leipzig, Freytag. 1 Mk. 10 Pf.

Gmeiner, J. A., das allgemeine bicubische Reciprocitätsgesetz. Ebd. 50 Pf.

Hirsch, A., zur Theorie der linearen Differentialgleichung m. eindeutigem Integral. Königsberg, Koch. 20 Pf.

Krazer, A., u. F. Prym, neue Grundlagen e. Theorie der allgemeinen Thetafunctionen. Kurz zusammengestellt u. hrsg. v. A. Krazer. Leipzig, Teubner. 7 Mk. 20 Pf.

Krug, A., zur linearen Differentialgleichung 3. Ordnung. Prag, Dominicus. 2 Mk.

Mertens, F., der Fundamentalsatz der Algebra. Leipzig, Freytag. 30 Pf.

Geometrie.

Bensemann, H., Lehrbuch der ebenen Geometrie f. höhere Schulen. Dessau, Baumann's Verl. 1 Mk. 60 Pf.

Eberle, J, F., üb. rationale Curven 5. Ordnung, insbesondere diejenigen 4. u. 5. Classe. München, Lindauer'sche Buchh. 1 Mk.

Hegele, A., die Fundamentalaufgaben der darstellenden Geometrie. Progr. Straubing, Hirmer. 2 Mk.

Köstler, H., Vorschule der Geometrie. 7. Aufl. Halle, Nebert's Verl. Kart. 50 Pf.

Opderbecke, A., die darstellende Geometrie, bearb. f. den Unterricht an techn. Fachschulen u f. den Selbstunterricht. Höxter, Buchholtz'sche Buchh. In Mappe 4 Mk.

Puchta, A., üb. die allgemeinsten abwickelbaren Räume, e. Beitrag zur mehrdimensionalen Geometrie. Leipzig, Freytag. 70 Pf.

Reiser, N., die grossen Diagonalen. (Deutsch u. französisch.) München, Callwey, Verl. 7 Mk. 50 Pf.

Salberg, J. A., geometrische Wandtafeln. 12 Taf. (11 Taf. 74,5 × 100,5 cm.; 10 Taf. à 4 Bl. 58 × 54 cm.) Bamberg, Buchner, Verl. 7 Mk. 50 Pf.

Seipp, H., Lehrbuch der räumlichen Elementar-Geometrie (Stereometrie). 1. Tl.: Die Lage v. geraden Linien u. Ebenen im Raum. Bearb. nach System Kleyer. Stuttgart, Jul. Maier. 6 Mk.

Sondlor, R., Raumlehre f. Präparandenanstalten Breslau, Handel's Verl. 1 Mk. 20 Pf.

Simon, M., Leitfaden der analytischen Geometrie der Ebene. Zum Gebrauche f. höhere Lehranstalten. Berlin, Weidmann. 1 Mk.

Spieker, Th., kurze Anleitung zum Lösen der Uebungsaufgaben d. Lehrbuchs der ebenen Geometrie f. höhere Lehranstalten. Potsdam, Stein. 1 Mk. 20 Pf.

— Lehrbuch der ebenen Geometrie m. Uebungsaufgaben f. höhere Lehranstalten. 20. Aufl. Ebd. 2 Mk. 50 Pf.; geb. 2 Mk. 90 Pf.

— dasselbe. Ausg. B. Für mittlere Klassen. 3. Aufl Ebd. 1 Mk. 60 Pf.; geb. 1 Mk. 80 Pf.

Sucharda, A., üb. die bei e. Gattung centrischer Rückungsflächen der 4. Ordnung auftretende Reciprocität. Leipzig, Freytag. 30 Pf.

Sturm, R., die Gebilde 1. u. 2. Grades der Liniengeometrie in synthetischer Behandlung. 1. Thl. Der lineare Complex od. das Strahlengewinde u. der tetraedsle Complex. Leipzig, Teubner. 12 Mk.

Zahlor, X., geometrisches Linearzeichnen f. Mittelschulen. München, Oldenbourg. Kart. 2 Mk. 50 Pf.

Trigonometrie.

Hribar, E., Elemente der ebenen Trigonometrie. Zum Schulgebrauch u. zum Selbststudium dargestellt. Freiburg, Herder. 1 Mk. 20 Pf.; Einbd. 30 Pf.

Praktische Geometrie, Geodäsie.

Gauss, F. G., die trigonometrischen u. polygonometrischen Rechnungen in der Feldmesskunst. 2. Aufl. (In 9 Heften.) 1.—3. Hft. Halle, Strien. à 3 Mk. 50 Pf.

Gross, H., die einfacheren Operationen der praktischen Geometrie. Leitfaden f. den Unterricht an techn. Lehranstalten etc. 3. Aufl. Stuttgart, Wittwer's Verl. 2 Mk.

Mechanik.

Klimpert, Lehrbuch der Bewegung flüssiger Körper (Hydrodynamik). I. Bd.: Die Bewegungserscheingn. flüss. Körper, welche aus den Boden- und Seitenwänden v. Gefässen, sowie durch Röhren

Litterarischer Bericht

XLVI.

Lehrbücher.

Lehrbuch der allgemeinen Arithmetik und Algebra. Von Prof. Dr. Karl Wilhelm Neumann, Oberlehrer an dem Gymnasium zu Bremen. Sechste, verbesserte und vermehrte Auflage. Bremen 1892. M. Heinsius Nachfolger. 215 S.

Das Lehrbuch zeigt mit verhältnissmässig wenigen Ausnahmen grossen Fleiss in der Bearbeitung. Namentlich ist darauf gesehen, dass alles notwendige Wissen nach allen Seiten hin darin steht, gleich von Anfang auf niederer Stufe exact ausgedrückt ist, mithin keiner Correction auf höherer Stufe bedarf, und begründet wird. Besonders hervorzuheben ist, dass die 7 algebraischen Operationen systematisch entwickelt, die 4 inversen als inverse, und die Erweiterungen des Zahlbegriffs erklärt werden. Weniger ist darauf Bedacht genommen, Ueberflüssiges zu meiden, das Wichtige und Grundlegende von weitern Folgerungen zu scheiden und auf einfachstem Wege ohne fremde Einmischung herzuleiten, damit der Schüler über die Menge von Sätzen, die er zu behalten hat, eine Uebersicht gewinnt. In dieser Beziehung würde für künftige Auflagen mancherlei zu bessern bleiben. Sachlich unrichtig ist, was über den Nenner null gesagt wird. Der wichtigste Satz, dass nämlich durch 0 nicht dividirt werden kann, dass also $a:0$ kein Ausdruck für eine Zahl ist, ist gar nicht ausgesprochen. Dieser Satz allein enthält alles, was an jener Stelle zu sagen war. Was dagegen dasteht, $a:0$ sei unendlich gross, ist falsch, $0:0$ sei unbestimmt, ist undeutlich, das Hinzugefügte verwirrend und

Fehlschlüsse geradezu herbeiführend. (Hier steht nämlich, man könne in $\frac{xb}{xa}$, wenn $x = 0$ ist, vorher x herausheben!) Die Lehre von den unendlichen Grössen ist eins der Themata, über welche der Verfasser mit ungenügenden Angaben und Erkärungen hinweggeht, gerade wo sie schwer zu verstehen schienen. Sie in das Lehrbuch aufzunehmen, war an dieser Stelle gar kein Grund, wol aber ein bedeutender beim Begriffe der Irrationalzahlen, und letztern übergeht er mit Stillschweigen sowol bei den Decimalbrüchen als auch bei den Potenzwurzeln und Logarithmen. Hier ist also eine Lücke in den Erweiterungen des Zahlbegriffs. Die imaginären Zahlen werden besprochen, doch ganz ungenügend: von complexen Zahlen und Vieldeutigkeit der Wurzeln ist nicht die Rede; es soll sogar $\sqrt[2n]{-a}$ unter den Begriff von $\sqrt{-a}$ fallen! Ein Abschnitt über unendliche Reihen, der im Buche Aufnahme gefunden hat, ist völlig unbrauchbar: ihm fehlt geradezu alles um einen verständlichen Sinn zu geben. Wenn nun auch das Gerügte, sowie mancherlei logische Schwächen, die noch zu rügen bleiben würden, nur einen geringen Teil des Buches betreffen, so lässt sich dasselbe doch, bevor die erforderliche Correction stattgefunden hat, nur als ungeeignet für Schulunterricht bezeichnen, weil es Irrtümer verbreitet, den Schülern in unverstandenen Lehren ein eingebildetes Wissen beibringt und sie an gedankenloses Rechnen gewöhnt. Hoppe.

B. V. Moreira de Sá professor da Escola Normal do Porto arithmetica para uso dos lyceus e escolas normaes com um juizo critico do ex^{mo}. sr. Dr. F. Gomes Teixeira Doutor na faculdade de Mathematica da Universidade do Coimbra, antigo lente da mesma faculdade, director e lente da Academica Polytechnica do Porto, socio correspondente da Academia Real des Sciencias de Lisboa, da Academia Real das Sciencias de Madrid, da Sociedade Real das Sciencias do Liége, da Sociedade Real das Sciencas do Praga, da Sociedade das Sciencias Physicas e Naturaes de Bordeus, etc. Lisboa 1891. A. Ferreira Machado e Co. 603 S.

Die Capitel des Buchs, das wir wol als das Hauptwerk für den arithmetischen Unterricht in den portugiesischen Schulen betrachten dürfen, sind folgende: Numerirung in Worten und Zeichen; Operationen; Eigenschaften der ganzen Zahlen; Brüche, gemeine, Decimalbrüche; Approximationen; Begriffe der Irrationalzahlen und Grenzworte; Verhältnisse und Proportionen; Begriffe der negativen Zahlen; Progressionen; Logarithmen; benannte Zahlen; bürgerliche

Rechnungen. Jedes dieser Themata wird in Definitionen, Lehrsätzen, Aufgaben und Ausrechnungsregeln behandelt. Charakteristisch für das Ganze ist, dass jede Definition und jeder Lehrsatz auf alle möglichen Weisen umgestaltet wird; vielleicht sollen diese verschiedenen Wendungen des gleichen Gedankens zur Prüfung des Verständnisses dienen. Gegen diese grosse Sorglichkeit contrastirt nun sehr, dass der Begriff der Null als selbstverständlich ohne Erklärung bleibt, consequenterweise in der erweiterten Zahlenreihe die Lücke zwischen 1 und —1 keine Beachtung findet, und von Operationen mit 0 nirgends die Rede ist. Es scheint hiernach wie im Mittelalter noch null als reine Negation einer Zahl aufgefasst zu werden. Eigentümlich ist ferner, dass die Logarithmirung nicht zu den Operationen gerechnet, die Radicirung als einzige Inverse der Potenzirung aufgeführt wird. Es mag dies darin seinen Grund haben, dass die Berechnung der Logarithmen nicht zu den Lehrobjecten gehört; doch darf man diesem Umstande, der es nur mit dem Erlernen zu tun hat, keinen Einfluss auf das sachliche Urteil gestatten; die Beziehung des Logarithmus zur Zahl bleibt dieselbe, mag man ihn berechnen oder in Tafeln aufsuchen. Bei der blossen Anweisung zur logarithmischen Rechnung lässt es indes auch das Lehrbuch nicht bewenden, sondern gibt auch die Theorie des Logarithmus. Zum Gebrauche empfiehlt der Verfasser die siebenstelligen Logarithmentafeln von Callet, Dupuis und Schrön. Die Lehre von den Gleichungen ist im Lehrbuche nicht enthalten, wird also nicht zur Arithmetik gerechnet; doch kommt auch unter den angezeigten sonstigen Schriften von Moreira nichts vor, was auf dieselbe Bezug hätte.

Hoppe.

Leitfaden der Arithmetik nebst Uebungsbeispielen. Von Adolf Sickenberger, K. Gymnasialprofessor und Rektor der Luitpold-Kreisrealschule in München. Fünfte Auflage. München 1891 Theodor Ackermann. 196 S.

Leitfaden der elementaren Mathematik. Von Adolf Sickenberger, K. Gymnasialprofessor und Rektor der Luitpold-Kreisrealschule in München. Erster Teil. Algebra. Zweite Auflage. München 1892 Theodor Ackermann. 75 S.

Beide Werke sind in allen früheren Auflagen besprochen (litt. Ber. 228. S. 33, l. B. 247. S. 24, l. B. 8. S. 45, l. B. 25. S. 3). Das erstere ist in 3. Auflage umgearbeitet. Im letztern ist der gerügte Fehler **nicht** berichtigt. Dass $a:0$ Unsinn ist, wird erst ausgesprochen; dennoch wird hinterher $a:0$ unendlich gross genannt; wenn das einen Zweck haben soll, so kann es nur der sein den

Schüler confus zu machen. Statt die wichtige Lehre, dass man durch null nicht dividiren kann, mithin jede formelle Division durch null ein Fehler ist, einfach und unumwunden, wie sie sich ergeben hatte, hinzustellen, wird sie durch ein Stückchen von Infinitesimalbetrachtung in höchst unklarer Auffassung verhüllt und bei Seite geschoben, als wäre es höchster Zweck des Unterrichts die Erkenntniss der Wahrheit fern zu halten. Dem Verfasser war durch ausführliche Besprechung des Punktes in der Recension der vorigen Auflage reichlich Anlass geboten dieses Vorgehen zu rechtfertigen; die Vorrede zur neuen Auflage aber schweigt darüber.

Hoppe.

Ebene Geometrie, Lehrbuch mit systematisch geordneter Aufgabensammlung für Schulen und zum Selbststudium. Von Dr. Georg Recknagel, Professor der Mathematik und Physik am k. Realgymnasium zu Augsburg. korresp. Mitglied der K. B. Akademie der Wissenschaften zu München. Vierte, verbesserte Auflage. München 1892. Theodor Ackermann. 214 S.

In Hinsicht auf genauen und concinnen Ausdruck und auf strenge Deduction ist das Lehrbuch musterhaft. Der Lehrform liegt die gewöhnliche zugrunde, doch wird sie nicht derart als bindend betrachtet, dass nicht zugunsten des Lehrzweckes im einzelnen davon abgegangen wäre. Weggelassen wird die Ausführung dessen, was im Vorausgehenden bereits hinreichend geübt ist, um vom Schüler sicher vollzogen zu werden. Hierhin gehören auch eine ziemliche Anzahl Beweise, deren Weg nur angedeutet ist. Hinzugefügt sind vielerlei Bemerkungen geeignet und notwendig um den Schüler in die geometrische Praxis einzuführen und mit ihr vertraut zu machen. Sichtlich ist das Bestreben den Lehrstoff systematisch zu ordnen, wenn gleich wegen Verschiedenheit der Gesichtspunkte das Ziel sich schwerlich erreichen lässt. Es folgen auf einander (obwol nicht ebenso betitelt) die Abschnitte: allgemein geometrische Erklärungen; Winkel; Congruenz; Flächengleichheit; Aehnlichkeit. Die Lehre vom Kreise wird in 3 Abschnitten gesondert behandelt, von denen der erste (Gleichheiten) der Congruenz, der zweite (Proportionen) der Aehnlichkeit, der dritte (Kreismessung) dem Ganzen angehängt erscheint. Im einzelnen ist folgendes zu bemerken. Auf die Erklärung des Vierecks § 58. folgen 3 Lehrsätze, deren zwei nur für convexe Vierecke richtig sind; die beschränkte Geltung ist nicht ausgesprochen Das Wort „Kreis“ wird im Sinne der Kreisfläche eingeführt, wofür keine einzige Erwägung, weder der gemeine Wortgebrauch (ausgenommen nur der Gebrauch für „Bezirk“, der es mit

der Gestalt gar nicht zu tun hat), noch die logische Folge der Begriffsbestimmung, noch die Analogie mit andern Curven, noch ein praktischer Vorzug, sondern allein die Autorität Euklids sich aufbringen lässt. Das gegenwärtige Lehrbuch zeichnet sich dadurch aus, dass es sich die Mühe gibt die einmal aufgestellte Erklärung consequent aufrecht zu erhalten, während andere Lehrbücher dieselbe nach Aufstellung alsbald ausser Acht lassen. Die natürliche Folge ist, dass gewöhnlich die Schüler bald zum vulgären und richtigen Begriffe zurückkehren, dass sie dagegen durch Gegenwärtiges ermächtigt werden den vulgären Begriff, zwar in unverständiger doch schulgerechter Weise zu corrigiren. Auch der in jeder Hinsicht verwerfliche Gebrauch des Wortes „Figur“ für begrenztes Flächenstück hat hier Aufnahme gefunden. Figur, ein lateinisches Wort in einem Sinne, den keine romanische Sprache kennt, und das selbst durch seinen vulgären Gebrauch weit entfernt ist den Gedanken an das zu erwecken, den es ausdrücken soll, ist von deutschen Schullehrern irgend einmal gewählt worden, bloss weil ihnen kein passendes zur Hand war, und wird seitdem, trotzdem es ausser der Schule in jener Bedeutung gar nicht vorkommt, den Schülern noch immer als schulgerechter Ausdruck dargeboten. Setzt es vielleicht den Lehrer in Verlegenheit, dass dem lateinischen „*area*“ kein entsprechendes deutsches Wort vorhanden ist, so liegt die correcte Aushülfe in mehrfacher Weise nahe genug: will man den Begriff in voller Allgemeinheit schon von Anfang an benennen, so wendet man das lateinische Wort, nur nicht wie bisher das falsche „*figura*“, sondern das überall gültige etwa in der Form „Areal“, an; in der Schulgeometrie ist jedoch so selten Bedürfniss das Umfassende für „Vieleck“, „Sector“ etc. zu benennen, dass es sich überhaupt nicht lohnt neben „Flächenstück“ noch einen besondern wissenschaftlichen Terminus einzuführen. Hoppe.

Katechismus der Ebenen u. Räumlichen Geometrie. Von Prof. Dr. Karl Eduard Zetzsche. Dritte, vermehrte und verbesserte Auflage. Mit 223 Figuren und 2 Tabellen zur Massverwandlung. Leipzig 1892. J. J. Weber. 321 S.

Katechismus wird eine gruppirte Zusammenstellung des gesamten Lehrstoffs genannt. Das Band einer Gruppe bildet das gemeinsame Thema, von dem sie handelt. Das Thema ist in Frageform übergeschrieben, dann folgen römisch numerirt die dasselbe betreffenden Bemerkungen, welche dem Schüler bekannt sein oder werden müssen. Die Wahl der Themata bindet sich an kein Princip; bald sind es die Raumgebilde selbst, bald Gegenstände der Doctrin. Im Anfang

waltet das Wissen, weiterhin gesteigert das Können vor; unter den Aufgaben sind sowol Rechnung als auch Construction berücksichtigt, Trigonometrie aber ist ausgeschlossen. H.

Systematischer Grundriss der Elementarmathematik. Zweite Abteilung: Die Geometrie (Raumlehre.) Für den Gebrauch an höheren Lehranstalten bearbeitet von Professor Dr. Eduard Fischer, Oberlehrer am Friedrichs-Gymnasium zu Berlin. Berlin 1891. Carl Duncker. 226 S.

In der Vorrede wird mehr als einmal auf logische Strenge Gewicht gelegt. Wäre dies auch nicht ausdrücklich gesagt, so würde man aus der originellen fundamentalen Art der Bearbeitung es erkennen, dass der Verfasser seinem Werke wissenschaftliche Gründlichkeit als unterscheidendes Merkmal vindiciren will. Doch schon bald tritt es an den Tag, dass der Anspruch auf leeren Schein gebaut ist: durch sehr bekannten Trugschluss bringt der Verfasser einen Beweis für den Parallelensatz zustande. Merkwürdigerweise ist hier der Fehler sehr nachlässig verhüllt; denn in § 2. steht, die Richtung sei eine Gerade, dann in § 3., der Winkel sei die Differenz zweier Richtungen (also doch nach § 2. die Differenz zweier Geraden?!) — und eben der Mishrauch des mangelhaft erklärten Begriffs der Richtungen ist das Versteck des Fehlers. Neben diesem einen noch andre logische Zauberkunststücke im Buche aufzuweisen ist nicht nötig; der eine verrät den Geist, in welchem es abgefasst ist; auch der Zauberkünstler sorgt dafür, dass das meiste genau richtig ist. Solche Künste erfüllen nicht den Zweck des Schulunterrichts; daher ist das vorliegende Buch für denselben untauglich. Hoppe.

Leitfaden für den ersten Unterricht in der Geometrie. Von Heinrich Seeger, Direktor des Realgymnasiums zu Güstrow. Fünfte Auflage. Mit einer Figurentafel. Wismar 1891. Hinstorff. 24 S.

Der vorliegende Leitfaden umfasst diejenigen Teile der ersten Elemente der Planimetrie, welche auf Ausbildung der Anschauung gerichtet sind, jedoch ohne die Entwickelung des logischen Vermögens je aus dem Auge zu verlieren. Es gibt Definitionen, Lehrsätze und Aufgaben. Die Lehrsätze sind ohne Beweise aufgestellt, doch ist die Möglichkeit der Beweisführung überall vorgesehen. Auch in der Lehre von der Congruenz und Symmetrie, welche

allerdings auf Gebiete von unbegrenzter Ausdehnung übergreift und daher leicht zu vager Betrachtungsweise verleitet, ist durch die sich anschliessende Anwendung auf Dreiecke der Weg zur logischen Controle offen gehalten. Fragen und Uebungsaufgaben folgen auf jeden Abschnitt. H.

Lehrbuch der ebenen Geometrie für höhere Schulen. Von H. Bensemann, Gymnasiallehrer in Cöthen. Dessau 1892. Paul Baumann. 118 S.

Der Verfasser rechtfertigt in der Vorrede die Ausgabe dieses neuen Lehrbuchs durch die selbständig gewählten didaktischen Grundsätze der Bearbeitung. Ist nun gleich die ernstliche Erwägung der Methode und der Versuch ihrer Besserung an sich als verdienstvolles Unternehmen anzuerkennen, so kann man doch schwerlich der getroffenen Auskunft beistimmen. Welche Erfahrungen etwa der Verfasser zugunsten seiner Wahl aufweisen kann, müssen wir ihm überlassen; nach natürlichem Urteil erscheint das Abgehen vom Gewöhnlichen als keine Besserung. Dies betrifft namentlich 2 Eigentümlichkeiten. Erstens werden die Lehrsätze nicht vor dem Beweise aufgestellt, sondern folgen als Resultate auf vorausgehende Untersuchung. Hiermit steht zweitens in naher Verbindung die Meidung der indirecten Beweise. Die erstere Abweichung vom gewöhnlichen Verfahren erschwert offenbar das Verständniss; denn sie mutet dem Schüler zu, einer Untersuchung zu folgen, deren Zweck er nicht kennt. Allerdings entspricht die Anordnung dem natürlichen Gange wissenschaftlicher Forschung, aber nicht der Aneignung notwendiger Kenntnisse und Fähigkeiten. Da ein erst nachfolgender Satz nicht wol durch indirecten Schluss vorher begründet werden kann, so ist die Verwerfung der indirecten Beweise nur Consequenz der beliebten Begründungsform. Motivirt wird sie mit keinem Worte. Auch ist kein Grund zu ersehen, warum der indirecte Beweis weniger instructiv sein sollte als der directe. Im Gegenteil hat er einen wichtigen Vorzug: er zeigt auf die leichteste Weise die Bedeutung des Beweises als eines exact logischen Actes, während der directe Beweis stets Schlüsse vom Lehrer dictirt vorbringt, die der Schüler acceptiren muss, sofern er im Augenblicke nichts einzuwenden weiss, so dass das Beweisen sich nicht wesentlich unterscheidet vom Ueberreden und Annehmlich-machen. Könnten wir diese zwei Punkte, die der Verfasser gar nicht in den Vordergrund stellt, von seinem Hauptgesichtspunkt trennen, so würde das Ganze als ein gutdurchdachtes einheitliches System den besten Eindruck machen. Es ist ihm darum zu tun, dass der Schüler mit keinen räumlichen Gegen-

ständen beschäftigt werde, ohne sie vor sich zu sehen, ohne sie zeichnen zu können; diesen Gedanken sucht er nun zu verwirklichen ohne die Euklidischen Errungenschaften preiszugehen. Der darauf verwandte Fleiss und das bewiesene Geschick sind achtunggebietend.

H.

Lehrbuch der Elementar-Geometrie. Von Dr. E. Glinzer, Lehrer der Allgemeinen Gewerbeschule und der Schule für Bauhandwerker in Hamburg. Erster Teil: Planimetrie. Mit 207 Figuren und einer Sammlung von 300 Aufgaben. Vierte, verbesserte und vermehrte Auflage. Dresden 1891. Gerhard Kühtmann. 123 S.

Die erste Auflage ist im 258. litt. Bericht, S. 19 besprochen. In den folgenden Auflagen ist der Lehrstoff nach manchen Seiten hin vermehrt worden; dagegen ist nichts dafür getan, den niedern Standpunkt des Unterrichts zu heben: in der Proportionslehre wird noch immer der Fall der Incommensurabilität stillschweigend übergangen; das Stillschweigen lässt vermuten, dass der Verfasser nicht auf Bewilligung rechnen zu können glaubt, wenn er eine so unwissenschaftliche Behandlung verteidigen wollte. Hoppe.

Leitfaden der Elementar-Mathematik. Herausgegeben von Prof. Dr. H. Lieber, Oberlehrer am Friedrich-Wilhelm-Realgymnasium in Stettin, und F. von Lühmann, Oberlehrer am Gymnasium in Königsberg i. d. Neumark. Erster Teil: Planimetrie. Mit 7 Figurentafeln. Achte Auflage. — Dritter Teil: Ebene Trigonometrie, Stereometrie, Sphärische Trigonometrie, Propädeutischer Unterricht in der Körperlehre. Mit 3 Figurentafeln. Sechste Auflage. — Berlin 1892. Leonhard Simion. 124 + 102 S.

Das Lehrbuch gehört zu denjenigen, welche den Lehrstoff der Elementarmathematik nicht auf die notwendigen Grundlagen beschränken, alle weitern Folgerungen als Uebungsstoff behandeln wollen, sondern gleich von Anfang in ergibigster Weise zu entfalten, und dadurch den Schüler mit der mathematischen Praxis vertraut zu machen streben. Hierbei geht es in Systematik, Deduction und exactem, concinnem Ausdruck selbständig vor und stellt inveterirte Misbräuche ab. Nur in Betreff des Parallelensatzes hat der Verfasser sich noch nicht entschlossen die wissenschaftliche Wahrheit zu bekennen; er zeigt vielmehr seine Ueberlegenheit in der logischen Zauberkunst, welche das Axiom in strenge Folgerung verwandelt, dadurch, dass er alte Künste verschmäht und aufdeckt, während er seine Fehler um so weniger durchschauen lässt. Der Begriff der

Richtung, den die gemeinen Zauberer im dunkeln lassen, wird correct erklärt; doch dessen Relativität bei der Anwendung nur einseitig beachtet. Das (von einem andern Autor wirklich proclamirte) Motiv zur Uebung solcher Täuschungskunst charakterisirt sich durch einen Rückblick auf 1820, wo noch die Meinung existirte, dass zur Erweckung des Interesses an der Naturgeschichte in den Lehrbüchern die fabelhaften Tiere nicht fehlen dürften; der analogen Meinung in Betreff der Beweise des Parallelensatzes in Lehrbüchern der Elementargeometrie begegnet man noch gegen Ende des 19. Jahrhunderts. — In den ersten Teil sind die Lehren von der harmonischen Teilung, der Potentialität und den Kegelschnitten aufgenommen, und zwar der Coordinatenbegriff erst in der neuen Auflage.

Der 3. Teil unterscheidet sich dadurch vom ersten, dass keine Ausdehnung über die Hauptlehren hinaus mehr vorkommt; umsomehr ist durch Uebersichtlichkeit dafür gesorgt, dass der Schüler das Erlernte leicht beherrschen kann. Was über das exacte Zuwerkegehen gesagt ist, gilt auch hier. In der neuen Auflage musste namentlich bei der Körperberechnung gemäss neuen Vorschriften manches geändert und hinzugefügt werden. Was in dieser Hinsicht geschehen ist, hat durchaus nur Billigung zu erwarten.

Hoppe.

Elemente der ebenen Trigonometrie. Zum Schulgebrauch und zum Selbststudium dargestellt von Emil Hribar, Professor in Teschen. Mit 44 Abbildungen. Freiburg i. Br. 1892. Herder. 99 S.

Um bald zur Anwendung der Winkelfunctionen zu gelangen, ist das Buch in 2 Teile geteilt. Der erste betrachtet nur spitze Winkel ohne Addition, rechtwinklige und gleichschenklige Dreiecke, dabei regelmässige Vielecke, der zweite dehnt die Theorie auf grössere Winkel und beliebige Dreiecke aus und ergänzt sie im übrigen. Die Aufgaben sind teils ausführlich gelöst, teils mit Resultaten aufgestellt. Es wird besonders auf die Fälle sehr kleiner Winkel Rücksicht genommen.

H.

Elemente der Trigonometrie zum praktischen Gebrauch für Unterrichtszwecke an mittleren, technischen Lehranstalten. Von Jentzen, Direktor der Baugewerk-Tischler-Maschinen- und Mühlenbau-Schule. Mit 36 Figuren. Dresden 1891. Gerhard Kühtmann. 52 S.

Ein neues Lehrbuch der Trigonometrie hielt der Verfasser, wie das Vorwort sagt, für notwendig, weil die vorhandenen Lehrbücher die praktischen Bedürfnisse des Technikers nicht genügend berücksichtigten. Worin diese bestehen, wird nicht erklärt, die Erklärung kommt über das Wort „praktisch" nicht hinaus. Die Ausführung lässt für gründliche theoretische Ausrüstung nichts vermissen und enthält auch nichts, was für Gymnasialunterricht weniger brauchbar wäre. Unterscheidend für das Gegenwärtige ist vielmehr, dass es sich streng an die Natur des Gegenstandes, an seine Bedeutung und Stellung unter den Zweigen der Mathematik hält, wenn es durch die Bestimmung für Techniker mehr genötigt gewesen sein mag, als der Gymnasialunterricht es erfordert. Die Trigonometrie ist für die niedere Mathematik ein praktisches Fach, für die höhere eine Specialität. Demgemäss wird sie hier mit geringstem Wertaufwand, jedoch ohne irgend eine Lehre, seien es specielle Angaben oder allgemeine Relationen, zu übergehen, nahezu tabellarisch behandelt. Auf diese Weise erscheint das Gebiet der Lehre nicht grösser als es in Wirklichkeit ist, und kann leicht vollkommen beherrscht werden. Aufgaben begleiten stets den Vortrag. Am Schlusse steht eine Tafel (3 stellig) der trigonometrischen Zahlen; die logarithmische Rechnung wird gleichfalls in Anwendung gebracht. H.

Lehrbuch der Stereometrie zum Gebrauche bei dem Unterrichte in Gymnasien und Realschulen. Von Oberstudienrath Dr. von Nagel, Ritter 1. Cl. des kgl. württemb. Kronenordens und des kgl. Württemb. Friedrichsordens. Mit vielen dem Text beigedruckten Holzschnitten. Fünfte, vermehrte Auflage, herausgegeben von Th. Schröder, Professor der Mathematik und Physik am kgl. alten Gymnasium zu Nürnberg. Nürnberg 1892. Friedr. Korn. 132 S.

Die 4. Auflage, vom Verfasser selbst herausgegeben, ist im 236. litt. Bericht, S. 41 besprochen. Aenderungen und Hinzufügungen sind in der Vorrede des Herausgebers der neuen Auflage nicht angezeigt, mithin von ihm nicht als erheblich erachtet. H.

Raumlehre für höhere Schulen. Von Prof. H. C. E. Martus, Direktor des Sophien-Realgymnasiums in Berlin. 2. Teil. Dreiecksrechnung und Körperlehre. Bielefeld und Leipzig 1892. Velhagen u. Klasing. 259 S.

Die Art des Vortrags ist vergleichbar einer Excursion einer Schulclasse. Freilich ist hier der Lehrer nicht gebunden an die Gegenstände, welche ihr auf der Wanderung und am besuchten Orte

Natur und Technik zur Betrachtung darbieten, sondern er führt solche nach freiem Ermessen vor, wie sie sich eignen die ganze Doctrin in bester Ordnung daran zu entwickeln; die receptive Lage der Schüler, in Verbindung mit den daran sich knüpfenden Aufgaben und Fragen, ist in beiden Fällen dieselbe. Ueber die Anordnung der Stereometrie, welcher die ebene Trigonometrie vorangeht, ist zu bemerken, dass die Hauptabschnitte bilden 1) die Lage der Geraden und Ebenen, 2) die Körper, 3) ihre Oberflächen. Der erste wird geteilt nach der Anzahl der Ebenen. Der dritte enthält die sphärische Geometrie, einschliessend die Trigonometrie, und die Kegelschnitte als konische Geometrie. Zur Verdeutschung der Terminologie, für welche der 2. Teil der Raumlehre neue Beiträge liefert, möchte zu bemerken sein, dass auf Adjectivbildung keine Rücksicht genommen ist. Dem Vorgang der Holländer, dem gemäss er Wörter wie „dreiecksrechnerisch" = „trigonometrisch" hätte einführen dürfen, hat der Verfasser nicht folgen wollen; entbehren kann man die directe Ableitung, aber man gibt nicht gern eine Handhabe weg, die man früher besessen hat. Hoppe.

Synthetische Geometrie der Kegelschnitte nebst Uebungsaufgaben für die Prima höherer Lehranstalten. Von Dr. J. Lange; Oberlehrer an der Fr. Werd. Ober-Realschule in Berlin. Mit 55 Figuren im Text. Berlin 1893. H. W. Müller. 68 S.

Voraus geht die Lehre von der harmonischen Teilung. dann folgen Ellipse, Hyperbel, Parabel erst einzeln definirt durch ihre Focaleigenschaft, dann hergeleitet als Schnitte des geraden Kegels, ihre Secanten, Tangenten, Leitlinien, ihre stetige Variation und Grenzformen; dann die Polaritätsbeziehungen, conjugirten Durchmesser, Inhaltsbestimmungen, projectiven und involutorischen Beziehungen. Dann folgen Aufgaben. H.

Mathematische und physikalische Bibliographie.

XXXIX.

Geschichte der Mathematik und Physik.

Berlet, B., Adam Riese, sein Leben, seine Rechenbücher u. seine Art zu rechnen. Die Coss v. Adam Riese. Mit dem Brustbild u. der Handschrift v. Adam Riese. Frankfurt a./M., Kesselring'sche Hofbuchh., Verl. 1 Mk. 20 Pf.

Fortschritte, die, der Physik im J. 1886. Dargestellt v. der physikal. Gesellschaft zu Berlin. 42. J. 3. Abth., enth.: Physik der Erde. Red. v. B. Schwalbe. Berlin, Georg Reimer. 24 Mk.

Graf, J. H., Das Leben u. Wirken d. Physikers u. Astronomen Johann Jakob Huber aus Basel. (1733—1798.) Mit dem Bildnisse Hubers u. 1 Taf., seine v. ihm erfundene freie Uhrhemmung darstellend. Bern, Wyss, Verl. 1 Mk.

Heinze, R., Xenocrates. Darstellg. der Lehre u. Sammlg. der Fragmente. Leipzig, Teubner. 5 Mk. 60 Pf.

Jahrbuch der Erfindungen u. Fortschritte auf den Gebieten der Physik u. Chemie, der Technologie u. Mechanik, der Astronomie u. Meteorologie. Hrsg v. H. Gretschel, G. Bornemann, A. Berberich u. O. Müller. 28. Jahrg. Leipzig, Quandt & H. 6 Mk.

Jahrbuch üb. die Fortschritte der Mathematik. Hrsg. v. E. Lampe. 21. Bd. Jahrg. 1889. 3. Hft. Georg Reimer. 13 Mk.

Müller, F., Zeittafeln zur Geschichte der Mathematik, Physik u. Astronomie bis zum J. 1500, mit Hinweis auf die Quellenlitteratur. Leipzig, Teubner. Geb. in Leinw. 2 Mk. 40 Pf.

Neteler, B., Stellung der alttestamentlichen Zeitrechnung in der alt-historischen Geschichte. 1. Untersuchung der assyrisch-alttestamentlichen Gleichzeitigkeiten. Münster, Theissing. 50 Pf.

Rudio, F., Archimedes, Huygens, Lambert, Legendre. Vier Abhandlungen üb. die Kreismessg. Deutsch hrsg. u. m. e. Uebersicht üb. die Geschichte d. Problems v. der Quadratur d. Zirkels, von den ältesten Zeiten bis auf unsere Tage, versehen. Leipzig, Teubner. 4 Mk.

Methode und Principien.

Arndt, R., Bemerkungen üb. Kraft u. auslösende Kraft im Besonderen. Greifswald, Abel. 1 Mk. 30 Pf.

Flor, O., Lösung d. Problems: die Quadratur d. Kreises. Berichtigung der Zahl π. Riga, Stieda's Verl. 3 Mk.

Lehrbücher.

Féaux, B., Rechenbuch u. geometr. Anschauungslehre zunächst f. die drei unteren Gymnasialklassen. 9. Aufl., besorgt durch F. Busch. Paderborn, Schöningh. 1 Mk. 20 Pf.

Haller v. Hallerstein, F. Baron, Lehrbuch der Elementar-Mathematik. 10. Aufl. Hrsg. u. erweitert v. B. Hülsen. 1. Tl. Arithmetik. Berlin, Nauck & Co. 4 Mk. 20 Pf.; geb. 4 Mk. 80 Pf.

Hülsen, B., u. Coler, niedere Mathematik m. Anwendungen u. Beispielen. Zum Gebrauch auf den königl. Kriegsschulen bearb. Auf Veranlassg. der General-Inspection d. Militär-Erziehungs- u. Bildungswesens. Berlin, Mittler & S. 3 Mk.; geb. 3 Mk. 50 Pf.

Sonne, J., u. Th. Sänger, mathematische Repetitionshefte im Anschluss an die neuen Lehrpläne höherer Unterrichtsanstalten. I. u. II. Hft. (Doppelhft.) Marburg, Ehrhardt's Univ.-Buchh. 1 Mk. 20 Pf.

Sammlungen.

Donadt, A., Rechenbuch f. höhere Schulen. 1. Hft. Leipzig, Reisland. 1 Mk.

Fonkner, H., arithmetische Aufgaben. Mit besond. Berücksicht. v. Anwendgn. aus dem Gebiete der Geometrie, Trigonometrie, Physik u. Chemie. Zum Schulgebrauch, sowie zum Selbstunterricht bearb. Ausg. A.: Für Gymnasien, Realgymnasien u. Oberrealschulen. Pensum der Prima. Braunschweig, Salle. 2 Mk.; geb. 2 Mk. 40 Pf.

Georling's Rechenbuch, Hand- u Hilfsbuch f. höhere u. Subalternbeamte, Militäranwärter u. Praktikanten, welche zum Zwecke ihrer Anstellung od. Beförderg. in höheren Amtsstellgn. e. Prüfung im Rechnen abzulegen haben. 12. Aufl. Leipzig, F. A. Berger. Geb. 2 Mk.

Heller, J. F., metbodiscb geordnete Sammlung v. Aufgaben u. Beispielen aus der darstellendeu Geometrie f. Realscbulcu. II. Tbl. Für die 6. Classe. Wien, Hölder. 1 Mk. 52 Pf.

Henner's, J. F., Aufgabeu znm Kopf- u. Zifferrcchuen m. den Ergobnissen. Ausg. f. Lobrer. Hft. C. Für die Oberklassen. 9. Aufl. Anshach, Seyhold's Bncbb. 80 Pf.

— Dasselbe. Ansg. f. Schüler. Hft. A—C. Ehd. à 20 Pf.

— Recben-Aufgaben. Mit gleicbmäss. Berücksicht. d. Kopf- u. Zifferrecbnens. Ausg. f. Scbüler. 7. Hfte. Ebd. à 20 Pf.

Immel, K., Aufgabeu f. das gemeinscbaftliche Schuellrechneu. 5. Aufl.. München, Oldeubourg. Kart. 60 Pf.

Jnng, W.,' Rechenbucb f. Fortbildungsschnlen. Scbüler-Ausg. 2 Tle. Reutlingen, Kocher's Bncbh. 1 Mk. 10 Pf.

Kleyer, A.. vollständig gelöste Aufgahen-Summlung aus allen Zweigen der Recbenkunst, der niederen u. höheren Matbematik, der Pbysik etc. 1148.—1177. Hft. Stuttgart, Jnl. Maier. à 25 Pf.

Lettau, O., algebraische Aufgaben. 7. Aufl. Langensalza, Scbulbncbbdlg. v. Gressler. 2 Mk. 70 Pf.

Matek, B., Resnltate zur Anfgabensammlung in Močnik's Lchrbuch der Arithmetik u. Algebra f. die oher eu Classen der Mittolschulen. 2. Aufl. Wieu, C. Gerold's Sohn. Kart. 1 Mk. 80 Pf.

Mayer, J., Summlnng v. aritbmetiscben Anfgabeu m. den notwendigsten Definitioueu n. Gesetzen. 3. Aufl. (2. Aufl. der P. Luthor'scben Aufgabensammlung.) Regensburg, Pustet. 2 Mk., Einhd. 30 Pf.; Resultate dazu 1 Mk.

Roeder, H., Aufgaben aus der eheuon Trigonometrie. Anflösungen. Breslau, Ferd. Hirt, Verl.-Bucbb. 1 Mk. 25 Pf.

Scbellen, H., Anfgaben f. das theoretiscbe u. praktische Recbnen. I. Tl. Zum Gebraucbe beim Recbennuterricbte f. die Scbüler der Gymnasien, Realgymnasien, Oberrealscbulen, Realscbnlen, Semiuarien u. andern höhern Lebranstalten ähnl. Richtg. 23. Aufl., bearb v. H. Lemkes. Münster, Coppenratb'scbe Bucbb. 2 Mk.; Einhd. 25 Pf.

Scbürmanu, F., n. F. Windmoeller, Rechenbuch f. gewerhl. n. kaufmäunische Fortbildungsscbulen. 1. Tl. 2. Aufl. Essen, Bädeker, Verl. Geb. 1 Mk.; Anflösgn. 30 Pf.

Stegmanu, M., Tabelle der wicbtigsten Formeln aus der Differential-Rechnung. 6. Aufl. Hrsg. v. L. Kiepert. Hannover, Helwing. 50 Pf.

Steuer, W., eine Sammlnng angewandter Aufguben f. das Kopfrecbnon, nebst ausführl. Lebrgang f. Kopf- u. scbriftl. Recbnon. 2. Hft. 4. Aufl. Breslau. Woywod, Vcrl. 1 Mk. 50 Pf.

Stockmayer, H., u. M. Fetscher, Aufgaheu f. den Recbenunterricht in deu mittleren Klassen der Gelehrtenscb uleu, der Real-

schulen u. verwandter Lehranstalten. 3 Bdchn. f. 12—13 jähr. Schüler (V. Klasse). 6. Aufl. Stuttgart, Bonz & Co. Kart. 70 Pf.

Tunica's, G. F., Rechenaufgaben f. Schulen. 2. Bd. 6. Aufl., bearb. v. H. Töpke u. E. Oppermann. Braunschweig, Grüneberg's Buchh. 1 Mk. 30 Pf.

Tabellen.

Schnellinger, J., fünfstellige Logarithmen f. die Zehner, Logarithmen der natürlichen u. trigonometrischen Zahlen. Wien, Manz, Verl. Geb. in Leinw. 3 Mk.

Tafel zur Umwandlung v. Graden Réaumur (R) in Grade der hundertteiligen Thermometerskala (C) u. umgekehrt. Hrsg. auf Veranlassg. der physikalisch-techn. Reichsanstalt. Berlin, Stankiewicz. 10 Pf.

Arithmetik, Algebra und reine Analysis.

Bachmann, P., die Elemente der Zahlentheorie. Leipzig, Teubner. 6 Mk. 40 Pf.

Brathuhn, O., Katechismus der Markscheidekunst. Leipzig, J. J. Weber. Geb. in Leinw. 3 Mk.

Gegenbauer, L., üb. den grössten gemeinsamen Theiler. Leipzig, Freytag. 1 Mk. 40 Pf.

— über die aus den 4 Einheitswurzeln gebildeten primären ganzen complexen Zahlen. Ebd. 70 Pf.

Haas, A., Lehrbuch der Differentialrechnung. 2. Tl. Die vollständ. Differentiation entwickelter u. nicht entwickelter Funktionen v. e. u. v. mehreren reellen Veränderlichen, Reihenentwickelungen, unbestimmte Formen, Maxima u. Minima. Bearb. nach System Kleyer. Stuttgart, Jul. Maier. 8 Mk.

Klein, F., Vorlesungen üb. die Theorie der elliptischen Modulfunctionen ausgearb. u. vervollständigt v. R. Fricke. 2. Bd. Fortbildung u. Anwendg. der Theorie. Leipzig, Teubner. 24 Mk.

Kniess, K., Lehrbuch der Arithmetik f. Real- u. Lateinschulen. 1. Tl. 4. Aufl. München, Kellerer. 1 Mk.

Maier, J. G., Lehrbuch der Elementar-Arithmetik zum Gebrauch an Schulen, Lehrerbildungsanstalten u. beim Selbstunterricht. II. Tl. Das Rechnen m. algebr. Zahlengrössen. 2. Aufl. Stuttgart, Gundert. 4 Mk. 80 Pf.

Metzger, C., Lehrbuch der Gleichungen 3. u. 4. Grades, nebst der trigonometr. Auflösg. der Gleichgn. 2. Grades. Bearb. nach System Kleyer. Stuttgart, Jul. Maier. 6 Mk.

Močnik, F. Ritter v., Lehrbuch der Arithmetik u. Algebra, nebst e. Aufgaben-Sammlg. f. d. oberen Classen der Mittelschulen.

24. Aufl. Wien, C. Gerold's Sohn, Verl. Geh. in Leinw. 3 Mk. 70 Pf.

Molien, Th., üb. Systeme höherer complexer Zahlen. Diss. Dorpat, Karow, Verl. 2 Mk.

Ohenrauch, F. J., zur Transformation u. Reduction v. Doppelintegralen mittelst elliptischer Coordinaten. Progr. Neutitschein, Hölzel's Nachf. 2 Mk.

Prym, F., üb. orthogonale, involutorische u. orthogonal-involutorische Substitutionen. Göttingen, Dieterich'sche Verl.-Buchh. 2 Mk. 60 Pf.

Rogel, F., zur Theorie der höheren Integrale. Prag, Řivnáč, Verl. 40 Pf.

Rost, G., Untersuchungen üb. die allgem. lineare Substitution, deren Potenzen e. endl. Gruppe bilden. Leipzig, Teubner. 1 Mk. 20 Pf.

Saalschütz, L., Vorlesungen üb. die Bernoulli'schen Zahlen, ihren Zusammenhang m. den Secanten-Coefficienten u. ihre wichtigeren Anwendungen. Berlin, Springer. 5 Mk.

Scheffler, H., die quadratische Zerfällung der Primzahlen. Leipzig, Fr. Foerster. 3 Mk.

Staudacher, H., Lehrbuch der Kombinatorik. Ausführliche Darstellg. der Lehre v. den kombinator. Operationen (Permutieren, Kombinieren, Variieren). Nach System Kleyer bearb. Stuttgart, Jul. Maier. 6 Mk.

Stegemann, M., Grundriss der Differential- u. Integral-Rechnung. I. Thl.: Differential-Rechnung. 6 Aufl., hrsg. v. L. Kiepert. Hannover, Helwing. 12 Mk.; Einbd. 1 Mk.

Weichold, G., Lehrbuch der Determinanten und deren Anwendungen. 1. Tl. Bearb. nach System Kleyer. Stuttgart, Jul. Maier. 10 Mk.

Geometrie.

Ehneter, K., Leitfaden f. den Unterricht in der Geometrie an Sekundarschulen. 1. Hft. St. Gallen, Huber & Co. Kart. 1 Mk. 20 Pf.; Schlüssel dazu. 40 Pf.

Erler, W., Einleitung in die analytische Geometrie u. in die Lehre v. den Kegelschnitten. 2. Aufl. Berlin, Dümmler's Verl. 1 Mk.

Gandtner, J. O., Elemente der analytischen Geometrie, f. den Schulunterr. bearb. 8. Aufl. Hrsg. v. E. Grahl. Berlin, Weidmann'sche Buchh. 1 Mk. 20 Pf.

Genau, A., Leitfaden der elementaren Geometrie f. Lehrer-Seminarien. 7. Aufl. Büren, Hagen. Geh. 2 Mk. 60 Pf.

Jackwitz, E., Hauptsätze der Stereometrie, f. den Schulgebrauch zusammengestellt. Schrimm, Schreiber. 60 Pf.

Küpper, C., geometrische Betrachtungen auf Grundlage d. Functionentheorie. Prag, Rivnáč, Verl. 40 Pf.

Močnik, F. Ritter v., Lehrbuch der Geometrie f. Lehrerbildungsanstalten. 3. Aufl. Wien, Gerold's Sohn, Verl. Geb. in Leinw. 2 Mk.

Reye, Th., Geometrie der Lage. Vorträge. 2. u. 3. Abth. 3. Aufl. Leipzig, Baumgärtner. 15 Mk.; Einbde. in Halbfrz. à 2 Mk.

Rüefli, J., Anfang zu den kleinen Lehrbüchern der Geometrie. Bern, Schmid, Francke & Co., Verl. 40 Pf.

Sachs, J., Lehrbuch der ebenen Elementar-Geometrie (Planimetrie). 5. Tl.: Die Flächen der geradlin. Figuren. Mit 96 Fig. Bearb. nach System Kleyer. Stuttgart, Jul. Maier. 4 Mk.

Schlotke, J., Lehrbuch der darstellenden Geometrie. 1. Tl. Specielle darstell. Geometrie. 2. Aufl. Dresden, Gerh. Kühtmann. 3 Mk. 60 Pf.; geb. 3 Mk. 80 Pf.

Schmidt, Ph., O. Kerl u. K. Wenzel, Raumlehre m. zahlreichen Rechen- u. Konstruktionsaufgaben f. Handwerker- u. Fortbildungsschulen. 2 Tle. Hannover, Meyer. 85 Pf.

Sobotka, J., üb. Krümmung u. Indicatricen der Helikoide. Leipzig, Freytag. 1 Mk.

Stuhlmann, A., Zirkelzeichnen u. Projektionslehre zum Gebrauche an Gewerbe- u. Bauschulen, gewerblichen Fortbildungsschulen u. s. w. Allg. Tl. 15. Aufl. Dresden, Gerh. Kühtmann. 1 Mk.

Wehner, H., Leitfaden f. den stereometrischen Unterricht an Realschulen. Leipzig, Teubner. Kart. 80 Pf.

Trigonometrie.

König, J., ebene Trigonometrie. Zum Gebrauch in Fortbildungs-, Handwerker- u. Abendschulen, sowie zum Selbstunterricht. Braunschweig, Salle. 75 Pf.

Vega's, G. Frhr. v., logarithmisch-trigonometrisches Handbuch. Neue Ausg. Bearb. v. C. Bremiker. 74. Aufl. v. F. Tietjen. Berlin, Weidmann'sche Buchh. 4 Mk. 20 Pf.

Praktische Geometrie, Geodäsie.

Gauss, F. G., die trigonometrischen u. polygonometrischen Rechnungen in der Feldmesskunst. 2. Aufl. 4.—7. Hft. Halle, Strien, Verl. à 3 Mk. 50 Pf.

Kalender f. Messkunde auf d. J. 1893. Hrsg. v. M. Clouth. 20. Jahrg. (2 Thle.) 1. Thl. Trier, Lintz'sche Bnchh. 1 Mk. 40 Pf.; geb. in Leinw. 2 Mk.; in Ldr. 2 Mk. 60 Pf.

Mechanik.

Finger, J., üb. die gegenseitigen Beziehnngen gewisser in der Mechanik m. Vortheil anwendbaren Flächen 2. Ordnung, nebst Anwendgn. anf Probleme der Astatik. Leipzig, Freytag. 80 Pf.

Mach, E., Ergänznngen zu den Mittheilungen üb. Projectile. Ebd. 30 Pf.

Margules, M., Lnftbewegungen in e. rotirenden Sphäroidschale bei zonaler Druckvertheilung. Ebd. 60 Pf.

Technik.

Epstein, J., Ueberblick üb. die Elektrotechnik. 6 populäre Experimental-Vortr. Frankfurt, Alt. 1 Mk. 50 Pf.

Fischer-Hinnen, J., die Berechnung u. Wirkungsweise elektrischer Gleichstrom-Maschinen. Praktisches Handbuch f. Elektrotechniker u. Maschinentechniker. 2. Aufl. Zürich, Meyer & Z. 4 Mk. 60 Pf.

Grawinkel, C., u. K. Strecker, Hilfsbuch f. die Elektrotechnik. 3. Aufl. Berlin, Springer. Geb. in Leinw. 12 Mk.

Hein, C., die Accumulatoren f. stationäre elektrische Beleuchtungsanlagen. Leipzig, Leiner. 2 Mk.; geb. in Leinw. 2 Mk. 50 Pf.

Kalender f. Elektrotechnik pro 1893. Bearb. v. J. Krämer. 7. Jahrg. Wien, Perles' Verl.; geb. in Leinw. 3 Mk.; geb. in Ldr. 4 Mk. 40 Pf.

Kalender f. Elektrotechniker. Hrsg. v. F. Uppenborn. 10. Jahrg. 1893. München, Oldenbourg. Geb. in Leder. 4 Mk.

Kittler, E., Handbuch der Elektrotechnik. (3 Bde.) 1. Bd. 2. Aufl. Stuttgart, Enke. 40 Mk.

Kral, J., Elemente d. Staats-Telegraphendienstes. 18. Aufl. Wien, Gerold & Comp. 4 Mk.

Krieg, M., Taschenbuch der Elektrizität. Ein Nachschagebuch u. Ratgeber f. Techniker, Praktiker, Industrielle u. techn. Lehranstalten. Leipzig, Leiner. Geb. in Leinw. 4 Mk.

Pawel, J., die physikalischen u. technischen Doctrinen d. Telegraphen-Dienstes. Ein Hülfsbuch zur Vorbereitg. f. die Verkehrs- u. Amtsleiter-Prüfg. Physikalischer Thl 1. Hft. Brünn, Winkler's Buchh. 2 Mk. 80 Pf.

Reuleaux, F., die sogenannte Thomas'sche Rechenmaschine. Für Mathematiker, Astronomen, Ingenieure, Versicherungs-Gesellschaften u. Zahlenrechner überhaupt. 2. Aufl. Leipzig, Felix. 2 Mk.

Ritter, A., Lehrbuch der technischen Mechanik. 6. Aufl. Leipzig, Baumgärtner. 18 Mk.; Einbd. in Halbfrz. 2 Mk.

Rundschau, elektrotechnische. Chefred.: G. Krebs. 10 Jahrg. 1892/93. (24 Nrn.) Nr. 1. Frankfurt a/M., Dauhe & Co. Halbjährlich 4 Mk.

Thompson, S. P., die dynamoelektrischen Maschinen Ein Handbuch f. Studirende der Elektrotechnik. 4. Aufl. Deutsche Uebersetzg. v. C. Grawinkel. 2.—4. Hft. Halle, Knapp. à 2 Mk.

Vogler, A., Jedermann Elektrotechniker. Anleitung zur Herstellg. der hauptsächlichsten elektr. Apparate u. elektr. Leitgn. 2. Bdchn.: Die Wechselströme. Leipzig, Moritz Schäfer. 1 Mk. 20 Pf.

Optik, Akustik und Elasticität.

Kayser, H., u. C. Runge, üb. die Spectren der Elemente. 6. Abschn. Berlin, Georg Reimer. Kart. 2 Mk.

Kriemler, C. J., aus der Festigkeitslehre. Der Spannungszustand in den Punkten e. geraden Stabes bei den 4 einfachen Fällen der Beanspruchg. Dargestellt zur Einführg. in das Studium der Festigkeitslehre. Vevey, Roth's Verl. 4 Mk.

Undeutsch, H., Spannungen aufgehängter prismatischer Körper, hervorgerufen durch statische u. dynamische Beanspruchungen. Freiberg, Craz & G. 2 Mk.

Erd- und Himmelskunde.

Bauschinger, J., Untersuchungen üb. den periodischen Kometen 1889 V. (Brooks). 1. Thl. Definitive Bahnbestimmg. d. Hauptkometen aus der Erscheing. 1889 bis 1891 München, Franzscher Verl. 5 Mk.

Beobachtungsergebnisse der königl. Sternwarte zu Berlin. 6. Hft. Berlin, Dümmler's Verl.-Buchh. 4 Mk.

— dasselbe. 2 Serie. I Bd. Ebd. 12 Mk.

Catalog der Astronomischen Gesellschaft. 1. Abth. Catalog der Sterne bis zur 9. Grösse zwischen 80° u. 2° südl. Declination f. das Aequinoctium 1875. 5. Stück. Leipzig, Engelmann. 17 Mk.

Elster, J., u. H. Geitel, Beobachtungen d. atmosphärischen Potentialgefälls u. der ultravioletten Sonnenstrahlung. Leipzig, Freytag. 3 Mk. 20 Pf.

Falb's Kalender der kritischen Tage 1893 m. Bezug auf

Witterungserscheinungen, Erdbeben u. Schlagwetter in den Bergwerken. Wien, Hartleben. 1 Mk. 50 Pf.

Günther, S., Grundlehren der mathematischen Geographie u. elementaren Astronomie, f. den Unterricht bearb. 3. Aufl. München, Theod. Ackermann, Verl. 2 Mk.

Haerdtl, E. Frhr. v., üb. zwei langperiodische Störungsglieder d. Mondes, verursacht durch die Anziehg. d. Planeten Venus. Leipzig, Freytag. 1 Mk. 60 Pf.

Himmel u. Erde. Illustr. naturwissenschaftl. Monatsschrift. Hrsg. v. der Gesellschaft Urania. Red.: M. W. Meyer. V. Jahrg. Octbr. 1892 bis Septbr. 1893. 1. Hft. Berlin, Herm. Paetel. Vierteljährlich 3 Mk. 60 Pf.

Jahrbuch, deutsches meteorologisches, Jahrg. 1891. Meteorologische Beobachtungen in Württemberg. Mittheilungen der m. dem königl. statist. Landesamt verbundenen meteorolog. Centralstation. Bearb. v. L. Meyer. Stuttgart, Metzler'sche Buchh, Verl. 3 Mk.

Jahrbuch, deutsches meteorologisches, f. 1892. Beobachtungssystem d. Königr. Preussen u. benachbarter Staaten. 1. Hft. Ergebnisse der meteorolog. Beobachtgn. im J. 1892. Hrsg v. dem königl. preuss. meteorol. Institut durch W. v. Bezold. Berlin, Asher & Co, Verl. 3 Mk.

Jahresbericht d. Centralbureaus f. Meteorologie u. Hydrographie im Grossherzogth. Baden, m. den Ergebnissen der meteorolog. Beobachtgn. u. der Wasserstandaufzeichngn am Rhein u. an seinen grösseren Nebenflüssen f. d. J. 1891. Karlsruhe, Braun'sche Hofbuchh. 6 Mk.

Kalender f. Geometer u. Kulturtechniker, hrsg. v. W. Schlobach. Jahrg. 1893. 2 Thle. Stuttgart, Wittwer's Verl. Geb. in Leinw. u. geh. 3 Mk. 50 Pf.; in Ldr. u. geh. 4 Mk.

Klein, H. J., Führer am Sternenhimmel für Freunde astronomischer Beobachtungen. Leipzig, E. H. Mayer. 8 Mk.; geb. 9 Mk.

Lohrmann, W. G., Mondkarte in 25 Sectionen u. 2 Erläuterungstaf., m. Erläutergn. u. selenograph. Ortsbestimmgn. hrsg. v. J. F. D. Schmidt. Neue wohlf. (Titel-) Ausg. m. e. Vorworte v. H. Ebert. Leipzig, Barth. In Mappe 25 Mk.

Nachrichten, astronomische. Hrsg.: A. Krueger. 131. Bd. No. 1. Hamburg, Mauke Söhne. Für den Band 15 Mk.

Newcomb-Engelmann's populäre Astronomie. 2. Aufl., hrsg. v. H. C. Vogel. Leipzig, Engelmann 13 Mk; Einbd. 2 Mk.

Pfoil, L., Graf v., die Lufthülle der Erde, der Planeten u. der Sonne. Berlin, Dümmler's Verl. 1 Mk.

Pick, A. J., die elementaren Grundlagen der astronomischen Geographie. Gemeinverständlich dargestellt. 2. Aufl. Wien, Manz, Verl. 2 Mk. 40 Pf.

Publikationen der v. Kuffner'schen Sternwarte in Wien (Ottakring). Hrsg. v. N. Herz. 2. Bd. Wien, Frick. 2 Mk.

Reis, P., Elemente der Physik, Meteorologie u. mathematischen Geographie. Hilfsbuch f. den Unterricht an höheren Lehranstalten. 5. Aufl. Quandt & H., Leipzig. 4 Mk. 50 Pf.

Repertorium f. Meteorologie, hrsg. v. der kaiserl. Akademie der Wissenschaften. Red. v. H. Wild. 15. Bd. Leipzig, Voss' Sort. 30 Mk. 90 Pf.

Scheiner, J., der grosse Sternhaufen im Hercules, Messier 13, nach Aufnahmen am Potsdamer Refractor. Berlin, Georg Reimer, 3 Mk. 50 Pf.

Stricker, S., üb. strömende Elektricität. Eine Studie. 1. Hälfte. Wien, Deuticke's Verl. 2 Mk. 50 Pf.

Weiss, E., Bilder-Atlas der Sternenwelt. 41 fein lith. Taf. nebst erklär. Texte u. mehreren Text-Illustr. Eine Astronomie f. Jedermann. Esslingen, Schreiber. Geb. 12 Mk.

Physik.

Annalen d. physikalischen Central-Observatoriums, hrsg. v. H. Wild. Jahrg. 1891. 2 Thle. Leipzig, Voss' Sort. 25 Mk. 60 Pf.

Barckhausen, H., einige Betrachtungen üb. Magnetismus u. Elektricität, ihre Wirkungen u. Wechselwirkungen m. e. Anh.: Betrachtgn. zum Ausbruch d. Krakatau. Bremen, v. Halem. 2 Mk.

Barus, C., die physikalische Behandlung u. die Messung hoher Temperaturen. Leipzig, Barth. 3 Mk.

Börner, H., Lehrbuch der Physik f. höhere Lehranstalten, sowie zur Einführung in das Studium der neueren Physik. Berlin, Weidmann'sche Buchh. 6 Mk.

Czermak, P., üb. oscillatorische Entladungen. Leipzig, Freytag. 40 Pf.

Echo, elektro-technisches. Chefred.: M. Krieg. 5. Jahrg. 1892. 40. Hft. Leipzig, Leiner. Vierteljährlich. 3 Mk.

Exler, K., üb. elektrische Kraftübertragung m. besond. Berücksicht. d. Wechsel- u. Drehstromes. Wien, Helf's Sort.-Buchh. 50 Pf.

Görtz, A., üb. spectrophotometrische Affinitätsbestimmungen. Diss. Tübingen, Moser'sche Buchh. 1 Mk.

Graetz, L., die Elektricität u. ihre Anwendungen. Ein Lehr- u. Lesebuch. 4. Aufl. Stuttgart, Engelhorn. 7 Mk.

Heerwagen, F., üb. e. neue Methode zur Messung der Dielectricitätsconstanten v. Flüssigkeiten. Diss Dorpat, Karow, Verl. 11 Mk.

Hermes, O., Elementarphysik, unter Zugrundelegg. d. Grundrisses der Experimentalphysik v. E. Jochmann u. O. Hermes f. den

Anfangsunterricht in höheren Lehranstalten bearb. Berlin, Winckelmann & Söhne. 2 Mk.; geb. in Leinw. 2 Mk. 50 Pf.

Heussi, J., Leitfaden der Physik. 13. Aufl. Bearb. v. H. Weinert. Braunschweig, Salle. 1 Mk. 50 Pf.

— dass. m. Anh.: die Grundbegriffe der Chemie. Von H. Weinert. Ebd. 1 Mk. 80 Pf.; Anh. allein 50 Pf.

Heydweiller, A., Hülfsbuch f. die Ausführung elektrischer Messungen. Leipzig, Barth. 6 Mk.; geb. 7 Mk.

Klemenčič, J., u. P. Czermak, Versuche üb. die Interferenz elektrischer Wellen in der Luft. Leipzig, Freytag. 1 Mk. 10 Pf.

Kolbe, H. J., Einführung in die Elektricitätslehre. Vorträge. I. Statische Elektricität. Berlin, Springer. 2 Mk. 40 Pf.; geb. in Leinw. 3 Mk. 20 Pf.

Noack, K., Leitfaden f. physikalische Schülerübungen. Ebd. 1 Mk. 20 Pf.

Recknagel, G., Lehrbuch der Physik zur ersten Einführung in das Studium derselben. 1. Bdchn. Bamberg, Buchner, Verl. Geb. in Leinw. 2 Mk. 40 Pf.

Revue, physikalische. Hrsg. v. L. Graetz. 1. Jahrg. 1892. 10. Hft. Stuttgart, Engelhorn. Vierteljährlich 8 Mk.

Riecke, E., Molekulartheorie der piëzoelektrischen u. pyroelektrischen Erscheinungen. Göttingen, Dieterich'sche Verl.-Buchh. 5 Mk.

Violle, J., Lehrbuch der Physik. Deutsche Ausg. v. E. Gumlich, L. Holborn, W. Jaeger, D. Kreichgauer, S. Lindeck. 1. Thl. Mechanik. 2. Bd. Mechanik der flüss. u. gasförm. Körper. Berlin, Springer. 10 Mk.; geb. 11 Mk. 20 Pf.

Waeber, R., Lehrbuch f. den Unterricht in der Physik m. besond. Berücksicht. der physikal. Technologie u. der Meteorologie. 7. Aufl. Leipzig, Hirt & Sohn. Geb. 3 Mk. 75 Pf.

Weber's, W., Werke. Hrsg. v. der königl. Gesellschaft der Wissenschaft zu Göttingen. (In 6 Bdn.) 1. u. 2. Bd. Berlin, Springer. 34 Mk.; Einbde. in Halbfrz. à 2 Mk. 50 Pf.

Wilke, A., die Elektricität, ihre Erzeugung u. ihre Anwendung in Industrie u. Gewerbe. Allgemein verständlich dargestellt. Leipzig, Spamer. 8 Mk.; geb. 9 Mk. 50 Pf.

Windisch, K., die Bestimmung d. Molekulargewichts in theoretischer u. praktischer Beziehung. Berlin, Springer. 12 Mk.

Wittwer, H. G., Grundzüge d. Molecular-Physik u. der mathematischen Chemie. 2. Aufl. Stuttgart, Wittwer's Verl. 6 Mk.

Zeitschrift f. den physikalischen u. chemischen Unterricht. Unter der besond. Mitwirkg. v. E. Mach u. R. Schwalbe hrsg. v. F. Poske. 6. Jahrg. 1892/93. 1. Hft. Berlin, Springer. Jährlich 10 Mk.

Vermischte Schriften.

Abhandlungen der mathematisch-physikalischen Classe der königl. bayerischen Akademie d. Wissenschaften. 17. Bd. 3. Abth. In der Reihe d. Denkschriften der 63. Bd. München, Franz'scher Verl. 11 Mk.

Annalen, mathematische. Begründet durch R. F. A. Clebsch. Hrsg. v. F. Klein, W. Dyck, A. Meyer. 41. Bd. (4 Hefte.) 1. Hft. Leipzig, Teubner. Für den Band 20 Mk.

Jahrbuch der deutschen Mathematiker-Vereinigung. 1. Bd. 1890—91. Hrsg. im Auftrage d. Vorstandes v. G. Cantor, W. Dyck, E. Lampe. Berlin, Georg Reimer. 7 Mk. 60 Pf.

Katalog mathematischer u. mathematisch-physikalischer Modell-Apparate u. Instrumente. Unter Mitwirkg. zahlreicher Fachgenossen hrsg. im Auftrage d. Vorstandes der deutschen Mathematiker-Vereinigg. v. W. Dyck. München, Theod. Ackermann, Verl. 14 Mk.

Mémoires de l'académie impériale des sciences de St. Petersbourg. VII. Série. Tome XXXVIII, Nr. 14 et dernier. Sur l'intégrale $\int_a^b F(x)\frac{\partial x}{z-x}$. Par N. Sonin. Leipzig, Voss' Sort. 1 Mk. 65 Pf.

Mittheilungen der deutschen Mathematischen Gesellschaft in Prag. Hrsg. m. Unterstützg. der Gesellschaft zur Förderg. deutscher Wissenschaft, Kunst u. Literatur in Böhmen. Leipzig, Freytag. 7 Mk.

Ohm, G. S., gesammelte Abhandlungen. Hrsg. u. eingeleitet. v. E. Lommel. Leipzig, Barth. Geb. in Leinw. 20 Mk.

Ostwald's Klassiker der exakten Wissenschaften. Nr. 31—33. 6 Mk. 10 Pf. Nr. 36. 1 Mk. 50 Pf. Nr. 40. 1 Mk. 20 Pf. Leipzig, Engelmann.

Sammlung gemeinverständlicher wissenschaftlicher Vorträge, hrsg. v. R. Virchow u. W. Wattenbach. Neue Folge 159. Hft. Hamburg, Verlagsanstalt u. Druckerei. 1 Mk.

Sitzungsberichte der kaiserl. Akademie der Wissenschaften. Abth. IIa Abhandlungen aus dem Gebiete der Mathematik. Astronomie, Physik, Meteorologie und der Mechanik. 101. Bd. 4—7. Leipzig, Freytag. 13 Mk. 50 Pf.

Sitzungsberichte der kaiserl. Akademie d. Wissenschaften. Mathematisch-naturwissenschaftliche Classe. Register zu den Bdn. 97—100. XIII. Leipzig, Freytag. 1 Mk. 70 Pf.

Zeitschrift f. Mathematik u. Physik, hrsg. unter der Red. v. O. Schlömilch, E. Kahl u. M. Cantor. 38. Bd. Jahrg. 1893. (6 Hfe.) 1. Hft. Leipzig, Teubner. Jährlich 18 Mk.

Litterarischer Bericht

XLVII.

Arithmetik, Algebra und reine Analysis.

Zur Transformation und Reduction von Doppelintegralen mittelst elliptischer Coordinaten. Von Prof. Ferdinand Jos. Obenrauch. ;Neutitschein (1893). Im Selbstverlage des Verfassers. 55 S.

Die Schrift ist enthalten im Jahresberichte der Landes-Oberrealschule in Neutitschein für das Schuljahr 1891—2 und besonders herausgegeben. Sie beginnt mit Erklärung der elliptischen Coordinaten, welche einen Punkt als Schnitt dreier confocalen Flächen 2. Grades bestimmen, stellt die Formeln des Ueberganges zwischen jenen und den cartesischen Coordinaten auf, geht auf die Specialitäten der ebenen und Kugelcoordinaten ein und macht die bezüglichen historischen Angaben über die Ausbildung der Theorie durch Lamé, Chasles, Terquem, Liouville, Bertrand, Cauchy, Serret, Michael Roberts, William Roberts, Cayley u. A. Im 2. Abschnitt wird die Complanation des ganzen Ellipsoids behandelt und einige daraus hervorgehende Formeln angegeben, im 3ten eine sehr reichhaltige Zusammenstellung der Anwendungen der Complanationsformeln zur Auswertung und Reduction von Doppelintegralen geliefert. Die ganze Schrift müssen wir als einen wertvollen Beitrag zur Geschichte der analytischen Theorien und Probleme willkommen heissen.

H.

Zur linearen Differentialgleichung dritter Ordnung. Von Dr. Anton Krug. Prag 1892. H. Dominicus. 81 S.

Ueber die in dieser Schrift enthaltenen Entwickelungen hat der Verfasser folgende Uebersicht gegeben. „Zunächst werden aus den Coefficienten p, q, r der Differentialgleichung

$$y''' + 3py'' + 3qy' + ry = 0 \qquad \text{(A)}$$

in der x die Unabhängige ist, die zwei Invarianten $G_3 dx^3$ und $G_2 dx^2$ gebildet, d. h. die beiden Ausdrücke, die bei beliebigen Substitutionen $y = s\bar{y}$ und $x = \varphi(\bar{x})$ in (A) ungeändert bleiben. Aus diesen beiden Invarianten werden zwei absolute Invarianten $\mathfrak{G}$ und $\mathfrak{H}$ abgeleitet, d. h. solche die den Factor dx nicht enthalten. Ebenso wie G_3 und G_2 sind auch $\mathfrak{G}$ und $\mathfrak{H}$ im allgemeinen Functionen von x. Es ist also etwa

$$\mathfrak{G} = \varphi_1(x); \quad \mathfrak{H} = \varphi_2(x)$$

woraus durch Elimination von x eine Gleichung

$$F(\mathfrak{G}, \mathfrak{H}) = 0 \qquad \text{(B)}$$

entsteht. Durch diese Gleichung ist die Differentialgleichung (A) so wie alle durch jene Substitutionen abgeleiteten charakterisirt. Hat insbesondere einer derselben rationale Coefficienten, so sind $\mathfrak{G}$ und $\mathfrak{H}$ rational in x und die Gl. (B) ist vom Geschlechte 0. Und umgekehrt: ist eine Gl. (B) vom Geschlechte 0 gegeben, so lassen sich jederzeit Differentialgleichungen 3. Ordnung mit rationalen Coefficienten aufstellen, welche gerade die absoluten Invarianten $\mathfrak{G}$ und $\mathfrak{H}$ besitzen. Ist $\mathfrak{G}$ identisch einer Constanten, so ist $\mathfrak{H} = 0$, und Gl. (A) lässt sich in eine solche mit constanten Coefficienten transformiren. Dieser Fall wird vorweg behandelt, um im Spätern $\mathfrak{H} \gtrless 0$ setzen zu können." H.

Vorlesungen über die Bernoullischen Zahlen, ihren Zusammenhang mit den Secanten-Coefficienten und ihre wichtigeren Anwendungen. Von Dr. A. Louis Saalschütz, a. o. Professor der Mathematik a. d. Universität Königsberg. Berlin 1893. Julius Springer. 208 S.

Da die Lehre von den bernoullischen Zahlen ein vielverzweigtes Gebiet von Entdeckungen und Untersuchungen darbietet, welches in mannichfaltiger Beziehung zu andern Gebieten steht, so ist eine zusammenstellende Behandlung ein dankenswertes Unternehmen. Vollständigkeit mag nicht erreichbar sein: wir haben noch zu wenig

Einblick in die vielgestaltige Natur der bernoullischen Zahlen, um die fruchtbaren Elemente im voraus zu erkennen und das Untersuchungsgebiet umgrenzen zu können. Doch muss jedenfalls Vollständigkeit angestrebt sein, und darf vor allem kein bereits als fruchtbar documentirter Zweig fehlen. Wir werden daher dem Wunsche des Verfassers entgegenkommen, wenn wir einige Desiderata aussprechen. Das Buch ist in 4 Hauptabschnitte geteilt: Recursionsformeln, unabhängige Darstellungen, zahlentheoretische Untersuchungen, Mac-Laurin'sche Summenformel. Die Methode schliesst sich vorwaltend dem geschichtlichen Entwickelungsgang an. Der 2. Abschnitt behandelt mannigfaltige Themata. Wir heben hervor: § 12. Independente Darstellungen mittels der Bernoullischen Functionen. Der Paragraph beginnt mit den Worten: „Es wird in der neueren Mathematik mit Recht nicht nur auf die Ergebnisse einer Untersuchung Gewicht gelegt, sondern auch auf die Methode, durch welche sie gewonnen worden sind, und dabei diejenige bevorzugt, welche sich durch Einheitlichkeit der Gesichtspunkte, durch Ableitung aller Resultate aus derselben Quelle auszeichnet. In diesem Sinne ist eine Abhandlung des Herrn Worpitzky (1883) beachtenswert, in welcher alle Ergebnisse aus dem einen Princip der Umformung der Bernoulli'schen Functionen hervorgehen". Und trotz der oben ausgesprochenen Zustimmung hat der Verfasser so wenig Gewicht auf die Einführung der Bernoulli'schen Functionen und ihre gesamten Ergebnisse gelegt, dass er sie wie eine zur Seite liegende Speculation mit Verweisung auf die Originalschriften abtut und mit Ableitung eines Resultats sich begnügt. Motivirt wird dies Verfahren in einer Note mit den Worten: „Wir beabsichtigen nicht eine nähere Discussion über die Bernoulli'schen Functionen zu geben, sondern wir werden, ohne dadurch Lücken entstehen zu lassen oder besonders umständlich zu sein, das Erforderliche darüber an betreffender Stelle aus unsern Formeln ableiten". Daraus ersieht man, dass die Ableitung aus einer Quelle nicht zu dem Erforderlichen gerechnet wird. Nun ist aber Worpitzky gar nicht der Erste, welcher die angegebene Bedeutung der Bernoulli'schen Functionen erkannt hat. Zunächst sind in des Ref. „Lehrbuch der Differentialrechnung und Reihentheorie" (1865) dem gesamten Abschnitt über Bernoulli'sche Theoreme die Bernoulli'schen Functionen, definirt als Coefficienten einer Reihe, zugrunde gelegt. Die Methode bot sich so natürlich als die angemessene dar, dass für ihre Wahl nach einer Autorität kaum gefragt zu werden Grund schien. Bald fand auch der Verfasser, dass Bertrand in seinem grösseren Werke über Differentialrechnung ebenso zuwerke gegangen war, und hält es daher für nicht unwahrscheinlich, dass jene Auffassung der bernoullischen Zahlen als Specialwerte von Functionen überhaupt aus älteren Zeiten stammt.

Beide Schriften fehlen im Litteraturverzeichniss des vorliegenden Buchs. Ferner vermisst man in dem Buche die längst bekannten Ausdrücke der bernoullischen Zahlen durch unendliche Reihen und und damit im Zusammenhange die Summation der nach Cosinus und Sinus der Vielfachen eines Bogens fortschreitenden Reihen, deren Coefficienten Potenzen mit negativem ganzem Exponenten vom Index sind. Auch die independenten Ausdrücke in geschlossener endlicher Form, welcher die Differentiation der Tangenten und Secanten und deren Potenzen liefert, sind nicht erwähnt und das betreffende Werk des Ref. im Litteraturverzeichniss nicht angegeben. Die halb convergente bernoullische Reihe ist einmal erwähnt, ohne jedoch etwas darüber mitzuteilen. Hoppe.

Die Logarithmen complexer Zahlen in geometrischer Darstellung. Ein Beitrag zur algebraischen Analysis.

Die goniometrischen Functionen complexer Winkel. Eine Ergänzung zur algebraischen Analysis.

Von Adalbert Breuer, k. k. Professor an der Staatsrealschule im III. Bezirk Wiens. Mit einer Figurentafel. Erfurt 1892. Bodo Bacmeister. 6 + 14 S.

Die beiden Schriften sind von einander unabhängig. Die erstere stellt die Logarithmen complexer Winkel, mit Zuhülfenahme der dritten Dimension als laterale, dar, so dass die 2 ersten Dimensionen für reelle Variation vorbehalten bleiben. In der reellen Ebene werden die Polarcoordinaten r, β eines Punktes als von einander abhängige Variable, und zwar die Amplitude β als Function des Radiusvectors r betrachtet. Dann bezeichnet wieder r den Modul des complexen Arguments und wird längs der Meridianebene um den Winkel $\varphi =$ der Amplitude des Arguments nach der lateralen Axe hin gedreht. Ist nun die Function der Logarithmus, so ist der Endpunkt von r in der neuen Lage gleichzeitig die Construction der Function und ihres Arguments. Erstere wird durch die doppelte Drehung des Radiusvectors von der x Axe nach der y Axe hin, dann von der Endlage nach der z Axe hin als Ausdrücke ihrer reellen Elemente dargestellt, und zwar kann letztere Drehung φ um willkürlich Vielfache von 4 Rechten vermehrt werden. Die Darstellung des Arguments aber ist in rechtwinkligen Coordinaten desselben Punktes auf der Meridianebene gegeben. Der Lauf der Function bei variirendem Argumente wird durch die Bahn des darstellenden Punktes im Raume dargestellt, wenn der Endpunkt von r in seiner anfänglichen Lage, d. h. in der reellen Ebene, eine logarithmische Spirale erzeugt.

Der Anlass zur zweiten Schrift wird vom Verfasser in folgenden Worten dargelegt. „Bei meinen Studien über das Imaginäre in der Geometrie bin ich auf Widersprüche zwischen meinen wolgeprüften Resultaten mit jenen der algebraischen Analysis gestossen, deren Beseitigung mir dringend geboten erscheint". Die Schrift ist so voll von dunkeln Stellen, dass wir ein sachliches Urteil darüber nicht geben können. Licenzen sind bei einem solchen Dispüte nicht am Orte, exacte Sprache ist hier unerlässlich. Es genüge einige Punkte zu nennen, in denen gegen diese Vorschrift gefehlt ist. Nicht selten wird imaginären Grössen das Prädicat grösser oder kleiner gegeben oder von ihrem Wachsen gesprochen. Auf Seite 5 steht. „Die ... Sätze gelten bloss innerhalb der Grenzen $-\infty < \varphi < +\infty$, oder cyklometrisch gesprochen, $-\frac{\pi}{4} < \varphi < +\frac{\pi}{4}$, — —". Was heisst das? — Die Gleichungen (1) bis (8) gelten offenbar für beliebig reelle und imaginäre φ, in Gl. (9) (10) hat überdies φ complexen Wert, in Gl. (12) dagegen ausschliesslich reellen; aber nirgends ist dies ausgesprochen. — Auf Seite 4 fängt ein Satz an: Abgesehen von $k2\pi$ zeigt der Winkel $i\varphi$ ein ganz befremdendes Verhalten, ..." — Wie kann man von dem absehen, was wesentlich dazu gehört? Bald nachher folgt: „Daher (d. h. wegen jenes befremdenden Verhaltens) muss dem Winkel $i\varphi$" (nämlich in $\sin i\varphi$, $\cos i\varphi$, etc.) ein anderes Mass zu Grunde liegen". Von da an misst der Verfasser den Winkel $i\varphi$, statt nach Kreisbogen, nach einem gleichseitig hyperbolischen Sector als Einheit und sucht (leider in unverständlicher Sprache) zu zeigen, dass dann die Resultate besser stimmten. Hätte er wirklich ein abweichendes Resultat aus verschiedener Betrachtungsweise nachgewiesen, so würde damit nicht irgend eine solche gerechtfertigt, sondern die Untauglichkeit complexer Argumente goniometrischer Functionen überhaupt gezeigt sein. In der Tat sind es aber nur unerwartete, bedenkliche Folgerungen, auf die er sich beruft, und die er gar nicht zu erklären versucht hat. Hoppe.

Die quadratische Zerfällung der Primzahlen. Von Dr. Hermann Scheffler. Leipzig 1892. Friedrich Foerster. 169 S.

Die vorliegende Schrift entwickelt das directe Verfahren der allgemeinen Zerfällung der einer gegebenen linearen Form entsprechenden Primzahlen $q = pn + m$ oder einer bestimmten Potenz davon oder eines bestimmten Vielfachen einer solchen Potenz in die quadratische Form $A^2 \mp pB^2$ unter der Voraussetzung, dass p eine Primzahl sei. Dem allgemeinen Verfahren voraus geht die Behandlung besonderer Fälle. Das allgemeine Problem der Zerfällung kann

nacb Anssage des Verfassers für gelöst gelten. Wenn, in $p=2r+1$, r uupar ist, so kann die $(r-2)$te Poteuz der Primzahl $q=pn+m$ in dio Form A^2+pB^2 zerfällt werden. Ist r par, so ist eine niedere Potenz oder deren Vielfacbes in A^2-pB^2, nnter Umständeu auch in A^2+pB^2 zerfällbar. Für pares r ist die Zorfällbarkeit in A^2-pB^2 allgemeiu. Ferner werden Sätze über quadratische Congruenzen gegeben, schliesslich das praktiscb beste Kriterium der Primzahleneigenschaft nebst Auffindung der Primfactoren einer gegebenen Zahl gesucht. Ein von Eisenstein vorbehaltener Specialfall ist ergänzt.

H.

Studien über die Reduction der Potentialgloichung auf gewöhnliche Differentialgleichungen. Ein Anhang zn Heine's Handbnch der Kugelfunctionon. Von Dr. Emil Haontzschel, Oberlehrer an der III. Realschule zu Berlin. Berliu 1893. Georg Reimer. 180 S.

Der erste der 6 Aufsätze schliesst sich au die Dissertation des Verfassers: „Ueber die Reduction der Gleichung

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial z^2}=0$$

auf gewöhnliche Differentialgleicbnngen. Ein Boitrag zur Theorie der Lamé'scben Fnnctionen zweiter Ordnung. Berlin; Mayer u. Müller 1893" (s. Obrtmann, Jahrb. üb. d. Fortschr. d. Math. XV. 311.) — au und behandelt die nämliche Reductiou nnd Lösung auf Grundlage der Theorie der elliptischen Functionen von Weierstrass. Der zweite hat zum Gegenstande die Gleicbungen für die Meridiancurven der Rotationskörper; der dritte dio Lamé'schen Functionen 2. Ordnung und ihre functionen-theoretischen Grenzfälle; der vierte die Lamé'schen Functionen höherer Ordnung; dor fünfto die Functionen des elliptischen und des Kreiscylinders; der sechste die Heine'sche Function und die aus ibr abgeleitete hyper-Bessel'scbe Transcendente.

H.

Éléments de la théorie des fonctions elliptiques. Par Jules Tannery, Sous-Directeur des études scientifiques à l'École Normale supérieure, et Jules Molk, Professeur à la Faculté des Sciences de Nancy. Tome I. Introduction. Calcul différentiel (I[re] partie). Paris 1893. Gauthier-Villars et fils. 246 S.

Die Schrift ist eine Einführung in die Theorie der elliptischen Functionen von Weierstrass. Der allein vorliegende 1. Band davon bat folgenden Inbalt: Eiuleitung, Cap. I. Unendliche Reihensummen

und Producte bei constanten Termen. Solche bei einfachem Entree. Reihen mit doppeltem Entree. Producte mit doppeltem Entree. Cap. II. Unendliche Reihensummen und Producte, deren Terme von einer Variabeln abhangen. Definitionen und erste Lehrsätze. Reihen von ganzen Functionen (ganze Reihen). Reihen von ganzen Reihen. Functionen (Fortsetzung). Anwendung auf lineare Differentialgleichungen. Cap. III. Ganze transcendente Functionen. Exponentiale und circulare Functionen. Sätze von Weierstrass und Mittag-Leffler. — Differentialrechnung (1. Teil). Cap. I. Allgemeine Betrachtungen über die periodischen Functionen. Cap. II. Die Function $\sigma(u)$ und die davon abgeleiteten Functionen $\zeta(u)$, $\wp(u)$. Das Argument wachsend um $2\omega_\alpha$. Erste Relationen zwischen den Functionen $\sigma(u)$, $\zeta(u)$, $\wp(u)$, $\wp'(u)$. Darstellung von $\sigma(u)$ durch ein unendliches Product mit einfachem Entree. Die Cofunctionen $\sigma_1(u)$, $\sigma_2(u)$, $\sigma_3(u)$. Lineare Transformation des σ. Substitution äquivalenter Perioden für die primitiven. Transformation beliebiger Ordnung der Functionen σ. Substitution neuer, mit den alten linear verbundener Perioden für die primitiven. — Der 2. Band (unter der Presse) ist die Fortsetzung des ersten. Der 3te wird die Integralrechnung, der 4te Anwendungen enthalten. H.

Traité d'analyse. Par Émile Picard, Membre de l'Institut, Professeur à la Faculté des Sciences. Tome II. Fonctions harmoniques et fonctions analytiques. Introduction à la theorie des équations différentielles et fonctions algébriques. Paris 1893. Gauthier-Villars et fils. 512 S.

Der 1. Band ist besprochen im 43. litt. Bericht S. 31. Der 2. Band enthält zunächst die Lehre von den Functionen einer complexen Variabeln, und zwar nach Erklärung und Grundlegung die Reihenentwickelung, die alternirte Methode, die Lösung des Problems von Dirichlet, directe Untersuchung der Functionen einer complexen Variabeln, Anwendungen der Sätze von Cauchy, gemeinsame Wurzeln zweier simultanen Gleichungen, Integrale von nichteinförmigen Functionen, Functionen mehrerer unabhängigen Variabeln, die conforme Abbildung, Sätze über die Differentialgleichungen, Anwendungen derselben, etc. Abel'sche Integrale, einförmige Functionen auf einer Riemann'schen Fläche, allgemeine Sätze über die Existenz solcher Functionen, Curven vom Geschlecht null und eins. H.

Geometrie.

Die einfachste Lösung des Apollonischen Problems. Eine Anwendung der neuen Theorie des Imaginären. Von Adalbert Breuer, k. k. Professor an der Staatsrealschule im III. Bezirk Wiens. (Mit zwei Figurentafeln.) Erfurt 1892. Bodo Bacmeister. 16 S.

Das Problem einen Kreis zu construiren, der 3 gegebene Kreise berührt, wird auf folgendem Wege gelöst. Die 6 Aehnlichkeitscentra der gegebenen Kreise liegen zu 3 in gerader Linie. Durch sie bestimmen sich 4 Aehnlichkeitsaxen. Die äussere Aehnlichkeitsaxe ist Chordale der 2 gesuchten Kreise; die 3 übrigen Chordalen treffen sich im Potenzcentrum der gegebenen Kreise, welches zugleich Aehnlichkeitscentrum der gesuchten Kreise ist. Die Mittelpunkte derselben liegen dann auf der Normale vom Aehnlichkeitscentrum auf die äussere Aehnlichkeitsaxe. Der Verfasser verbindet diese Lösung mit seiner „Theorie des Imaginären", welche er in der folgenden Schrift entwickelt. H.

Imaginäre Kegelschnitte. Eine geometrische Studie über das Wesen und die katoptrische Deutung des Imaginären. Von Adalbert Breuer — — dito (Mit einer Figurentafel.)

Ausgehend von einer reellen Ellipse und 2 conjugirten Durchmessern führt eine Construction zu einem imaginären Punkte, dessen Ort eine Ellipse ist. Hierauf gründet der Verfasser seine neue Darstellung des Imaginären. Ueber alles Nähere verweisen wir auf die Schrift selbst. H.

Ueber Conographie. Ein Beitrag zur constructiven Geometrie der Kegelschnitte. Von Adalbert Breuer — — dito (Mit zwei Figurentafeln) 10 S.

Es handelt sich um Erfindung von Instrumenten zur Beschreibung von Kegelschnitten. Zunächst werden alle diejenigen verworfen, welche den Schreibstift längs eines Fadens führen. Unter denjenigen, welche bereits eine sicherere Führung bewirkt haben, werden die von Arbter, Rebicek und Drzewiecki genannt, an den 2 letzten beschränkte Einstellungsfähigkeit, Complicirtheit des Apparates und Kostspieligkeit ausgesetzt. Dann werden die, unter vielseitiger Be-

rücksichtigung der Erfordernisse vom Verfasser erfundenen Instrumente beschrieben, zuerst ein Instrument zur Zeichnung aller Arten von Kegelschnitten, das er jedoch nicht als praktisch zur technischen Anwendung empfiehlt, dann 9 einfachere für gewisse Gruppen von Kegelschnitten. Die Instrumente bestehen aus Linealen, längs deren Mittellinie der in eine Hülse gefasste Schreibstift im Kreuzungspunkt zwischen zwei Schienen gleitet. H.

Sur la détermination géométrique du point le plus probable donné par un système de droites non convergentes. Par M. Maurice d'Ocagne, Ingénieur des ponts et chaussées. Extr. du J. de l'École Polytechn. LXIII, cah. 1893. 4°. 25 S.

Es wird folgende Aufgabe gelöst. Ein Punkt ist als Durchschnitt von *n* Geraden ideell bestimmt. Die Geraden sind aber wegen Beobachtungs- und Zeichnungsfehler ungenau gegeben. Einer jeden wird ein gewisses Gewicht als Grad der Sicherheit beigelegt. Es soll die wahrscheinlichste Lage des ideellen Punkts gefunden werden. Von einem beliebigen Punkte O werden Lote auf alle Geraden gefällt und um ihre Länge verlängert; der Schwerpunkt der mit den Gewichten der Geraden belasteten Endpunkte (symmetrischer Schwerpunkt von O) sei O', der symmetrische Schwerpunkt von O' sei O''. Dann ist der Schnittpunkt von OO'' und der Tangente an den durch $OO'O''$ beschriebenen Kreis in O' in erster Näherung das Centrum der kleinsten Quadrate der Abstände jenes Punktes O von allen Geraden. H.

Die Grundformeln der allgemeinen Flächentheorie. Von Dr. Hermann Stahl, ord. Prof. der Mathematik in Tübingen und Dr V. Kommerell, Repetent am Seminar in Urach. Mit einer lithographirten Tafel. Leipzig 1893. B. G. Teubner. 114 S.

Durch die Bearbeitung und Herausgabe der allgemeinen Flächentheorie haben sich die Verfasser ein grosses Verdienst erworben. Da dieser Wissenschaftszweig in der mathematischen Litteratur (ganz besonders der deutschen), namentlich gegenüber dor ins unbegrenzte Neues schaffenden mathematischen Tätigkeit in viel geringerem Masse vertreten ist, als es seiner Bedeutung entspricht, in so geringem Masse, dass er von Studirenden leicht ganz übersehen wird, so ist Grund es hervorzuheben, dass das vorliegende Werk die Existenz einer Doctrin ans Licht zieht, welche auf Lösung von Natur

gegebener, nicht erst durch Einführung geschaffener, also unumgänglicher Probleme gerichtet ist und bereits Errungenschaften in grösserem Umfange aufweist. Die Bearbeitung ist für Studirende bestimmt. Die Anforderungen an Vorkenntnisse sind etwas höher als es vielleicht nötig war; doch hat dadurch die Kürze der Herleitung und die Uebersichtlichkeit sehr gewonnen. Das Zuwerkegehen charakterisirt sich durch folgendes. Die Auffassung und Bezeichnung ist durchgängig die nämliche. Die cartesischen Coordinaten sind stets Functionen zweier Parameter u, v; nie wird zur inversen Darstellung übergegangen. Dieselben 6 Fundamentalgrössen e, f, g (nach Gauss E, F, G), d, d', d'' (durch einen Factor von den Gauss'schen abweichend), welche zur Bestimmung der Fläche unabhängig von der Lage hinreichen, werden auch hier als Elemente der Ausdrücke, deren eine grössere Anzahl gleich von Anfang eingeführt sind, angewandt. Die für die Theorie bedeutungsvollen Linien auf der Fläche, die isometrischen (conformen Abbildungslinien), die geodätischen, conjugirten, Krümmungs- und asymtotischen Linien, für sich und als Parameterlinien, schliesslich die Mittelpunktsflächen werden nach den Fundamentalformeln im 1. Abschnitt behandelt. Eigentümlich ist, dass die Theorie der isometrischen Linien hier von den sogen. Minimallinien, d. h. den imaginären Linien $\partial s = 0$ ausgeht. Ueberhaupt ist es willkommen, dass man für die in der Theorie bedeutungsvollen Begriffe hier kurze Namen findet. Möchte doch auch für die Function, deren Doppelintegral nach $\partial u \partial v$ die Fläche gibt, ein kurzer Name in Gebrauch kommen! Der 2. Abschnitt hat zum Gegenstande die Herleitung einer Fläche aus gegebenen Eigenschaften. Als eigentliches Endziel der Untersuchung wird die Darstellung der Fundamentalgrössen betrachtet, der primitive Ausdruck der Fläche in Coordinaten, wo er erreichbar ist, als beiläufiges Resultat behandelt. Meistens sind es nur die Differentialgleichungen, mit denen die allgemeine Untersuchung abschliessen muss. Von besondern Flächen, welche deren Integration gestatten, sind es die Minimalflächen, die ausführlich behandelt werden. Dieser Abschnitt enthält die grösste Anzahl von Theoremen, die der Mitteilung vorzüglich für wert befunden worden sind. Dazu gehören nicht gerade die bekanntesten. Der 3. Abschnitt untersucht die allgemeine Flächencurve. Als Vorbereitung sind einige Teile der allgemeinen Curventheorie entwickelt. Das Ganze ist aus sachlich gegebenen scientiven Stoffe selbständig nach einheitlicher Methode gestaltet. Die Originalarbeiten sind, soweit es möglich war, angegeben. H.

Ueber imaginäre Punkte ebener Curven. Von Prof. Dr. H. Suhle, Director des Herzoglichen Friedrichs-Realgymnasiums und

der Vorschule des Fridericianum. Dessau 1893. (Programmarbeit). 4°. 28 S

Die Abschnitte der Schrift sind überschrieben: Von den imaginären Durchschnittspunkten der Curven 2. — dann: 3. Grades. Ueber imaginäre Maxima und Minima der Curven 3. Grades. Allgemeine Eigenschaften der ganzen rationalen Functionen complexer Variabeln. Von den singularen Punkten der durch die Functionen $U(x, y)$ und $V(x, y)$ dargestellten Flächen. Von den reellen — dann: imaginären Punkten der Flächen $U(x, y)$ und $V(x, y)$ Von den imaginären Durchschnittspunkten der, ganzen rationalen Functionen $n$ten Grades entsprechenden Curven. — Die Abfassung ist von Anfang an dunkel ausgedrückt. Von gegebenen Curven ist überhaupt nirgends die Rede, auch nicht von den gegenseitigen Durchschnitten solcher. Es wird vielmehr der Gleichung $u = f(z)$ in unausgesprochenem Gedanken die Beziehung untergelegt, dass u und z Coordinaten seien. Hier ist u reell, f eine reelle ganze Function, und es handelt sich um geometrische Darstellung der Schnittpunkte einer einzigen so bestimmten Curve mit der Geraden $u = \text{const}$, d. h., wenn man die müssige und durch Concurrenz den Leser vexirende Einkleidung der Frage weglässt, um Darstellung der Wurzeln einer algebraischen Gleichung. Hierzu wird die Complexe $z = x + iy$ als Punkt auf einer Grundebene und die reellen Elemente von $f(z)$ als entsprechende Ordinaten zweier Punkte in dritter Dimension, deren Orte zwei Flächen sind, dargestellt. Ueber Ziel und Erfolg muss Ref. auf die Schrift selbst verweisen, da er schon im Vorstehenden Misverständnisse als möglich gern einräumen wird.

Hoppe.

Abriss des geometrischen Calcüls, Nach den Werken des Professors Dr. Hermann Günther Grassmann bearbeitet von Ferdinand Kraft, Privatdocent an der Universität Zürich. Mit in den Text gedruckten Figuren. Leipzig 1893. B. G. Teubner. 255 S.

Das Vorwort macht 8 deutsche Mathematiker namhaft, welche bestrebt gewesen sind Grassmann's Ausdehnungslehre verständlich und nutzbar zu machen. Von sich selbst sagt der Verfasser aus, dass sich ihm durch mehrjährige Studien herausgestellt hat, dass dieselbe von theoretischem und grossem praktischem Nutzen ist. Daraus schliesst er sofort, es handle sich nun darum die erzielten Resultate weitern Kreisen bekannt zu gehen. Da nun aber gerade jener Nutzen es ist, den Andre bestreiten oder bezweifeln, so war

es doch zum Zwecke der Verbreitung der Lehre in weitere Kreise vor allem geboten, von dem theoretischen und praktischen Nutzen, den der Verfasser daraus gezogen hat, einmal Rechenschaft zu geben. Neue theoretische Resultate findet man im Buche nicht, der praktische (doch jedenfalls intellectuelle, nicht materielle) Gewinn könnte nur im leichtern Erlernen und Untersuchen bestehen — leichter im Vergleich mit andern Methoden, durch die man dasselbe erreicht; diesen lässt der grosse Umfang der gegenwärtigen, zwar in deutscher, doch sehr fremder Sprache geschriebenen Einführung schwerlich erhoffen. Worin dann trotzdem, dass aller Anschein entgegen ist, ein Preis für die Mühe des schwierigen Studiums noch liegen kann, darüber hätte der Verfasser nicht schweigen sollen. Qui tacit, consentit. Hoppe.

Die Geometrie der Lage. Vorträge von Dr. Theodor Reye, o. Professor der Mathematik an der Universität Strassburg i. E. Zweite Abteilung. Mit 36 Textfiguren. Dritte, vermehrte Auflage. — Dritte Abteilung der dritten, vermehrten Auflage. Leipzig 1892. Baumgärtner. 330 + 224 S.

Die 1. Abteilung ist im 30. litt. Bericht S. 17 besprochen. Die 2. Abteilung handelt hauptsächlich von der Collineation und der Correlation der Grundgebilde 2. und 3. Stufe, von den Flächen 2. Ordnung, welche durch reciproke, und von den Strahlencongruenzen und kubischen Raumcurven, welche durch collineare Bündel oder Felder erzeugt werden; sie umfasst ausserdem die Polar- und die Nullsysteme wegen ihrer innigen Verbindung mit den Flächen 2. und den Raumcurven 3. Ordnung. Die 3. Abteilung enthält namentlich die Theorie der tetraedralen Strahlencomplexe, welche durch je 2 collineare Räume, und die der kubischen Flächen, welche durch je 3 collineare Bündel erzeugt werden, und im Anschlusse hieran die Theorie der Büschel, Bündel und Gebüsche von Flächen 2. Ordnung. Die Anhänge zur 2. und 3. Abteilung enthalten bzhw. 10 und 8 Aufgaben. H.

Over het ontstaan van oppervlakken van den vierden graad med dubbelrechte door middel van projectieve bundels aan kwadratische oppervlakken. Door J. Cardinaal, Leeraar aan de H. B. S. te Tilburg. Amsterdam 1892. Johannes Müller. 63 S.

In Verslagen en Mededeelingen VIII. 88 hat der Verfasser eine Construction der Flächen 4 Grades mit Doppelkegelschnitt mitge-

teilt. Als Grundlage dieute die Construction der Fläche als Durchschnitt der homologen Elemente zweier Bündel quadratischer Flächen. Jede der Basiscurven der heiden Bündel hestaud aus 2 Kegelschuitten, während ein Kegelschnitt der einen Basiscurve mit einem Kegelschnitt der andern zusammenfiel. Auf derselben Grundlage werden gegenwärtig die Flächeu 4. Grades mit Doppelgeraden coustruirt und in Gruppen geteilt. In Salmon Fiedler's Geometrie des Raumes II § 335 n. f. findet man einige Eigenschaften dieser Flächen angegehen. Am Schlusse der gegenwärtigen Abhaudlnng wird gezeigt, welche Verbindung zwischen deu hier erhalteneu Resultateu und den Salmon'schen Formen hesteht. H.

Mathematische und physikalische Bibliographie.

XL.

Geschichte der Mathematik und Physik.

Fortschritte, die, der Physik im Jahre 1887. Dargestellt v. der physikal. Gesellschaft zu Berlin. 43. Jahrg. 1. Abth. Berlin, Georg Reimer. 13 Mk.

Jahrbuch üb. die Fortschritte der Mathematik, begründet v. C. Ohrtmann. Im Verein m. anderen Mathematikern u. unter besond. Mitwirkg. v. F. Müller u. C. Wangerin hrsg. v. E. Lampe. 22. Bd. Jahrg. 1890. 1. Hft. Ebd. 13 Mk.

Mach, E., zur Geschichte u. Kritik d. Carnot'schen Wärmegesetzes. Leipzig, Freytag. 50 Pf.

Mahler, E., der Kalender der Babylonier. (II. Mittheilung.) Ebd. 30 Pf.

Müller, Carl Heinrich Schellbach. Gedächtnissrede. Berlin, Georg Reimer. 50 Pf.

Neteler, B., Stellung der alttestamentlichen Zeitrechnung in der altorientalischen Geschichte. 2. Untersuchung der Zeiträume von Salomo bis Noe. Münster, Theissing'sche Buchh. 50 Pf.

Methode und Principien.

Illigens, E., die unendliche Anzahl u. die Mathematik. Münster, Theissing'sche Buchh. 1 Mk.

Kirchhoff, E., Anleitung zur Erteilung d. Unterrichts in der Raumlehre. Nebst e. Anh., enth. die Resultate zu den Schülerheften. 2. Aufl. Leipzig, Hirt & S. 60 Pf.

Lehrbücher.

Močnik, F. Rittor v., Lebrbncb d. Arithmetik f. Unter-Gymnasien. 1. u. 2. Abth. 32. resp. 24. Aufl. Wien, C. Gerold's S., Verl. Geb. in Leinw. 3 Mk. 90 Pf.

Sammlungen.

Branne, A., Recbenbucb als Grundlage f. das Kopfrechnon in Seminarien. 3 Tle. in 1 Bde. 2. Aufl. Halle, Herm. Schrödel. 2 Mk.; geb. 2 Mk. 25 Pf.

Frank, F., n. H. Martens, Recbenbuch f. Gewerbo- n. Banschnlen, sowio f. gewerbliche Fortbildnngsschnlen. Dresden, Kühtmann. 2 Mk.; kart. 2 Mk. 20 Pf.

Kleyer, A., vollständig gelöste Aufgaben-Sammlung ans allen Zweigen der Rechenknnst, der niederen u. höherou Mathematik, dor Physik etc. 1078.—1197. Hft. Stuttgart, Jul. Maier. à 25 Pf.

Kniess, K., u. O. Bachmann, Aufgabensammlung f. das Rechnen m. bestimmteu Zahlen, bearb. nnter besond. Berücksicht. d. f. Lateinschnlen vorgeschriebenen Lehrpensums. 2. Aufl. München, Kellerer's Hofbncbh. 1 Mk. 60 Pf.; Einbd. 25 Pf.

Martns, H. C. E., 50 Aufgaben ans der Körperlebre znr Einübg. n. zum Gebraucbe bei der Abschlussprüfung in Untersecunda. Ergänzung d. 2. Thls. der Raumlehre f. höhero Scbulen. Bielefeld, Velhagen & Kl. 20 Pf.

Nenmann, C. E. O., Formelbuch, eutb. die hanptsächlichsten Formeln, Sätze n. Regeln der Elementar-Mathematik, znm Gebranche an Gymnasien u. Realschnlen übersicbtlich znsammengestellt. 5. Aufl. Dresden, Axt. Kart. 1 Mk. 50 Pf.

Petzold, W., Fragen u. Aufgaben (m. Lösnngen) ans dem Gebiete der astronomiscben Geographie. (Zn: P., Leitfaden der astronom. Geographie.) Bielefeld, Velhagen & Kl. 50 Pf.

Scbellen, H., methodisch geordnete Materialien f. den Unterricbt im theoretischen n. praktiscben Rechnen, nebst e. Anb. üb. die Flächen- u. Körper-Berecbngn. 1. Tl. Ein Handbnch nach geisthild. Grundsätzen n. m. besond. Berücksicbt. d. Kopfrecbnens f. Lehrer, zum Gebrauche beim Rechnenunterricbte an Gymnasien, Realgymnasien, Oberrealschnlen, Realschulen, Seminarien n. anderen höberen Lehranstalten ähnl. Richtg. 12. Aufl., bearb. v. H. Lemkes. Münster, Coppenrath'sche Bnchh., Verl. 4 Mk.; Einbd. 30 Pf.

Wallontin, F., Auflösnngen zu den Matnritätsfragon aus der Mathematik. Zum Gebrauche f. die oberstcn Classen dor Gymnasien nnd Realschnlen zusammengestellt. 2. Aufl. Wien, C. Gerold's S., Verl. Geb. in Leinw. 4 Mk.

Tabellen.

Augnst, E. F., vollständigo logarithmische n. trigonometrische Tafeln. 18. Aufl., hesorgt v. F. August. Leipzig, Veit & Co. Geh. 1 Mk. 60 Pf.

Ganss, F. G., fünfstellige vollständige logarithmische nnd trigonometrische Tafeln. 38. Anfl. Halle, Strien, Verl. Geh. 2 Mk. 50 Pf.

Arithmetik, Algebra und reine Analysis.

Belikow, A., n. A. Nathing, Lehrbnch der Algebra, nehst e. Sammlung v. Uebnngsaufgahen. Für Gymnasien n. Realschnlen hearh. St. Petershnrg, Eggers & Co. 6 Mk.

Bohl, P., üh. die Darstellnng v. Functionen e. Variaheln dnrch trigonometrische Reihen m. mehreren e. Variaheln proportionalen Argnmenten. Diss. Dorpat, Karow. 1 Mk.

Brenner, A., ansführliches Lehrhnch der Arithmetik. Methodisches Handhnch znm Gehranche in den unteren Klassen der Mittelschnlen n. heim Privatstudium. II. Thl. In 2. Anfl. nen hearb. Freising, Dr. Datterer. 1 Mk. 60 Pf.

Cznher, E., üh. die Differentialqnotienten v. Fnnctionen mehrerer Variahlen. Leipzig, Freytag. 50 Pf.

Escherich, G. v., üh. die Multiplicatoren e. Systems linearer, homogener Differentialgleichnngen. (I. Mittheilg.) Ebd. 50 Pf.

Forsyth, A. R., Theorie der Differentialgleichnngen. 1. Thl.: Exacte Gleichgn. n. das Pfaff'sche Prohlem. Antoris. dentsche Ansg. v. H. Maser. Leipzig, Tenhner. 12 Mk.

Geigenmüller, R., Elemente der höheren Mathematik, zngleich als Sammlg. v. Beispielen n. Anfgahen aus d. analytischen Geometrie, algebraischen Analysis, Differential- u. Integralrechng. Für techn. Lehranstalten n. znm Selhstunterricht. II. Bd. Die niedere n. die höhere Analysis m. Rücksicht anf Fnnctionen e. reellen Variahlen. 2. Aufl. Mittweida, Polytechn. Buchh. 7 Mk.

Haentzschel, E., Stndien üh. die Rednction der Potentialgleichnng auf gewöhnliche Differentialgleichungen. Ein Anhang zu Heine's Handhnch der Kugelfnnctionen. Berlin, Georg Reimer. 6 Mk.

Michelsen, P., die hestimmten algehraischen Gleichungen d. 1. his 4. Grades. Nehst e. Anh.: Unhestimmte Gleichgn. Für höhere Unterrichtsanstalten, sowie f. den Selhstunterricht bearh. Hannover, Meyer. 4 Mk.

Geometrie.

Borgmeyer, J., geometrische Untersnchnng üh. den Ort der Fusspnnkte der Lote, welche von e. Pnnkte anf die Strahlen e.

linearen Congruenz gefällt werden. Diss. Hildesheim, Borgmeyer's Bnchh. 1 Mk. 20 Pf.

Bouffier, H., Lehre der geometrischen u. perspektivischen Schattenkonstruktion. Wiesbaden, Bossong. 1 Mk. 50 Pf.

Bücking, F., die Winkelgegenpunkte d. Dreiecks. Ein Specialfall der involutor. Verwandtschaft. Diss. Leipzig, Fock. 1 Mk.

Fialkowski, N., die vollständige Trisection d. Winkels Die Lösg. d. 2000 jährigen Problems auf elementar-geometr. Wege im Sinne der Alten, d. h. blos m. Lineal u. Zirkel. Wien, Halm & G. 3 Mk.

Handel, elementar-synthetische Kegelschnittslehre. Zum Gebrauch an höheren Lehranstalten bearb. Berlin, Weidmann'sche Buchh. 1 Mk. 40 Pf.

Kraft, F., Abriss d. geometrischen Kalküls. Nach den Werken H. G. Grassmann's bearb. Leipzig, Teubner. 6 Mk.

Küpper, C., Bestimmung der Minimalgruppen f. C^m, das heisst der Gruppen v. kleinster Punctzahl, welche in Beziehg. zu Curven m^{ter} Ordng. normale Lagen haben. Prag, Rivnáč, Verl. 90 Pf.

Lange, J., synthetische Geometrie der Kegelschnitte uebst Uebungsaufgaben, f. die Prima höherer Lehranstalten. Berlin, H. W. Müller. 1 Mk. 20 Pf.

Leonhardt, G., Grundzüge der Trigonometrie u. Stereometrie f. den 16. Jahreskursus höherer Lehranstalten. Halle, Strien, Verl., 1 Mk. 20 Pf.

Močnik, F., Ritter v., die geometrische Formenlehre in der Volksschule. Eine Anleitg. f. Lehrer zur Ertheilg. d. geometr. Unterrichtes. 4. Aufl. Leipzig, Freytag. Geb. 1 Mk. 10 Pf.

Rüefli, J., Lehrbuch der Stereometrie, uebst e. Sammlg. v. Uebungsaufgaben. Zum Gebrauche an Sekundaschulen, Realschulen u. Gymnasial-Anstalten bearb. 2. Aufl. Bern, Schmid, Francke & Co., Verl. Kart. 1 Mk. 60 Pf.

Stahl, H., u. V. Kommerell, die Grundformen der allgemeinen Flächentheorie. Leipzig, Teubner. 4 Mk.

Sturm, R., die Gebilde 1. u. 2. Grades der Liniengeometrie in synthetischer Behandlung. II. Thl. Die Strahlencongruenzen. Ebd. 12 Mk.

Wagner, H, Lehrbuch der ebenen Geometrie u. Aufgabensammlung f. Realschulen. 2. Aufl. Hamburg, Gräfe & S. Kart. 2 Mk. 20 Pf.

Weyr, E., üb. abgeleitete J_n^n—1 auf Trägern vom Geschlechte Eins. Leipzig, Freytag. 40 Pf.

— über Vervollständigung v. Involutionen auf Trägern vom Geschlechte Eins u. üb. Steiner'sche Integrale. Ebd. 50 Pf.

— üb. Vervollständigung v. Involutionen auf Trägern vom Ge-

schlechte Eins u. üb. Steiner'sche Polygone. (II. Mittheilg.) Ebd. 90 Pf.

Zetzsche, K. E., Katechismus der ebenen u. räumlichen Geometrie. 3. Aufl. Leipzig, J. J. Weber. Geb. in Leinw. 3 Mk.

Zwicky, M., Grundriss der Planimetrie u. Stereometrie nebst Uebungsaufgaben. 1. Tl.: Planimetrie. Bern, Schmid, Francke & Co., Verl. Kart. 1 Mk. 50 Pf.

Trigonometrie.

Genau, A., die Logarithmen u. die ebene Trigonometrie. Büren, Hagen. Geh. 1 Mk. 10 Pf.

Praktische Geometrie, Geodäsie.

Ganss, F. G., die trigonometrischen u. polygonometrischen Rechnungen in der Feldmesskunst. 2. Aufl. 8. u. 9. (Schluss-) Hft. Halle, Strien, Verl. à 3 Mk. 50 Pf.

— dasselbe. 2. Aufl. Kplt. Ebd. 36 Mk.; geb. 37 Mk. 50 Pf.

Koll, O., die Theorie der Beobachtungsfehler u. die Methode der kleinsten Quadrate m. ihrer Anwendung auf die Geodäsie u. die Wassermessungen. Berlin, Springer. 10 Mk.; geb. 11 Mk. 20 Pf.

Liznar, J., eine neue magnetische Aufnahme Oesterreichs. (4. vorläuf. Bericht.) Leipzig, Freytag. 30 Pf.

Zeitschrift f. Vermessungswesen. Hrsg. v. W. Jordan u. C. Steppes. 22. Bd. Jahrg. 1893. (24 Hfte.) 1. Hft. Stuttgart, Wittwer's Verl. Jährlich 9 Mk.

Mechanik.

Finger, J., üb. jenes Massenmoment e. materiellen Punktsystems, welches aus dem Trägheitsmomente u. dem Deviationsmomente in Bezug auf irgend eine Axe resultirt. Leipzig, Freytag, 50 Pf.

Huber, Ph., Katechismus der Mechanik. 5. Aufl. Leipzig, J. J. Weber. Geb. in Leinw. 3 Mk.

Rausenberger, O., Lehrbuch der analytischen Mechanik. In 2 Bdn. 2., wohlf. (Titel-) Ausg. in 1 Bde. Leipzig, Teubner. 8 Mk.

Technik.

Echo, elektrotechnisches. Hrsg. n. Red.: M. Krieg. 6. Jahrg. 1823. (52 Hfte.) 1. Hft. Leipzig, Leiner. Vierteljährlich 3 Mk.

Exner, F., Elektrotechnische Untersnchungen. (III. Mittheilg.) Leipzig, Freytag. 60 Pf.

Krämer, J., Construction n. Berechnnng f. 12 verschiedene Typen v. Dynamo-Gleichstrom-Maschinen. Für Maschinen-Ingenieure n. Elektrotechniker bearb. Mit 16 Taf., woven 8 in Farhendr., als Zeichnnngs-Vorlagen bei Constructions-Arbeiten, m. erläut. Text u. 18 Fig. Leipzig, Leiner. Kart. 10 Mk.

Kröhncke, G. A. H., Handhnch znm Ahstecken v. Cnrven anf Eisenhahn- n. Wegelinien. Für alle vorkomm. Winkel u. Radien anfs sorgfältigste berechnet n. hrsg. 12. Anfl. Leipzig, Teubner. Geb. 1 Mk. 80 Pf.

Schuhr's, G., elektrotechnisches Adressbnch f. 1893. Eine Sammlg. v. Adressen d. Elektrotechniker n. elektrotechn. Firmen d. In- u. Anslandes, geordnet in 3 Thle. nach Namen, Orten n. e. Bezngsquellen-Verzeichniss. Berlin, Schuhr. Kart. 5 Mk.

Thompson, S. P., die dynamoelektrischen Maschinen. Ein Handbnch für Studirende der Elektrotechnik. 4. Anfl. Deutsche Uebersetzg. v. C. Grawinkel. 5. u. 6. Hft. Halle, Knapp. à 2 Mk.

Zeitschrift, elektrotechnische. (Centralblatt f. Elektrotechnik.) Red. v. F. Uppenhorn. 14. Jahrg. 1893. (52 Hfte.) 1. Hft. Berlin, Springer. Jährlich 20 Mk.

Optik, Akustik nnd Elasticität.

Centralzeitnng f. Optik u. Mechanik. Red.: O. Schneider. 14. Jahrg. 1883. (24 Nrn.) Nr. 1. Leipzig, Gressner & Schr. Vierteljährlich 2 Mk.

Erd- und Himmelskunde.

Beobachtnngen, dentsche überseeisch-meteorologische. Gesammelt n. hrs. v. der deutschen Seewarte. 5. Hft. Hamburg, Friedcrichsen & Co. 10 Mk.

Berfried, E., Tafeln znr Veranschaulichung der Ansgestaltung der christlichen Osterrechnnng. Mittelwalde, Hoffmann. 8 Mk.

Elster, J., n. H. Geitel, Elmsfeuerbeobachtungen anf dem Sonnblick. Leipzig, Freytag. 2 Mk.

Hartl, H., Bestimmung v. Polhöhe n. Azimut anf der Sternwarte in Athen. Ebd. 1 Mk. 60 Pf.

Himmel u. Erde. Illustr. naturwissenschaftl. Monatsschrift. Hrsg. v. der Gesellschaft Urania. Red.: M. W. Meyer. V. Jahrg. Octbr. 1892 bis Septbr. 1893. 4. Hft. Berlin, Herm. Paetel. Vierteljährlich 3 Mk. 60 Pf.

Hoernes, R., Erdbebenkunde. Die Erscheingn. u. Ursachen der Erdbeben, die Methoden ihrer Beobachtg. Leipzig, Veit & Co. 10 Mk.

Jahrbuch, Berliner astronomisches, f. 1895, m. Angaben f. die Oppositionen d. Planeten (1)—(310) f. 1893. Hrsg. v. dem Rechen-Institute der königl. Sternwarte zu Berlin unter Leitg. v. F. Tietjen. Berlin, Dümmler's Verl. 12 Mk.

Jahrbuch, deutsches meteorologisches, 1892. Bayern. Beobachtungen der meteorolog. Stationen im Königr. Bayern, hrsg. von der königl. meteorolog. Central-Station durch C. Lang u. F. Erk. 14. Jahrg. 1892. 1. Hft. München, Theod. Ackermann, Verl. Jährlich 18 Mk.

Jahrbuch der meteorologischen Beobachtungen d. Wetterwarte der Magdeburgischen Zeitung. Hrsg. v. A. W. Grützmacher. X. Bd. XI. Jahrg. 1891. Magdeburg, Faber'sche Buchdr. Kart. 6 Mk.

Kalender, astronomischer, f. 1893. Nach dem Muster d. K. v. Littrow'schen Kalenders hrsg. v. der k. k. Sternwarte. Neue Folge. 12. Jahrg. Wien, C. Gerold's S., Verl. Kart. 2 Mk.

Kölbenheyer, H., Untersuchungen üb. die Veränderlichkeit der Tagestemperatur. Leipzig, Freytag. 50 Pf.

Mittheilungen der Vereinigung v. Freunden der Astronomie u. kosmischen Physik. Red. v. W. Foerster. 3. Jahrg. 1893. 10 bis 12 Hfte. Berlin, Dümmler's Verl. 6 Mk.

Nachrichten, astronomische. Hrsg.: A. Krueger. 132. Bd. Nr. 1. Hamburg, Mauke Söhne. Für den Band 15 Mk.

Pfeil, L. Graf v., Protuberanzen, Meteoriten, Weltennebel u. Kometen. Berlin, Dümmler's Verl. 60 Pf.

Schück, A., magnetische Beobachtungen auf der Nordsee, angestellt in den J. 1884 bis 1886, 1890 u. 1891. Hamburg, A. Schück's Selbstverl. 6 Mk.

See, Th. J. J., die Entwickelung der Doppelstern-Systeme. Diss. Berlin, Friedländer & S. 6 Mk.

Sirius. Zeitschrift f. populäre Astronomie. Red.: H. J. Klein. 26. Bd. od. Neue Folge 21. Bd. (12 Hfte.) 1. Hft. Leipzig, Scholtze. Für den Band 12 Mk.

Stern, P., Ergebnisse zwanzigjähriger meteorologischer Beobachtungen der Station Nordhausen a. Harz. Leipzig, Fock, Verl. 1 Mk.

Sternkarte, drehbare. Der Sternhimmel zu jeder Stunde d.

Jahres. Ausg. f. Mitteleuropa. 11. Aufl. Frankfurt a./M., Deutsche Lehrmittel-Anstalt. 1 Mk. 25 Pf.; transparent 1 Mk. 60 Pf.; m. Beleuchtungsapparat 1 Mk. 80 Pf.; als Lichtschirm zum Aufhängen 1 Mk. 75 Pf.; m. Lichtschirmständer 5 Mk.

Tuma, J., Luftelektricitätsmessungen im Luftballon. Leipzig, Freytag. 20 Pf.

Veröffentlichungen d. Rechen-Instituts der königl. Sternwarte zu Berlin. Nr. 2. Berlin, Dümmler's Verl. 1 Mk. 60 Pf.

Veröffentlichungen der grossherzl. Sternwarte zu Karlsruhe. Hrsg. v. W. Valentiner. 4. Hft. Karlsruhe, Braun'sche Hofbuchh., Verl. 20 Mk.

Vierteljahrsschrift der astronomischen Gesellschaft. Hrsg. v. R. Lehmann-Filhès u. H. Seeliger. 27. Jahrg. 1892. 3. Hft. Leipzig, Engelmann. 2 Mk.

Weiss, E., Untersuchung der systematischen Differenzen einiger südlichen Sternkataloge. Leipzig, Freytag. 2 Mk. 40 Pf.

Wetter, das. Meteorologische Monatsschrift f. Gebildete aller Stände. Hrsg. v. R. Assmann. 10. Jahrg. 1893. 1. Hft. Braunschweig, Salle. Jährlich 6 Mk.

Wislicenus, W. F., Tafeln zur Bestimmung der jährlichen Auf- u. Untergänge der Gestirne. Publication der astronom. Gesellschaft. XX. Leipzig, Engelmann. 6 Mk.

Zeitschrift, meteorologische. Hrsg. im Auftrage der österreich. Gesellschaft f. Meteorologie u. der deutschen meteorolog. Gesellschaft, red. v. J. Hann u. G. Hellmann. 10. Bd. 1893. 12 Hfte. Wien, Hölzel's Verl. 20 Mk.

Nautik.

Albrecht, M. F. u. C. S. Vierow, Lehrbuch der Navigation u. ihrer mathematischen Hülfswissenschaften. Für die königl. preuss. Navigations-Schulen bearb. 7. Aufl. Berlin, v. Decker's Verl. 12 Mk.; geb. in Leinw. 13 Mk. 50 Pf.

Ludolph, W., Leuchtfeuer u. Schallsignale der Erde. 22. Jahrg. 6. Aufl. Ergänzungsheft 1893. Bremen, Heinsius Nachf. 50 Pf.

— dasselbe in Ostsee, Nordsee u. Kanal. 22. Jahrg. 6. Aufl. Ergänzungsheft 1893. Ebd. 50 Pf.

Mittheilungen aus dem Gebiete d. Seewesens. Hrsg. vom k. k. hydrograph. Amte, Marine-Bibliothek. 21. Bd. Jahrg. 1893. 12 Hfte. Wien, Gerold's S. 12 Mk.

Nachrichten f. Seefahrer. Hrsg. v. dem hydrograph. Amt d. Reichs-Marine-Amts. XXIV. Jahrg. 1883. (52 Nrn.) Nr. 1. Berlin, Mittler & S. Vierteljährlich 1 Mk.

Verzeichniss der Leuchtfeuer u. Nebelsignalstationen aller Meere. Hrsg. v. dem hydrograph. Amt d. Reichs Marine-Amts. 1.—8. Hft. Abgeschlossen Mitte Februar 1893. Berlin, Mittler & S. 6 Mk.; Einbde. à 50 Pf.

Physik.

Adler, G., üb. die an Eisenkörpern im Magnetfelde wirksamen Oberflächenspannungen. Leipzig, Freytag. 30 Pf.

Annalen der Physik u. Chemie. Hrsg. v. G. Wiedemann. Jahrg. 1893. (12 Hfte.) 1. Hft. Leipzig, J. A. Barth. Jährlich 36 Mk.

Handbuch der Physik, hrsg. v. A. Winkelmann. 3. Abth. 13. Lfg. Breslau, Ed. Trewendt, Verl. 3 Mk. 60 Pf.

— dasselbe. 3. Bd. 1. Abth. Ebd. 15 Mk.; geb. in Halbfrz. 17 Mk. 40 Pf.

Herzog, J., u. C. P. Feldmann, die Beobachtung elektrischer Leitungsnetze in Theorie u. Praxis. Berlin, Springer. Geb. 12 Mk.

Hochenegg, C., Anordnung u. Bemessung elektrischer Leitungen. Ebd. Geb. 6 Mk.

Jäger, G., üb. die Temperaturfunction der Zustandsgleichung der Gase. Leipzig, Freytag. 30 Pf.

Müller, J., die Lehre v. der Elektrizität u. den Magnetismus. Ein Lehrbuch zur Einführg. in das Studium der Elektrotechnik m. vielen Uebungsaufgaben. Mittweida, Polytechn. Buchh. 7 Mk. 50 Pf.

Neumann, C., Beiträge zu einzelnen Theilen der mathematischen Physik, insbesondere zur Elektrodynamik u. Hydrodynamik. Elektrostatik u. magnetischen Induction. Leipzig, Teubner. 10 Mk.

Seelig, E., Molekularkräfte. Physikalisch-chem. Studie der verschiedenen Körperzustände. 2. Aufl. Durch zahlreiche Tabellen vervollständigt. Berlin, Friedländer & S. 2 Mk. 40 Pf.

Stefan, J., üb. das Gleichgewicht der Elektricität auf e. Scheibe u. e. Ellipsoid. Leipzig, Freytag. 30 Pf.

Vermischte Schriften.

Berichte, mathematische u. naturwissenschaftliche, aus Ungarn. Red. J. Fröhlich. 10. Bd. (Octbr. 1891 bis Octbr. 1892.) 1. Hälfte. Berlin, Friedländer & S. 4 Mk.

Berichte üb. die Verhandlungen der königl. sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften zu Leipzig. Mathematisch-physikal. Classe. 1892. V. u. VI. Leipzig, Hirzel. à 1 Mk.

Burckhardt, W., mathematische Unterrichts-Briefe. Für das Selbst-Studium Erwachsener. Mit besond. Berücksicht. der ange-

wandten Mathematik bearb. III. Kurs. 2. Aufl. Gera, Griesbach's Verl. 8 Mk. 40 Pf.

Denkschriften der kaiserl. Akademie der Wissenschaften. Mathematisch-naturwissenschaftl. Classe. 59. Bd. Leipzig, Freytag. Kart. 68 Mk.

Journal f. die reine u. angewandte Mathematik. Hrsg. v. L. Fuchs. III. Bd. 4 Hfte. (1. Hft.) Berlin, Georg Reimer. Für den Band 12 Mk.

Mittheilungen, mathematische u. naturwissenschaftliche, aus den Sitzungsberichten der königl. preussischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin. Jahrg. 1893. Ebd. 8 Mk.

Mittheilungen der mathematischen Gesellschaft in Hamburg. III. Bd. 3. Hft. Red. v. Repsold, Jaerisch u. Busche. Leipzig, Teubner. 1 Mk. 50 Pf.

Monatshefte f. Mathematik u. Physik. Mit Unterstützg. d. hohen k. k. Ministeriums f. Cultur u. Unterricht hrsg. v. C. v. Escherich u. E. Weyr. IV. Jahrg. 1893. 12 Hfte. Wien, Eisenstein & Co. 14 Mk.

Sitzungsanzeiger d. kaiserl. Akademie d. Wissenschaften. Mathematisch-naturwissenschaftl. Classe. Jahrg. 1893. ca. 30 Nrn. Leipzig, Freytag. 3 Mk.

Sitzungsberichte der mathematisch-physikalischen Classe der k. b. Akademie der Wissenschaften zu München. 1892. 3. Hft. München, Franz'scher Verl. 1 Mk. 20 Pf.

Sitzungsberichte der königl. böhmischen Gesellschaft d. Wissenschaften. Mathematisch-naturwissenschaftl. Classe. Jahrg. 1892. Prag, Rivnáč, Verl. 9 Mk. 60 Pf.

Sitzungsberichte der kaiserl. Akademie der Wissenschaften. Mathematisch-naturwissenschaftl. Classe. Abth. IIa. Abhandlungen aus dem Gebiete der Mathematik, Astronomie, Physik, Meteorologie u. der Mechanik. 101. Bd. 8. u. 9. Hft. Leipzig, Freytag. 11 Mk. 50 Pf.

Zeitschrift f. mathematischen u. naturwissenschaftlichen Unterricht, hrsg. v. J. C. V. Hoffmann. 24. Jahrg. 1893. 8 Hfte. Leipzig, Teubner. 12 Mk.

Litterarischer Bericht

XLVIII.

Lehrbücher.

Die bestimmten algebraischen Gleichungen des ersten bis vierten Grades nebst einem Anhang: Unbestimmte Gleichungen. Für höhere Unterrichtsanstalten sowie für den Selbstunterricht bearbeitet von P. Michelsen. Hannover 1893. Carl Meyer. 306 S.

Als Zweck des Vorliegenden wird angegeben, dem Lernenden Schwierigkeiten überwinden zu helfen und ihn in der sichern Handhabung der Auflösungsmethoden zu üben. Da durchweg die Lehre von den algebraischen Operationen und Transformationen, soweit sie bei der Lösung von Gleichungen in Anwendung kommen, als bekannt vorausgesetzt wird, so würden beim Uebergange zur Lehre von den Gleichungen wol Schwierigkeiten vor allem in der Verschiedenheit beider Disciplinen zu suchen sein. In jener vollzieht der Schüler nur eine Forderung der Schule ohne Anlass sich um Zweck und Bedeutung zu kümmern, deren Bewusstsein um so leichter schwinden kann, weil die unbenannte und allgemeine Zahl, mit der er operirt, den Gedanken von der Wirklichkeit abzieht. In der letztern soll er lernen die Antwort auf eigene quantitative Fragen selbst zu suchen; hier muss er Zweck und Bedeutung stets im Auge haben. Diese neue Forderung mag Manchen gering erscheinen. Welche Verirrungen und Unklarheiten aber gerade in diesem Punkte noch möglich sind, verraten diejenigen Pädagogen, welche die so-

genannte heuristische Methode der Lösung von Aufgaben empfehlen mit der Behauptung, dass durch sie der Grund des Verfahrens deutlich werde, dahingegen die algebraische Methode zum Resultate führe, man wisse nicht warum, während doch umgekehrt bei ersterer die Kunst so zu fragen, dass sich das Gesuchte ergibt, Geheimniss des Lehrers bleibt, bei letzterer hingegen der ganz einfache Grund nicht nur gelehrt wird, sondern ohne seine Kenntniss gar nicht gerechnet werden kann. Die genannte fundamentale Schwierigkeit ist es indes weniger, die der Verfasser betont; es soll vielmehr, weil die Gleichungen sehr mannigfaltig complicirt gegeben sein können, auch der kürzeste Weg der Lösung und mancher Rechnungsvorteil gezeigt werden. Hiergegen ist zu erinnern, dass man Schwierigkeiten, welche die Ausführung von Operationen bietet, nicht als solche der Gleichungslehre zu betrachten hat. Sind die Aufgaben complicirter als in den vorausgehenden Uebungen der Operationen vorgesehen ist, so wird nur aus diesem Grunde die Arbeit grösser. Rechnungsvorteile kann man eher zu viele als zu wenige mitteilen: die selbst gefundenen sind jedem Rechner nützlicher als die mitgeteilten; jedenfalls sollte man den Schülern einen Rechnungsvorteil erst dann angeben, wenn die Erfahrung vorliegt, dass sie einen zu langen Weg gewählt haben. Zu diesen Rechnungsvorteilen ist aber die wolgeordnete Reihenfolge der Reductionen der Gleichungen, die der Verfasser besonders damit gemeint zu haben scheint, nicht zu zählen, denn diese ist zum Beweise der Erreichbarkeit bestimmter Grundformen notwendig. In beiden Beziehungen findet man in der Ausführung keinen Grund Erhebliches auszusetzen: die für den Anfänger wichtige Bemerkung, dass eine Gleichung (resp. Ungleichung) der natürliche, nicht erst doctrinär umgestaltete, Ausdruck jedes quantitativen Urteils ist, findet sich gleich im Anfang ausgesprochen, und an Rechnungsvorteilen zeigt sich kein Uebermass; auch die hervortretende Ausführlichkeit ist als nützlich anzuerkennen. Allein jene natürlichen Schwierigkeiten können noch sehr vermehrt werden durch diejenigen, welche der Lehrer durch unzweckmässigen Lehrgang, mangelhaften Ausdruck, Ausserachtlassen des zum Verständniss Notwendigen u. s. w. selbst schafft, und dies ist nach gegenwärtiger Abfassung der Fall. Es ist eine bekannte Regel, dass man die Schwierigkeiten einer Aufgabe, wo möglich, isoliren muss. Dies geschieht bei Gleichungen für 1 Unbekannte, indem man sie zuerst auf eine Grundform bringt. Von Grundform ist hier gar nicht die Rede, sondern nur vom Ordnen der Gleichung, bei dem indes noch beliebig viele Terme gleichen Grades stehen bleiben, und nicht danach gefragt wird, ob der Coefficient der höchsten Potenz null ist. In der Tat entspricht also die so geordnete Gleichung der Grundform nicht und entscheidet nicht über ihren Grad. Ohne Rücksicht darauf wird

dennoch der Gleichung ein Grad zugeschrieben, nämlich gleich dem „inhaltlich“ höchsten Exponenten der Unbekannten; statt aber das dunkle Wort, welches aushelfen muss, zu erklären, wird nur gesagt, um den wirklichen Grad zu finden, müsse man die Gleichung erst ordnen. Dass man ihn dann findet, wird nicht behauptet. Mit der bald folgenden Aeusserung, der Grad der Gleichung scheine bisweilen höher oder niedriger zu sein, als er wirklich wäre, bekennt der Verfasser im Grunde selbst, dass er den Leser in der Irre herumführt. Im übrigen scheint der Verfasser sehr auf das gefällige Entgegenkommen der Schüler zu rechnen, dass sie stets das denken, was der Lehrer gemeint, aber nicht gesagt hat: das einemal meint er mit einem Buchstaben a eine exclusiv positive Zahl ohne es zu sagen, eine Bedeutung die doch jedenfalls bei der Unbekannten nicht festgehalten wird, ein andresmal meint er mit dem Zeichen $\sqrt{a}$ die Wurzel mit Doppelvorzeichen, sogar wenn in demselben Ausdruck dasselbe Zeichen im Sinne des absoluten Wertes gebraucht ist, beides ohne Erklärung. Von Unachtsamkeiten dieser und mancher Art ist das Buch voll. Das Ganze macht den Eindruck von ungenügender Beherrschung des Lehrstoffs: wäre der Verfasser besser damit vertraut, so würde er z. B. zur Discussion der quadratischen Gleichung gewiss einen kürzeren Weg gewählt haben; er lässt aber sogar ganz unerwähnt, dass Summe und Product der Wurzeln von Anfang bekannt, und aus ihnen deren Vorzeichen unmittelbar ersichtlich sind. Neben allerhand logisch pädagogischen Mängeln zeichnet sich das Buch durch Reichhaltigkeit an Lehren und Uebungen aus.

H o p p e.

Die wichtigsten Rechenregeln nebst Musterbeispielen insbesondere Lösung aller Aufgaben der Regeldetri und der darauf beruhenden Rechnungsarten vermittelst einheitlicher Behandlung des Ansatzes. Zur Wiederholung für die Schüler aller Anstalten bearbeitet von Dr. phil. R. O l b r i c h t, Oberlehrer am Königlichen Realgymnasium zu Döbeln. Leisnig 1893. Herrm. Ulrich. 48 S.

Der erste Teil des Buches ist eine kurzgefasste Zusammenstellung des Inhalts der numerischen Rechenlehre mit unbenannten und benannten Zahlen. Der zweite Teil ist darauf gerichtet, die Regeldetri zu einem gleichmässig geordneten Algorithmus zu gestalten. Er setzt voraus, dass der Schüler nur Aufgaben bekommt, bei denen die 4 Glieder wirklich in geometrischer Proportion stehen, und sagt nichts davon, woran er dies erkennen soll. Es handelt sich also hier nur um Ausführung von Vorschriften ohne Urteil. H.

Lehrbuch der analytischen Geometrie der Ebene für höhere Schulen. Von Dr. **Bernhard Hercher**, ordentlichem Lehrer am Grossh. Gymnasium zu Jena. Erweiterter Sonder-Abdruck aus dem Lehrbuch der Geometrie von demselben Verfasser. Leipzig 1893. Carl Jacobsen. 37 S.

Das Buch hat nicht im entferntesten etwas mit analytischer Geometrie zu tun: es gibt weder eine Grundlage geometrischer Untersuchung, noch eine Deduction auf allgemeiner Grundlage, sondern teilt nur einige Eigenschaften gewisser Raumgebilde mehr resultatweise als begründet mit, denen dann und wann das Allgemeinere gleichsam als nebensächlich beigefügt wird. Der Hauptgegenstand sind die Kegelschnitte. Voraus geht einiges über ebene Coordinaten in Aufgaben und deren Resultaten mit bloss nominellen Erklärungen, zumteil so ausgesprochen, dass man nicht erkennen kann, was der Verfasser mit den Namen bezeichnen will, z. B.: „Die Axen bilden das Coordinatensystem". — „Die Function . . . heisst die Gleichung der Linie". — Die Parabel, Ellipse, Hyperbel mit denjenigen Focaleigenschaften, welche hernach zugrunde gelegt werden, werden einzeln aus Schnitten des geraden Kegels mit der Ebene stereometrisch hergeleitet, die Construction, Tangente, Polargleichung, Quadratur, Kubatur der Rotationsfigur und die Trisection des Winkels mit Coordinaten behandelt. Bei der Winkeltrisection hat der Verfasser nicht beachtet, dass man mit einem einzigen Kegelschnitt alle Winkel dreiteilen kann; er verlangt vielmehr für jeden gegebenen Winkel eine besondere Curvenconstruction.

Hoppe.

Grundzüge der Trigonometrie und Stereometrie für den sechsten Jahrescursus höherer Lehranstalten bearbeitet von Dr. **Georg Leonhardt**, Oberlehrer am Herzogl. Friedrichs-Realgymnasium in Dessau. Halle a. S. 1893. Eugen Strien. 71 S.

Das erstere der zwei gesonderten Lehrbücher behandelt die Theorie und Praxis der Dreiecksaufgaben vollständig und fügt noch einige Vermessungsaufgaben hinzu, gibt dagegen von der Goniomètrie nur soviel, als für Begriffserklärung und Gebrauch der Tafeln notwendig ist, übergeht also alle algebraischen Relationen der Functionen sowie die Formeln für die Functionen der Summe zweier Winkel. Die Deductionsmethode ist für jedes Einzelne selbständig gewählt, einfach und vernünftig und recht ausführlich entwickelt, leider auch, wozu die Ausführlichkeit leicht verleitet, mit der logisch fehlerhaften Wiederholung schon gelieferter Beweise. War z. B. die Sinusproportion an einem beliebigen Seitenpare bereits be-

wieson, so durfte sio nicht an oinem andern Pare besonders bewieseu werden. Man kann schwer begreifenden Schülern zn Hülfe kommen, darf aher uicht die Unachtsamkeit noch begünstigen. In der Stereometrie hat der Verfasser oiner „Vorschrift" gemäss die Körperberechnung zum Anfang gemacht und die Lehre von der relativen Lage der Geraden nnd Ebeneu nachfolgen lassen. Er hat damit handgreiflich ans Licht gestellt, dass die „Vorschrift" gauz unerfüllbar ist. Sätze vorläufig anwendon nnd nachträglich bewoisen kann mau doch nnr, wonn die darin vorkommenden Worte einen verständlichen Sinn haben. Wie kann man aber einen mathematischen Körper bestimmen ohne von gegenseitiger Lage von Gebildon im Ranme zn redon? Die Beschreibung des Prismas fängt im Buche mit den Worten an: „Errichtet man in den Endpnnkten eines Rechtecks *ABCD* Lote in den Raum hinein — ". Woranf die Lote senkrecht stcheu sollen, konnte der Verfasser nicht sagen; denn von Loton anf eine Ebeue dnrfto uicht die Rede sein. Er war also, nm die Vorschrift zn befolgen, gezwungen sinnlos zn schreiben. Das Buch schliesst mit einem Abschnitt über Eigenschaften der Geraden nnd Ebenen, worin alle principiellen Lehren knrz nnd gut geordnet znsammengestellt sind, znerst betreffend die relative Lage, dann den Ausdruck der Neigungen durch Winkel, danu die Abhängigkeit nnd Bedingungen der Lage. Hoppe.

Lehrbnch der Geometrie znm Gebrauch an Gymnasien. Nach den nenen preussischen Lehrplänen bearbeitet von Dr. Bernhard Hercher, ordentlichem Lehrer am Grossh. Gymnasinm zn Jena Erstes Heft. Enthaltend Planimetrie erster Teil einschliesslich der trigonometrischen Berechnung des rechtwinkligen Dreiecks. Anhang: Anfangsgründe der Körperlehre. (Lehraufgabe von Quarta his Untersecunda). — Zweites Heft. Enthaltend Planimetrie nnd Ebene Trigonometrie. (Lehranfgabe der Obersecuuda nnd Unterprima.) — Drittes Heft. Enthaltend Stereometrie nnd Grundlehren von den Kegelschnitten. (Lehraufgabe der Prima.) Leipzig 1893. Carl Jacobsen. 78 + 40 + 64 S.

Das 1. Heft beginnt in Erklärungen und Grundsätzen mit der exacton Gestaltnng der gemeinen Raumanschannng, woran sich nnr 2 Winkelsätze mit leichtem Beweise anschliessen. Die Abfassnng zeichnet sich durch Einfachheit und correcten Ausdrnck aus; 2 Anssagen sind unzntreffend: die Geometrie beschäftigt sich uicht bloss mit Raumgrössen, sondern mit Raumgebilden in quantitativer und qualitativer Hinsicht. Auch iu letzterer Beziehung gehört sie der Mathematik, d. h. Grössenlehre an, weil es

ihr und keiner andern Wissenschaft obliegt die räumlichen Qualitäten (Gestalt und Lage) durch Grössen exact zu bestimmen. — Die Behauptung, für Kreislinie und Kreisfläche würde auch Kreis gesagt. ist irrig. Kreislinie sagt man in der Doctrin im Gegensatz zur Fläche oder aus Rücksicht gegen Unkundige, sonst heisst sie gewöhnlich und mit gutem Grunde Kreis. Im Sinne von Kreisfläche ist das Wort Kreis weder in vulgärer noch in doctrinärer Sprache in Gebrauch, nicht einmal in denjenigen Lehrbüchern, welche den Kreis als Fläche definiren. Euklid's Definition kann für uns nicht massgebend sein. — Nach dieser grundlegenden Einführung beginnt die in Lehrsätzen und Beweisen fortschreitende Entwickelung mit der Parallelentheorie gestützt auf den Grundsatz: Durch einen Punkt ausserhalb einer Geraden lässt sich zu ihr nur eine Parallele ziehen. Dann folgen nach Einschaltung der Lehre von der Symmetrie, die Lehren vom Dreieck, von der Congruenz, vom Viereck, vom Kreise, vom Flächeninhalte, von Proportionalität und Aehnlichkeit. Der Fall der Irrationalität wird erwähnt, aber die Ergänzung der Lehre für Prima vorbehalten. So lange sollen die Schüler das Unbewiesene für bewiesen hinnehmen?! Nun wird durch Berechnung des rechtwinkligen Dreiecks (einschl. d. pythagoräischen Lehrsatz) auf die Elemente der Trigonometrie und auf die Kreisberechnung hingeleitet. Die Körperberechnung ist in den Anhang des 1. Hefts gebracht worden; es war dies eine leidliche Auskunft, um zugleich der Schulvorschrift und auch Platon's Vorschrift „Μηδεὶς ἀγεωμέτρητος εἰς ἴτω" nachzukommen, indem der unmathematischen Behandlung ein Platz ausserhalb der eigentlichen Doctrin angewiesen ward. Im 2. Hefte werden einige Lehren der neuern synthetischen Geometrie für den Gymnasialunterricht nutzbar gemacht; dann folgt die ebene Trigonometrie in vollem Umfange. Im 3. Hefte beginnt die Stereometrie correcterweise mit der Lage der Geraden und Ebenen. Dann folgt die Lehre von den Körpern und ihrer Inhaltsberechnung im elementaren Umfange, dann die Coordinatenlehre nebst Anwendung auf die Kegelschnitte und im Anhang Quadratur der Parabel und Ellipse, Kubatur des Rotationsellipsoids. Hoppe.

Lehrbuch der Stereometrie. Auf Grund von Dr. Ferd. Kommerell's Lehrbuch neu bearbeitet und erweitert von Dr. Guido Hauck, Geh. Regierungsrat und Professor an der Königl. Technischen Hochschule zu Berlin. Siebente Auflage. (Sechste der Neubearbeitung.) Mit 67 in den Text eingedruckten Holzschnitten. Tübingen 1893. H. Laupp. 225 S.

Dies Buch ist in 4. Auflage im 251. litterarischen Bericht

Seite 22 besprochen. In den folgenden Auflagen haben mancherlei, jedoch nur unerhebliche Aenderungen stattgefunden. H.

Grundriss der Geometrie für höhere Lehranstalten mit zahlreichen Uebungsaufgaben und in den Text gedruckten Figuren. Von Dr. Richard Sellentin, Professor an der Oberrealschule zu Elberfeld. Erster Teil. Planimetrie. Köln 1893. M. Du Mont-Schauberg. 163 S.

Das Lehrbuch ist sehr reichhaltig; es beschränkt sich nicht auf das Notwendige zur Vollständigkeit der Principien, doch ist jede Zugabe, sei es dass der Schule die erforderliche Zeit zu Gebote steht oder dass der Privatfleiss sich ihr widmet, ganz geeignet eine rechte Vertrautheit mit der geometrischen Praxis zu erzeugen. Die Themata, sowie ihre Reihenfolge, sind bis auf zwei, aus der neuern synthetischen Geometrie aufgenommene, die gewöhnlichen, jedes für sich recht weit ausgeführt und fortgeführt. Exacte Logik mag in den meisten Deductionen vorhanden sein; in der Entwickelung der Paralleltheorie jedenfalls herrscht die grösste Confusion. An der Grundlage einer correcten Behandlung der Winkelsätze lässt es der Verfasser in keinem Stücke fehlen: der notwendige Grundsatz ist ausgesprochen, die Grössenvergleichung der Winkel ausdrücklich gezeigt, der Begriff der gleichen und ungleichen Richtung definirt; es war daher leicht die Winkelsätze an Parallelen zugleich exact und anschaulich zu beweisen. Aber dies geschieht nicht; als ob der Verfasser nicht verstanden hätte, wozu die selbst gegebene Belehrung dienen soll, lässt er auf die Lehrsätze einen angeblichen Beweis folgen, in welchem der Grundsatz gar nicht in Anwendung kommt, und der in versteckter Form das Zubeweisende zur Voraussetzung macht. Mangel an Orientirung zeigt sich schon dadurch, dass er dem Leser überlässt, die Definition der Richtung aus zwei weit getrennten Stellen des Buches zusammenzusetzen. Die erste lautet: „Parallele Linien sind Linien, welche dieselbe Richtung haben d. h. Linien, welche beliebig verlängert sich nicht schneiden". Das sind offenbar 2 Definitionen, die der gleichen Richtung und der Parallelität, zwei Wörter für denselben Begriff, beide bedeuten, dass die Linien sich nicht schneiden. Die Definition der gleichen Richtung wird nun später ergänzt zur vollen Bestimmung des relativen Begriffs der Richtung überhaupt durch die Angabe: „Der Richtungsunterschied zweier geraden Linien wird durch den Winkel derselben gemessen". Beide Angaben erschöpfen die möglichen Fälle. Zwei ungleich gerichtete Gerade schneiden sich, und der Winkel, den sie dann stets bilden, ist zu verstehen unter dem Richtungsunter-

schiede. An diese Erklärung haben wir uns zu halten, um den angeblichen Beweis für die Gleichheit der Gegenwinkel an Parallelen zu verstehen. Er beginnt: „Da jene Linien parallel sind, so haben sie auch gleiche Richtung (d. h. sie schneiden sich nicht), also haben sie auch gegen die schneidende Gerade dieselbe Neigung oder denselben ‚Richtungsunterschied" (d. h. sie bilden mit ihr gleiche Winkel). Als selbstverständlich voransgesetzt ist demnach, dass aus dem Sich-nicht-schneiden zweier Geraden die Gleichheit der Gegenwinkel folgt, und das eben sollte bewiesen werden.

Hoppe.

Anfangsgründe der Arithmetik und Algebra für höhere Lehranstalten.

Trigonometrie für höhere Lehranstalten.

Nach den neuen Lehrplänen bearbeitet von Karl Schwering, Director des stiftischen Gymnasiums in Düren. (Letzteres:) Mit 16 Figuren. Freiburg im Breisgau 1893. Herder. 79 + 52 S.

Der Vortrag besteht in einer ganz ungebundenen Besprechung, welche nach freiem Ermessen in jedem einzelnen Falle mit der allgemein gefassten Lehre oder mit Vorführung von Beispielen beginnt. Den verbindenden Faden in theoretischer wie in pädagogischer Hinsicht kann nur der Kundige durchschauen, der Lernende wird nicht zum Mitwisser gemacht und kann daher nicht das Bewusstsein haben eine höhere Stufe des Wissens erreicht, sondern nur mehr Lehren hinzuerhalten zu haben. Die Reihenfolge der Themata erscheint ziemlich unmotivirt. Die Teile der Gleichungslehre sind zwischen Abschuitte von Operationen eingeschoben, mit denen sie in keiner nahen Beziehung stehen. Das Ganze ist in 3 Lehrgänge geteilt, deren zweiter mit der Einführung der Negativen beginnt, nachdem bereits im ersten die Reduction der algebraischen Gleichungen auf die Normalform, nach Graden geordnet, resultatweise aufgestellt war. Diese würde, um exact zu verfahren, offenbar dahin zu berichtigen sein, dass statt aller + Zeichen ± gesetzt würde. Es ist nämlich wiederholt darauf aufmerksam gemacht worden, dass auf dem Standpunkte des 1. Lehrgangs, wo alle Zahlen absolute sind, gewisse Aufgaben in gewissen Fällen als unlösbar auftreten. Hier bei den Normalformen hingegen geschieht dies nicht: obgleich keine Unmöglichkeit der verlangten Ausrechnungen vorliegt, und doch ein anderes Resultat gefunden wird als das angegebene, ist kein Wort davon gesagt, dass die aufgestellten Formen auf dem Standpunkte des 1. Lehrgangs nicht immer erreichbar sind. Dem Vorstehenden

liegt es fern, Nachlässigkeiten der Bearbeitung zu rügen; aber auch der folgende Gesichtspunkt, welcher dem Vorgehen eine gewisse Rechtfertigung zu verleihen scheinen könnte, soll dem Verfasser nicht zudictirt werden; vielmehr handelt es sich nur darum einen Punkt der Didaktik, dem trotz aller Wirkung im grossen die Beachtung gefehlt hat, hier ohne Abschweif von der Sache zu besprechen. Es kann nämlich in Frage kommen, ob es zu empfehlen sei, dass der Schüler, der nach gewöhnlicher Unterrichtsweise im Genusse der Vorteile der heutigen Arithmetik nie Anlass bekommt den Wert der Fortschritte, die der historische Entwickelungsgang erst in mehr als 1000 Jahren gemacht hat, durch eigene Erfahrung kennen und empfinden lerne, indem er zuerst beim Rechnen mit allgemeinen Zahlen sich in Gefahr befindet unberechtigte Schlüsse zu machen, dann auf Grenzen der Gültigkeit aufmerksam werden muss, endlich von dieser mühevollen Arbeit erlöst wird durch den Begriff der algebraischen Zahl. Einer solchen Führung entspricht in der Tat das Verfahren im vorliegende Buche. Es soll nicht bestritten werden, dass eine derartige Beteiligung am Entdeckungsprocess manchem Schüler nützlich sein kann, dass er vielleicht sogar aus anfänglichem Irren und Fehlen Gewinn ziehen mag. Aber eine viel wichtigere Erwägung von andrer Seite steht doch einer wissentlichen pädagogischen Verwendung des fraglichen Förderungsmittels warnend entgegen. In der Wissenschaft wie im praktischen Leben herrscht bekanntlich bei der Menge die Neigung am Unbewiesenen solange festzuhalten bis das Gegenteil bewiesen ist. Im praktischen Leben ist die Verderblichkeit dieser Regel besonders häufig durch erfolgreiche Speculationen, denen die Menge zuströmte, bis der Krach ein Ende machte, ans Licht gestellt. In Betreff der Wissenschaft ist wol ein recht nahe liegender Beleg dafür, wie stark jene Neigung waltet, folgender. Kant hatte die Existenz der Mathematik als hinreichenden Beweis der Möglichkeit synthetischer Erkenntniss apriori aufgestellt. Gauss und Riemann bewiesen dagegen, dass die Geometrie auf Erfahrungen beruht. Weil nun in Betreff der Arithmetik Kant's unbegründete Meinung noch nicht widerlegt ist, so wird noch heute von Vielen die Arithmetik als reine Wissenschaft apriori der Geometrie entgegengesetzt. Es würde von der Sache abführen, wollten wir hier darauf eingehen, wie jene Verkehrtheit der einzige Grund ist, warum manche principielle Fragen jahrhundertelang nicht gelöst werden konnten. Die Mathematik ist in der glücklichen Lage, jener verderblichen Neigung mit strenger Controle entgegentreten zu können, indem sie stets vom Evidenten zum Evidenten fortschreitet. Daher ist es auch Pflicht des mathematischen Unterrichts diese Errungenschaft Euklid's aufrecht zu halten, und das ist nur möglich, wenn jeder Satz auf derselben Stufe, wo er gelehrt wird,

auch in vollem Umfang apodiktisch eingesehen werden kann. Es heisst die falsche Neigung begünstigen, wenn man Beweise oder Ergänzung von Erklärungen einer höhern Stufe vorbehält. In Anwendung auf das vorliegende Buch folgt daraus, dass es unbedingt notwendig gewesen wäre, nach der Subtraction auch die Erweiterung des Zahlbegriffs zu lehren, ehe von algebraischen Transformationen die Rede war, welche auf den neuen Begriff fussen.

Das Vorwort des Verfassers zur „Trigonometrie" macht sich auffällig durch Schmähungen, die er ohne deutliche Angabe, wem und welcher Sache sie gelten sollen, in allgemeinen Phrasen in die Welt hinein schleudert, mit denen er aber nach allem weder jemandem hat kränken noch irgend eine Leistung hat herabsetzen, sondern nur sein eigenes Werk als etwas ganz neues hat anpreisen wollen. Er sagt, es unterschiede sich in nicht wenigen Punkten von bisherigen Bearbeitungen des gleichen Gegenstandes, nennt aber keinen einzigen, sondern deutet zur Charakterisirung der bisherigen Methode nur auf einen „hoffentlich für immer beseitigten Gedanken" hin, ein wissenschaftliches Lehrgebäude dem Anfänger von vornherein, und zwar in fertigem Aufbau, zu überliefern." Und was verheisst uns der Verfasser an die Stelle des Beseitigten zu setzen? Soll das gedruckte, den Schülern (oder Lehrern) gegebene Lehrbuch kein Lehrgebäude enthalten? soll das Lehrgebäude unwissenschaftlich oder unfertig sein oder nach jedem Semester abgeändert werden? Das läuft doch auf den reinen Nihilismus hinaus? nur Beseitigung ist's, was er verlangt; an ein Besseres das folgen soll, scheint noch jeder Gedanke zu fehlen. Nach fernerer Aeusserung des Verfassers schriebe sich die alte Methode von „blinder Nachahmung" des Werkes von Eukleides her. Bekanntlich hat Eukleides gar kein Werk über Trigonometrie geschrieben; das Wort „blinde Nachahmung" erweist sich als sinnlose Phrase. Weiterhin behauptet er, die Lehrbücher hätten „mit dem Herkommen nicht zu brechen gewagt". Jeder, der einige der nach einander erschienenen Lehrbücher näher angesehen hat, wird gefunden haben, dass sie ohne sich an ein Herkommen zu binden mit mehr oder minder Geschick und Befähigung nur dahin arbeiten das Erlernen leichter und das Beherrschen vollkommener zu machen als ihre Vorgänger; sie mussten also, damit ihre Herausgabe nicht überflüssig schiene, vom Herkommen abweichen um eine Besserung aufzuweisen. Weiterhin spricht der Verfasser von „systematischen Klügeleien", als ob solche zur Charakterisirung der alten Methode gehörten. Die systematische Gestalt ist der Trigonometrie, gemäss der Einheitlichkeit ihrer Aufgabe, offenbar von Natur eigen, wird also nicht von den Bearbeitern künstlich hineingetragen. Der lästernde, aller Wahrheit entbehrende

Ausdruck „Klügeleien" scheint nur gewählt zu sein, um dem zuvorzukommen, dass man ihn gegen den gebraucht, dem diese natürliche Gestalt nicht gefällt.

Von allem dem Abschreckenden des Vorworts findet man indes im Buche keine Spur. Es ist nicht weniger wissenschaftlich, nicht weniger fertig bearbeitet als irgend ein andres Lehrbuch. Eher könnte darin die Eleganz des Abhandlungsstyls vor pädagogischen Gesichtspunkten bevorzugt erscheinen. Vielleicht war das Vorwort für andere Leser als diejenigen, die das Buch gebrauchen wollen, und zwar in diesem Falle für unkundige und urteilsunfähige bestimmt. Unterscheidend für die gewählte Methode ist, dass die Herleitung der Formeln mit der Berechnung des Dreiecksinhalts aus den Seiten beginnt. Wenn Manche behaupten, die Trigonometrie böte den Anfängern Schwierigkeiten — es ist freilich kaum zu begreifen, worin diese liegen sollen, da die Schüler schon vorher mit Linienverhältnissen und etwas rechnender Geometrie bekannt werden — so könnten dieselben an der Methode tadeln, dass sie gerade mit einer vergleichsweise schwierigeren Aufgabe den Anfang macht, und erst nachher zur einfachen Betrachtung des rechtwinkligen Dreiecks übergeht. Die Methode hat offenbar erstens den Vorzug der Eleganz, sofern aus der Lösung eine Reihe notwendiger Formeln sofort hervorgehen; sie wird daher dem Analytiker wol mehr behagen; einen Schritt zur angekündigten Reform des Unterrichts vermag man darin nicht zu erkennen. Zweitens dient sie dazu, die Einführung der formell neuen Elemente etwas weiter hinaus zu schieben. In der Tat werden hernach die Winkelfunctionen jede für sich gesondert behandelt, als wäre es Absicht dem Schüler so wenig als möglich vom specifischen Charakter der Trigonometrie merken zu lassen, das hiesse dann, der Verfasser wollte verhüten, dass der Schüler mit dem, was er lernen soll, bekannt würde!

Im ganzen zeigt das Lehrbuch kein wesentliches Abgehen von der bisherigen Lehrweise, das Wenige, was ihm eigentümlich ist, streitet sicher gegen kein Herkommen; ob es förderlich ist, muss die Erfahrung an den Tag bringen; darauf passt das Wort Uhland's: „Vom Guten hab' ich sichre Spur, vom Bessern leider nicht".

Hoppe.

Mathematische und physikalische Bibliographie.

XLI.

Geschichte der Mathematik und Physik.

Goldbreck, E., Descartes mathemathisches Wissenschaftsideal. Diss. Berlin, Mayer & Müller. 1 Mk.

Gruson, H., im Reiche des Lichtes. Sonnen, Zodiakallichte, Kometen, Dämmerungslicht-Pyramiden nach den ältesten ägypt. Quellen. Mit 28 Fig. u. 9 Taf., z. Thl. in buntfarb. Ausführg. Braunschweig, Westermann. 8 Mk.; Einbd. 1 Mk.

Harder, F., astrognostische Bemerkungen zu den römischen Dichtern. Progr. Berlin, Gärtner's Verl. 1 Mk.

Herz, N., üb. die Alphonsinischen Tafeln u. die im Besitze der k. k. Hofbibliothek in Wien befindlichen Handschriften derselben. [Aus: „Sitzungsber. d. k. Akad. d. Wiss."] Leipzig, Freytag. 50 Pf.

Jahrbuch üb. die Fortschritte der Mathematik, begründet v. C. Ohrtmann. Hrsg. v. E. Lampe. 22. Bd. Jahrg. 1890. 2. Hft. Berlin, Georg Reimer. 8 Mk.

Neteler, B., Stellung der alttestamentlichen Zeitrechnung in der altorientalischen Geschichte. 3. Untersuchg. der Zeiträume der 70 Jahrwochen. Münster, Theissing'sche Buchh. 50 Pf.

Obermayer, A. v., zur Erinnerung an Josef Stephan, k. k. Hofrath u. Professor der Physik an der Universität in Wien. Wien, Wilh. Braumüller. 1 Mk. 40 Pf.

Saalschütz, L., üb. Zahlzeichen der alten Völker. Vortrag. [Aus: „Schriften d. physikal.-ökonom. Gesellsch. zu Königsberg".] Königsberg, Koch. 20 Pf.

Methode und Principien.

Huygens, Chr., Abhandlung üb. die Ursache der Schwere. Deutsch v. R. Mewes. Berlin, Friedländer's Druckerei. 1 Mk. 60 Pf.

Jauuschke, H., der Aetherdruck als einheitliche Naturkraft. Progr. Teschen, Prochaska, Verl. 1 Mk. 80 Pf.

Kloock, H., kritische Grundlegung der Arithmetik. Bonn, Röhrscheid & Ebbecke. 2 Mk.

Koppe, M., die Behandlung der Logarithmen u. der Sinus im Unterricht. Progr. Berlin, Gärtner's Verl. 1 Mk.

Oz'egowski, A., die Quadratur des Kreises. Ostrowo, Nieslolowski. 1 Mk. 50 Pf.

Steuer, W., Methodik des Rechenunterrichts. 5. Aufl. Breslau, Woywod. 4 Mk. 50 Pf.; geb. in Leinw. 5 Mk. 25 Pf.

Tischner, A., les astronomes. Leipzig, Fock, Verl. 60 Pf.

Lehrbücher.

Kambly, L., die Elementar-Mathematik f. den Schulunterricht bearb. (In 4 Tln.) 2. Tl. Planimetrie. 96. u. 97. (Ster.)-Aufl. Mit 9 (eingedr.) Taf., enth. 138 Fig. Breslau, Ferd. Hirt, Verl. Geb. 1 Mk 65 Pf.

Sorme, J., u. Th. Sänger, mathematische Wiederholungshefte im Anschluss an die neuen Lehrpläne höherer Unterrichtsanstalten. IV. Hft. Abschlussprüfung. Marburg, Ehrhardt's Univ.-Buchh. 50 Pf.

Sammlungen.

Böhme's, R., Rechenbücher, Neubearbeitung. 6. Hft. Rechenbuch f. höhere Lehranstalten u. Lehrer-Seminare. Berlin, G. W. F. Müller. 1 Mk. 30 Pf.

Danzig, E., Uebungsstoff zur Auflösung planimetrischer Konstruktions-Aufgaben mittelst algebraischer Analysis. Progr. Leipzig, Fock, Verl. 1 Mk. 20 Pf.

Fölsing, Rechenbuch f. Gymnasien, Realgymnasien, Ober-Realschulen, Realschulen, höhere Bürgerschulen, Seminare etc. 2 Tle. Bearb. v. O. Hoffmann. 21. Aufl. Altenburg, Pierer. Geb. à 1 Mk. 20 Pf.

Geigenmüller, R., Elemente der höheren Mathematik, zugleich als Sammlg. v. Beispielen u. Aufgaben aus der analyt. Geometrie, algebr. Analysis, Differential- u. Integralrechng. Für techn.

Lehranstalten u. zum Selbstunterricht. I. Bd. Die analyt. Geometrie. 3. Aufl. Mittweida, Polytechn. Buchh. 5 Mk.

Günther, F., u. F. Böhm, Rechenbuch f. höhere Lehranstalten. 3. Aufl Berlin, H. W. Müller. 1 Mk. 80 Pf.; Einbd. 30 Pf.

Heis, E., Sammlung v. Beispielen u. Aufgaben aus der allgemeinen Arithmetik u. Algebra. In systemat. Folge bearb. f. Gymnasien, Realschulen, höhere Bürgerschulen u. Gewerbeschulen. 86.—88. Aufl. Köln, DuMont-Schauberg'sche Buchh. 3 Mk.

Heller, J. F., methodisch geordnete Sammlung v. Aufgaben u. Beispielen aus der darstellenden Geometrie f. Realschulen. III. Tl. Für die IV. Classe. Wien, Hölder. 80 Pf.

Hoffmann, J., u. J. Klein, Rechenbuch f. Seminaristen u. Lehrer. Neu bearb. v. P. Klanke u. J. Klein. 12. Aufl. Düsseldorf, Schwann. 3 Mk.; geb. 3 Mk. 50 Pf.; Antworten 60 Pf.

Kleyer, A., vollständig gelöste Aufgaben-Sammlung aus allen Zweigen der Rechenkunst, der niederen u. höheren Mathematik, der Physik etc. 1198.—1217. Hft. Stuttgart, Jul. Maier. à 25 Pf.

Lösungen zu den mathematischen Absolutorialaufgaben der bayerischen Realschulen. (1869—1892 incl). Von F. R. München, Kellerer. 2 Mk. 20 Pf.

Magnus, K. L. H., u. R. Wenzel, Rechenbuch f. Handwerker- u. gewerbliche Fortbildungsschulen. Mit gleichmäss. Berücksicht. d. Kopf- u. Tafelrechnens. 1. Tl. Ausg. A. 3. Aufl. Hannover, Meyer. 50 Pf.

Matthiessen, L., Uebungsbuch f. den Unterricht in der Arithmetik u. Algebra. Nach der Aufgabensammlg. v. Heis f. höhere Bürgerschulen, Gewerbeschulen, Progymnasien u. Realschulen II. Ordng. bearb. 3. Aufl. Köln, DuMont-Schauberg'sche Buchh. 2 Mk.

Ribi, D., Aufgaben üb. die Elemente der Algebra, methodisch geordnet u. in engem Anschluss an den „Leitfaden“ von M. Zwicky. III. Hft. 6. Aufl. Hrsg. v. M. Zwicky. Bern, Schmid, Francke & Co., Verl. 50 Pf.

Roesler, J. K., u. F. Wilde, Beispiele u. Aufgaben zum kaufmännischen Rechnen. Für den Unterricht in höhern Schulen. 1. Tl. 5. Aufl. Halle, Gesenius. 2 Mk.

Schmid, K., 100 arithmetische Aufgaben v. bayerischen Lehrer-Anstellungsprüfungen. Ausführlich gelöst. München, Kellerer. 1 Mk.

Schürmann, F., u. F. Windmöller, Rechenbuch f. gewerbliche u. kaufmännische Fortbildungsschulen. 2. Tl. Essen, Bädeker, Verl. 1 Mk.

Stockmayer, H., u. M. Tescher, Aufgaben f. den Rechenunterricht in den mittleren Klassen der Gelehrtenschulen, der Realschulen u. verwandter Lehranstalten. 2 Bdchn. f. 11—12 jähr. Schüler. 6. Aufl. Stuttgart, Bonz & Co. Kart. 60 Pf.

Tabellen.

Adam, V., Taschenbuch der Logarithmen f. Mittelschulen u. höhere Lehranstalten. 13. Aufl. Ster.-Ausg. Wien, Bermann & Altmann, Verl. Geh. 1 Mk. 20 Pf.

Gauss, F. G., fünfstellige vollständige logarithmische u. trigonometrische Tafeln. Zum Gebrauche f. Schule u. Praxis bearb. Ster.-Dr. 39. Aufl. Halle, Strien, Verl. Geb. in Leinw. 2 Mk. 50 Pf.

— dasselbe. Kleine Ausg. Ster.-Dr. 4. Aufl. Ebd. Geb. in Leinw. 1 Mk. 60 Pf.

— polygonometrische Tafeln. Zum Gebrauche in der Landmessg. f. die Teilg. des Quadranten in 90 Grade zu 60 Minuten. Ebd. Geb. in Leinw. 12 Mk.

Hertzer, H., fünfstellige Logarithmentafeln. 3. Aufl. Berlin, Gaertner's Verl. Kart. 1 Mk. 20 Pf.

Kaselitz, Wandtafeln f. den ersten Rechenunterricht in Zahlenbildern. 13 Blatt à 51 × 83, 5 cm. Berlin, Nicolai'sche Verl.-Buchh. (Stricker). 5 Mk.

Ligowski, W., Taschenbuch der Mathematik, Tafeln u. Formeln zum Gebrauche f. den Unterricht an höheren Lehranstalten u. z. Anwendg. bei Berechngn. 3. Aufl. Berlin, Ernst & Sohn. Kart. 2 Mk. 80 Pf.

Rohrbach, C., vierstellig logarithmisch-trigonometrische Tafeln, nebst einigen physikal. u. astronom. Tafeln f. den Gebrauch an höheren Schulen zusammengestellt. Gotha, Thienemann, Verl. 60 Pf.

Scherer, logarithmisch-technische Rechentafel auf Stahlblech od. Aluminium (33 × 21) cm. Schieber aus Glimmer (18 × 12 cm). Nebst Hülfstafel. Kassel, Klaunig. In Mappe 12 Mk.

Schülke, A., trigonometrische Tafel. (1 Blatt.) Leipzig, Teubner. 10 Pf.

Tafeln, zwölf, m. 14000 Divisionsaufgaben ohne Rest, e. unentbehrl. Hülfsmittel zum Rechnen m. ganzen Zahlen u. Dezimalbrüchen. Essen, Langguth's Verl. 20 Pf.

Arithmetik, Algebra und reine Analysis.

Bode, A., Leitfaden f. den arithmetischen Unterricht in Lehrer-Seminaren, bearb. f. die Hand der Seminaristen. Halle, Herm. Schroedel, Verl. 1 Mk. 75 Pf.

Braesicke, E. D., der deutsche Rechenmeister. 17. Aufl.

(In 16 Lfgn.) 1. u. 2. Lfg. Strassbnrg, Strassh. Druckerei n. Verlagsanstalt. à 25 Pf.

Gegenbauer, L., arithmetiscbe Untersucbungeu. [Ans: „Denkscbr. d. k. Akad. d. Wiss."] Leipzig, Freytag. 2 Mk 40 Pf.

Güntscbe, R, Beitrag zur Integration d. Differeutialgleicbnng $\frac{dy}{dz} = p_0 + p_1 y + p_2 y^2 + p_3 y^3$. Progr. Berlin, Gärtner's Verl. 1 Mk.

Gnth, F., das verbundene Kopf- u. Zifferrecbnen, f. mehrklass. Volks-, Mittel-, Töcbter- u. Fortbildungsscbnlen bearb. Ansg. f. die Lehrer. I. Tl. Die 4 Grnndrechnnngsarten in ganzen, vorzngsweise einfach benannteu Zahleu. 30. Anfl. Stuttgart, Bonz & Co. Kart. 1 Mk. 65 Pf.

Hellwig, C., Berechnnng der Wurzeln kubischer u. biqnadratischer Gleichnngen, hesonders auch der irrationalen Wurzeln der ersteren im irraducihlen Falle. Leipzig, Fock, Verl. 1 Mk.

Kaselitz, Wegweiser f. den Rechenunterricbt in deutscben Scbuleu. Metbodisches Haudbncb f. Lehrer u. Semiuaristen. 3 Tle. 2. Aufl. Berlin, Nicolai'sche Verl.-Bncbb. (Stricker). à 3 Mk.

Kohn, G., üb. symmetrische Functionen der Wurzeln e. algebraiscben Gleicbung. [Aus: „Sitznngsber. d. k. Akad. d. Wiss."] Leipzig, Freytag. 30 Pf.

Legeudre, A. M., Zableutheorie. Nach der 3. Anfl. ius Dentscbe übertr. v. H. Maser. 2 Bde. 2. (Titel-)Ausg. Leipzig, Tenbner. à 6 Mk.

Mayenberg, J., die wicbtigsten Begriffe n. Regeln ans der Arithmetik. 4 Anfl. Hof, Lion. 20 Pf.

Meyer, M., Uutersucbung der algebraiscbeu Integrirbarkeit d. liuearen bomogenen Differentialgleichnngen 4. Ordnung m. Hülfe v. Differentialinvarianteu. Diss. Berlin, Mayer & Müller. 1 Mk. 20 Pf.

Olbricbt, R., die wicbtigsten Recbenregeln, nebst Mnsterbeispielen, iusbesonde Lösg. aller Aufgaben der Regeldetri u. der darauf berub. Rechnuugsarten vermittelst einbeitl. Bebandlg. d. Ansatzes zur Wiederbolg. f. die Schüler aller Anstalten bearb. Leisuig, H. Ulrich. 1 Mk.

Rogel, F., trigonometriscbe Entwicklnugen. [Aus: „Sitzungsber. d. k. Akad. d. Wiss."] Prag, Rivnáč, Verl. 8) Pf.

Schrentzel, W., üb. die Integration der Differentialgleicbung 2. Ordnung der Fncbs'scben Klasse m. 3, im Endlicben gelegenen, singulären Pnnkten. Berlin, Mayer & Müller. 2 Mk.

Scbweriug, K., Anfangsgründe der Arithmetik n. Algebra f. höhere Lehranstalten. Freiburg, Herder. 1 Mk.; Einbd. 30 Pf.

Stolz, O., die Maxima n. Minima der Functiouen v. mebreren Veränderlicbeu. (II. Nacbtrag.) [Aus: „Sitzungsber. d. k. Akad. d. Wiss."] Leipzig, Freytag. 30 Pf.

Geometrie.

Arndt, E., Hauptsätze der ebenen Geometrie nebst Uebungsanfgaben zum Gebrauche an Volks- nnd Mittelschnlen. 3. Anfl. Berlin, Wiegandt & Schotte. Kart. 50 Pf.

Branne, A., Ranmlehre f. Volks-, Bürger- u. Fortbildungsschnlen, sowie f. Präparanden-Anstalten. Nach method. Grnndsätzen bearb. 3. Aufl. Halle, Herm. Schroedel, Verl. 65 Pf.

Emmerich, A., der Koordinatenbegriff u. einige Grundlehren v. den Kegelschnitten. Für den Schulnnterricht bearb. Essen, Baedeker. Geb. 80 Pf.

Fialkowski, N., die zeichnende Geometrie od. Anleitg. znm Zirkelzeichnen f. Ackerbanschulen. 2. Anfl. Wien, Pichler's Wwe. & Sohn. 1 Mk. 20 Pf.

Hanck, G., Lehrbuch der Stereometrie. Anf Grund v. F. Kommerell's Lehrbnch neu bearb. u. erweitert. 7. Anfl. (6. der Neubearheitg.) Tübingen, Lanpp'sche Buchh. 2 Mk. 40 Pf.

Hercher. B., Lehrbuch der analytischen Geometrie der Ebene f. höhere Schulen. [Erweit. Sonderabdr. ans: „Lehrbuch der Geometrie."] Leipzig, Jacobsen, Verl. 75 Pf.

Lackemann, C., die Elemente der Geometrie. Ein Lehr- n. Uebnngsbuch f. den geometr. Unterricht an 6klass. höheren Lehranstalten. 1. Tl. Planimetrie. 3. Aufl. Breslau, Ferd. Hirt, Verl. Kart. 1 Mk. 25 Pf.

Lübsen, H. B., ansführliches Lehrbnch der analytischen od. höhern Geometrie znm Selbstnnterricht. 13. Anfl. Leipzig, Fr. Brandstetter. 4 Mk.

Mink, W., Lehrbuch der Geometrie als Leitfaden beim Unterrichte an höhern Lehranstalten. 9. Anfl., bearb. v. E. 1. Tl. Planimetrie. Berlin, Wiegandt & Schotte. 1 Mk. 50 Pf.

Roeder, H., Lehrsätze u. Anfgaben ans der Planimetrie. 2. Anfl. Breslau, Ferd. Hirt, Verl. Geb. 1 Mk.

Sattler, A., Leitfaden der Geometrie. Für Volks-, Bürger- u. Fortbildnngsschnlen, höhere Mädchenschnlen u. die unteren Klassen anderer höherer Lehranstalten in 3 Stnfen bearb. 3. Anfl. Braunschweig, Appelhans & Pfenningstorff. 1 Mk.

Sobotka, J., Beitrag znr Construction v. umgeschriebenen Developpahlen: I. an Flächen 2. Grades, II. an Rotationsflächen. [Aus: Sitznngsber. d. k. böhm. Gesellsch. d. Wiss."] Prag, Rivnáč, Verl. 40 Pf.

Streissler, J., die geometrische Formenlehre (1. Abth.) in Verbindung m. der Anschauungslehre. Für die I. Realclasse. 8. Aufl. Triest, Schimpff. 1 Mk 20 Pf.

Töpfer, H., Lehrbuch der Planimetrie. Sondershausen, Eupel. 2 Mk. 20 Pf.; geb. 2 Mk. 50 Pf.

Vetters, K., Abriss der darstellenden Geometrie. 1. Tl. Orthogonalprojektivische Darstellg. v. Punkten, Geraden, Ebenen u. nebenfläch. Körpern. Chemnitz, Focke'sche Buchh. 3 Mk.

Praktische Geometrie, Geodäsie.

Fialkowski, N., Elemente d. Situations-Zeichnens nebst Anleitung zum Coloriren. 2. Aufl. Wien, Pichler's Wwe. & Sohn, Verl. 1 Mk. 20 Pf.

Jordan, W., Handbuch der Vermessungskunde. 2. Bd. Feld- u. Land-Messg. 4. Aufl. (In 2 Lfgn.) 1. Lfg. Stuttgart, Metzler-sche Buchh., Verl. 11 Mk.

Mechanik.

Margules, M., Luftbewegungen in e. rotirenden Sphäroidschale. (II. Thl.) [Aus: Sitzungsber. d. k. Akad. d. Wiss."] Leipzig, Freytag. 1 Mk. 80 Pf.

Stando, O., üb. das Foucault'sche Pendel. [Aus: „Archiv der Freunde der Naturgeschichte in Meckl."] Güstrow, Opitz & Co. 25 Pf.

Technik.

Bericht, offizieller, üb. die internationale elektro-technische Ausstellung in Frankfurt am Main 1891. Hrsg. vom Vorstand der Ausstellung. I. Bd. Allgemeiner Bericht. Frankfurt, Sauerländer's Verl. Geb. in Leinwd. 20 Mk.

Bibliographie, elektrotechnische. Monatliche Rundschau üb. die literar. Erscheinungn. d. In- u. Auslandes einschliesslich der Zeitschriftenliteratur auf dem Gebiete der Elektrotechnik. Unter ständ. Mitwirkg. der Elektrotechn. Gesellschaft zu Leipzig zusammengestellt v. G. Maas. 1. Jahrg. 1893. 9 Hfte. Leipzig, Barth. 4 Mk.

Bibliothek, elektro-technische. 1. Bd. 6. Aufl. Wien, Hartleben. 3 Mk; geb. 4 Mk.

Fortschritte der Elektrotechnik. Hrsg. v. K. Strecker. 5. Jahrg. Das Jahr 1881. 3. Hft. Berlin, Springer. 6 Mk.

Geist, E. H., Berechnung elektrischer Maschinen. Ein Handbuch f. Fachleute. 2. Aufl. München, Oldenbourg. 2 Mk. 40 Pf.

Grawinkel, C., u. K. Strecker, die Telegraphentechnik. Ein Leitfaden f. Post- u. Telegraphenbeamte. 3. Aufl. Berlin, Springer. 4 Mk.; geb 5 Mk.

Krämer, J, wie wird man Elektrotechniker? Magdeburg, Exped. d. „Prakt. Physik", Franz Müller. 1 Mk.

Steigl, J., u. K. Büchler, der Elektriker in Schule u. Haus, e. Anleitung zur prakt. Handhabg. der Apparate aus dem Gebiete der Reibungs- u. Vertheilungs-Elektricität. Wien, Pichler's Wwe. & Sohn, Verl. 50 Pf.

Thompson, S. P., die dynamoelektrischen Maschinen. Ein Handbuch f. Studirende d. Elektrotechnik. 4. Aufl. Deutsche Uebersetzg. v. C. Grawinkel. 1. Thl. Halle, Knapp. 12 Mk.

— dasselbe. 7. u. 8. Hft. Ebd. à 2 Mk.

Wilke, A., der elektrotechnische Beruf. Eine kurzgefasste Darstellg. d. Bildungsganges u. der Aussichten d. Elektrotechnikers u. der elektrotechn. Gewerbtreibenden. Leipzig, Leiner. 1 Mk. 50 Pf.

Optik, Akustik und Elasticität.

Czapski, S., Theorie der optischen Instrumente nach Abbe. Breslau, Ed. Trewendt, Verl. Geb. 9 Mk. 60 Pf.

Hahn, H., die Berechnung d. Lichtes in e. Ebene. — Von Horaz — Verdeutschungen. Von K. Staedler. Progr. Berlin, Gärtner's Verl. 1 Mk.

Jaerisch, P., zur Theorie der elastischen Kugelwellen m. Anwendg. auf die Reflexion u. Brechg. d. Lichtes. Hamburg, Herold'sche Buchh., Verl. 2 Mk. 50 Pf.

Erd- und Himmelskunde.

Arbeiten, astronomische, d. k. k. Gradmessungs-Bureau, ausgeführt unter der Leitg. von Th. v. Oppolzer. Nach dessen Tode hrsg. v. V. Weiss u. R. Schram. 4. Bd. Längenbestimmungen. Leipzig, Freytag. 16 Mk.

Bebber, W. J. van, Katechismus der Meteorologie. 3. Aufl. Leipzig, J. J. Weber. Geb. in Leinw. 3 Mk.

Diesterweg's populäre Himmelskunde u. mathematische Geographie. Neu bearb. v. M. W. Meyer unter Mitwirkg. v. B. Schwalbe. 16., 17. u. 18. Aufl. Berlin, E. Goldschmidt. 7 Mk. 50 Pf.; geb. in Schul-Bd. 8 Mk. 50 Pf.; in Orig.-Bd. 9 Mk.

Gravelius, H., die Anwendung der elliptischen Functionen bei Berechnung absoluter Störungen. Berlin, Stankiewicz. 2 Mk.

Hann, J., einige Resultate der anemometrischen Aufzeichnungen in Wien 1873—1882. [Aus: „Sitzungsber. d. k. Akad. d. Wiss."] Leipzig, Freytag. 1 Mk. 40 Pf.

Heppergor, J. v., zur Theorie der astronomischen Refraktion. [Aus: „Sitzungsber. d. k. Akad. d. Wiss."] Ebd. 70 Pf.

Himmel u. Erde. Illustr. naturwissenschaftliche Monatsschrift. Hrsg. v. der Gesellschaft Urania. Red.: M. W. Meyer. V. Jahrg. Octbr. 1892 bis Septbr. 1893. 7. Hft. Berlin, Herm. Paetel. Vierteljährl. 3 Mk. 60 Pf.

Jahrbuch der Astronomie u. Geophysik. Enth. die wichtigsten Fortschritte auf den Gebieten der Astrophysik, Meteorologie u. physikal. Erdkunde. Unter Mitwirkg. v. Fachmännern hrsg. v. H. J. Klein. 3. Jahrg. 1892. Mit 5 Lichtdruck- u. Chromotaf. Leipzig, E. H. Mayer. 7 Mk.

Jahrbuch, deutsches meteorologisches, f 1891. Meteorologische Motive 1. Ordng. in Bremen. Ergebnisse der meteorolog. Beobachtgn. Stündliche Aufzeichngn. der Registrirapparate. Dreimal tägliche Beobachtgn. an 4 Regenstationen. Hrsg. v. P. Bergholz. II. Jahrg. Mit 8 Taf. Bremen, Nössler. 3 Mk.

Jahrbuch, deutsches meteorologisches, f. 1892. Beobachtungssystem d. Königr. Preussen u. benachbarter Staaten. Ergebnisse der meteorolog. Beobachtgn. im J. 1892. 2. Hft. Hrsg. v. dem königl. preuss. meteorolog. Institut durch W. v. Bezold. Berlin, Asher & Co., Verl. 3 Mk.

Jelinek's Anleitung zur Ausführung meteorologischer Beobachtungen, nebst e. Sammlg. v. Hilfstafeln. (In 2 Thln.) 4. Aufl. Hrsg. v. der Direction der k. k. Central-Anstalt f. Meteorologie u. Erdmagnetismus. 1. Thl. Anleitung zur Ausführg. meteorolog. Beobachtgn. an Stationen II. u. III. Ordnung. Leipzig Engelmann. 1 Mk. 20 Pf.

Kirchner, M., Duisburger Sonnentafel f. d. J. 1894. Auf- u. Untergangszeit der Sonne, sowie die Sonne des wahren Mittags zu Duisburg f. alle Tage des Jahres 1894. Duisburg, Ewich. 50 Pf.

Klein, H. J., Katechismus der Astronomie. Belehrungen üb. den gestirnten Himmel; die Erde u. den Kalender. 8. Aufl. Leipzig, J. J. Weber. Geb. in Leinw. 3 Mk.

Kloock, H., die Unhaltbarkeit der sogenannten Methode der kleinsten Quadrate u. die Neugestaltung der endgültigen Bahnbestimmungen der Sterne. Bonn, Röhrscheid & Ebbecke. 1 Mk.

Konkoly, N. v., Beobachtungen, angestellt am astrophysikalischen Observatorium in O'Gyalla (Ungarn). XIII. u. XIV. Bd. enth. Beobachtgn. der J. 1890 u. 1891. Halle, Schmidt's Verl.-Buchh. 6 Mk. 50 Pf.

Küstuer, F., üb. Anwendungen der Lage der Erdaxe. [Aus:

„Abhandlgn. d. naturforsch. Gesellsch. v. Görlitz."] Görlitz, Tzschaschel's Buchh. 80 Pf.

Láska, V., zur Bahnbestimmung. [Aus: „Sitzungsber. d. böhm. Ges. d. Wiss."] Prag, Rivnáč, Verl. 20 Pf.

Linsenharth, H., astronomische Neuigkeiten. Berlin, Rich. Lesser. 60 Pf.

Lockyer, N., Astronomie. Deutsche Ausg., besorgt v. A. Winnecke. 5. Aufl., durchgesehen v. E. Becker. Strassburg, Trübner, Verl. Kart. 80 Pf.

Mach, E., u. B. Doss, Bemerkungen zu den Theorien der Schallphänomene bei Meteoritenfällen. [Aus: „Sitzungsber. d. k. Akad. d. Wiss."] Leipzig, Freytag. 30 Pf.

Niesel, G. v., Bahnbestimmung des Meteors vom 7. Juli 1892. [Aus: „Sitzungsber. d. k. Akad. d. Wiss."] Ebd. 70 Pf.

Oppolzer, E. v., üb. die Ursache der Sonnenflecken. [Aus: „Sitzungsber. d. k. Akad. d. Wiss."] Ebd. 80 Pf.

Publikationen d. astrophysikalischen Observatoriums zu Potsdam. Hrsg. v. H. C. Vogel. 8. Bds. 4. Stück. Leipzig, Engelmann. 9 Mk.

Rebeur-Paschwitz, E. v., das Horizontalpendel u. seine Anwendung zur Beobachtung der absoluten u. relativen Richtungs-Aenderungen der Lothlinien. Ergebnisse einiger m. Unterstützung der königl. preuss. Akademie der Wissenschaften in d. J. 1888—1892 auf den Observatorien zu Wilhelmshaven u. Potsdam, sowie in Puerto Orotava auf Teneriffa ausgeführten Beobachtungsreihen. Leipzig, Engelmann. 15 Mk.

Seeliger, H., Theorie der Beleuchtung staubförmiger kosmischer Massen insbesondere d. Saturnringes. München, Franz'scher Verl. 2 Mk. 20 Pf.

Vierteljahrsschrift der astronomischen Gesellschaft. Hrsg. v. R. Lehmann-Filhés u. H. Seeliger. 27. Jahrg. 1892. 4. Hft. Leipzig, Engelmann. 2 Mk.

Nautik.

Ephemeriden, astronomisch-nautische, f. d. J. 1894. Deutsche Ausg. Ueber Veranlassg. der Marine-Section d. k. u. k. Reichs-Kriegsministeriums. Hrsg. vom astronomisch-meteorolog. Observatorium der k. k. Handels- u. naut. Akademie in Triest unter Red. v. F. Anton. 7. Jahrg. Triest, Schimpff. Kart. 3 Mk.

Leitfaden f. den Unterricht in der Navigation. 3 Thle. u. Anh. Berlin, Mittler & Sohn. Geh. ungeb. in Leinw. 10 Mk.; geb. 12 Mk.

Ludolph, W., Leuchtfeuer u. Schallsignale in Ostsee, Nordsee u. Kanal. 22. Jahrg. 7. Aufl. Bremen, Heinsius Nachf. 3 Mk.

Sitzungsberichte der kaiserl. Akademie d. Wissenschaften. Mathematisch-naturwissenschaftliche Classe. Abth. IIa. Abhandlungen aus dem Gebiete der Mathematik, Astronomie, Physik, Meteorologie u. der Mechanik. 101. Bd. 10. Hft. Leipzig, Freytag. 3 Mk. 20 Pf.

— dasselbe. 102. Bd. 1. u. 2. Hft. Ebd. 4 Mk. 50 Pf.

Sitzungsberichte d. mathematisch-physikalischen Classe der k. b. Akademie der Wissenschaften in München. 1893. 1. Hft. München, Franz'scher Verl. 1 Mk. 20 Pf.

